Министерство высшего и среднего специального образования
Р С Ф С Р

Ордена Трудового Красного Знамени
научно-исследовательский-радиофизический институт (НИРФИ)

Препринт № 155

ПЕРЕХОДНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ АКУСТИКО-ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН

Г.И.Григорьев

О.Н.Савина

Горький 1982

УДК 551.596

Рассмотрено переходное излучение акустико-гравитационных волн, возникающее при пересечении вертикально движущимся точечным источником массы границы раздела двух сред. Получено и проанализировано спектральное распределение возмущения давления и плотности потока излучаемой энергии. Из анализа кинематических соотношений для поверхности равных фаз пространственных низкочастотных возмущений сделан вывод о существовании каустики.

Переходное излучение, возникающее при движении заряженной частицы из одной среды в другую, впервые было рассмотрено в электродинамике Гинзбургом и Франком [1]. В акустике переходное излучение звуковых волн анализировалось в [2]. В данной работе определяется характер гидродинамических возмущений для случая, когда вертикально движущийся источник массы под прямым углом пересекает границу раздела двух сред, в каждой из которых из-за влияния поля тяжести равновесные давление p_0 и плотность ρ_0 меняются по барометрическому закону.

Основные уравнения

Пользуясь известной системой линейных уравнений идеального газа в поле силы тяжести (с ускорением $\vec{g} = \{0, 0, -g\}$) при наличии движущегося источника массы с производительностью Q, можно получить волновое уравнение для возмущений давления p или более удобной для анализа величины $\psi = p \exp(z/2H)$ [3]

$$\frac{1}{c_n^2}\frac{\partial^4\psi_n}{\partial t^4}-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\Delta-\frac{1}{4H_n^2}\right)\psi_n-\omega_{gn}^2\,\Delta_\perp\psi_n=$$

$$=\exp\left(z/2H_n\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\omega_{gn}^2\right)\frac{\partial Q_n}{\partial t}. \qquad (1)$$

Здесь индексы n = 1, 2 характеризуют параметры среды над ($z > 0$) и под ($z < 0$) границей раздела (плоскость x, y при z = 0). При записи (1) использованы обозначения: c – скорость звука, H – высота однородной атмосферы, $\omega_g = \sqrt{\gamma-1}\,g/c$ – частота Вяйсяля–Брента, $\gamma = c_p/c_v$ – отношение теплоемкостей, $\Delta_\perp = \frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$.

Принимая, что точечный источник массы Q движется в положительном направлении оси z со скоростью v_n

$$Q_n = Q_0\exp(-z/2H_n)\,\delta(z-v_nt)\,\delta(r)/2\pi r, \qquad (2)$$

введем цилиндрическую систему координат (r, φ, z) и воспользуемся преобразованием Фурье – Бесселя

$$\bar{\psi}(\vec{k},\omega)=(2\pi)^{-1}\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty r\varphi(r,t)e^{i\omega t}J_0(kr)\,dr\,dt, \qquad (3)$$

где J_0 – функция Бесселя первого рода нулевого порядка. Применив это преобразование к уравнению (1) с источником (2), получим

$$\frac{d^2\bar{\psi}_n}{dz^2}+\varkappa_n^2\bar{\psi}_n=\frac{iQ_0(\omega^2-\omega_{gn}^2)}{4\pi^2\omega v_n}\exp\left(\frac{i\omega z}{v_n}\right), \qquad (4)$$

$$\varkappa_n^2 = \frac{\omega^2 - \omega_{An}^2}{c_n^2} + k^2 \; \frac{\omega_{gn}^2 - \omega^2}{\omega^2}, \tag{5}$$

где $\omega_{An} = c_n / 2H_n$. На границе $z = 0$ непрерывными являются вертикальное смещение ξ_z и, следовательно, вертикальная компонента скорости $w = d\xi_z/dt$, а также полное давление $p - \rho_0 g \xi_z$, то-есть при $z = 0$

$$w_1 = w_2 \,, \quad p_1 + \rho_{01} \frac{g w_1}{i\omega} = p_2 + \rho_{02} \frac{g w_2}{i\omega} . \tag{6}$$

Здесь ρ_{01} и ρ_{02} – равновесные значения плотности среды на разных сторонах границы $z = 0$. Поляризационные соотношения[+)] акустико-гравитационных волн позволяют переписать граничные условия (6) через искомую функцию ψ :

$$\left.\begin{aligned} &\left(\frac{\partial \bar{\psi}_1}{\partial z} + k_{H1} \bar{\psi}_1\right) f_1 = \left(\frac{\partial \bar{\psi}_2}{\partial z} + k_{H2} \bar{\psi}_2\right) f_2 \\ &\bar{\psi}_1 + (\rho_{01} - \rho_{02}) \left(\frac{\partial \bar{\psi}_1}{\partial z} + k_{H1} \bar{\psi}_1\right) f_1 g = \bar{\psi}_2 \end{aligned}\right\} \; z = 0 . \tag{7}$$

[+)] Из них мы, в частности, использовали

$$w = \frac{i\omega}{\rho_0 (\omega_g^2 - \omega^2)} \left(\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{g p}{c^2}\right).$$

В (7) введены обозначения: $k_{Hn} = (2-\gamma)/2\gamma H_n$, $f_n = [\rho_{0n}(\omega_{gn}^2 - \omega^2)]^{-1}$, $n = 1, 2$.

Решение уравнения (4) с граничными условиями (7) можно представить в виде

$$\bar{\Psi}_1 = \mathcal{F}_1 \exp(i\omega z/v_1) + A_1 \exp(\pm i\varkappa_1 z),$$

$$\bar{\Psi}_2 = \mathcal{F}_2 \exp(i\omega z/v_2) + A_2 \exp(\mp i\varkappa_2 z). \tag{8}$$

В этих соотношениях $\mathcal{F}_n = \dfrac{iQ_0(\omega^2 - \omega_{gn}^2)}{4\pi^2\omega v_n(\varkappa_n^2 - \omega^2/c_n^2 M_n^2)}$, $M_n = v_n/c_n$ – числа Маха, амплитуды A_1 и A_2 соответственно равны

$$A_1 = [\mathcal{F}_1(f_1 k_1 - f_2 K_2) - i f_2 \mathcal{F}_2(\omega/v_2 \pm \varkappa_2) - g\Delta\rho f_1 k_1 \mathcal{F}_1 f_2 K_2](f_2 K_2 - f_1 K_1 + g\Delta\rho f_1 K_1 f_2 K_2)^{-1},$$

$$A_2 = [\mathcal{F}_2(f_1 K_1 - f_2 k_2) + i f_1 \mathcal{F}_1(\omega/v_1 \mp \varkappa_1) - g\Delta\rho f_1 K_1 f_2 k_2 \mathcal{F}_2](f_2 K_2 - f_1 K_1 + g\Delta\rho f_1 K_1 f_2 K_2)^{-1}, \tag{9}$$

где $\Delta\rho = \rho_{01} - \rho_{02}$, $k_n = k_{Hn} + i\omega/v_n$, $K_1 = k_{H1} \pm i\varkappa_1$, $K_2 = k_{H2} \mp i\varkappa_2$. Проанализируем полученное решение в различных предельных случаях.

Переходное излучение акустико-гравитационных волн

Переходное излучение $\sim A_n \exp(i\varkappa_n z)$ должно распространяться от границы раздела сред. В связи с этим в формулах (8), (9) и последующих указаны двойные знаки у волновых чисел $\varkappa_n$. Верхний знак относится к быстрым акустико-гравитационным волнам (АГВ) в частотном диапазоне $\omega \geqslant \omega_{An}$; нижний – к внутренним гравитационным при $\omega \leqslant \omega_{gn}$. В решении (8) представлено также черенковское излучение АГВ $\sim \mathcal{F}_n \exp(i\omega z/\ldots_n)$. Такое излучение анализировалось в ряде работ (см., например, [3, 4]) и здесь рассматриваться не будет.

Для возмущений давления p_1 и горизонтальной компоненты скорости $v_{r1} = (i\omega\rho_0)^{-1}\partial p_1/\partial r$, связанных с переходным излучением, в волновой зоне, где $kr \gg 1$ и можно воспользоваться асимптотическим представлением функций Бесселя, имеем

$$p_1 \simeq \frac{\exp(-z/2H_1)}{\sqrt{2\pi i r}} \iint\limits_{-\infty}^{\infty} A_1 k^{1/2} \exp(-i\omega t \pm i\varkappa_1 z + ikr)\,dk\,d\omega, \tag{10}$$

$$v_{r1} \simeq \frac{\exp(z/2H_1)}{\rho_{01}\sqrt{2\pi i r}} \iint\limits_{-\infty}^{\infty} A_1 k^{3/2} \exp(-i\omega t \pm i\varkappa_1 z + ikr)\,d\omega\,dk. \tag{11}$$

В плоскости комплексных k подынтегральные функции в (10), (11) имеют особенности: точки ветвления $k = 0$, $k_{bn} = \pm \frac{|\omega|}{c_n}\sqrt{\frac{\omega_{An}^2 - \omega^2}{\omega_{gn}^2 - \omega^2}}$, полюсы $k_{pn} = \pm \frac{|\omega|}{c_n}\sqrt{\frac{\omega_{An}^2 - \omega^2(1 - M_n^{-2})}{\omega_{gn}^2 - \omega^2}}$, а также полюсы, являющиеся решением уравнения $\mathcal{L} = f_2 K_2 - f_1 K_1 + g\Delta\rho f_1 K_1 f_2 K_2 = 0$.

Кроме отмеченных особенностей при интегрировании (10),

(11) надо учесть наличие седловых точек

$$k_{sn} = \frac{\omega^2}{c_n}\sqrt{\frac{\omega_{An}^2 - \omega^2}{(\omega_{gn}^2 - \omega^2)(\omega^2 - \omega_{cn}^2)}}\,\sin\vartheta, \tag{12}$$

где $\omega_{cn} = \omega_{gn}\cos\vartheta$ и угол ϑ определен соотношениями $r = R\sin\vartheta$, $z = R\cos\vartheta$. Соответствующее выражение для вертикальной компоненты волнового вектора $\varkappa_{sn}$ находим из (5), (12):

$$\varkappa_{sn} = \frac{1}{c_n}\sqrt{\frac{(\omega_{An}^2 - \omega^2)(\omega_{gn}^2 - \omega^2)}{\omega^2 - \omega_{cn}^2}}\,\cos\vartheta. \tag{13}$$

Вклад седловых точек в интегральных представлениях (10), (11) является определяющим при вычислении переходного излучения [2]. На плоскости комплексных $k = k_R + ik_I$ контур интегрирования вблизи $k = k_{sn}$ задается соотношениями [5]

$$k_I = \frac{\omega(k_R - k_\alpha)(k_R - k_s)\,tg\,\vartheta}{(\omega_g^2 - \omega^2)^{1/2}(k_\gamma - k_R)^{1/2}(k_R - k_\delta)^{1/2}}, \quad \omega_c < \omega < \omega_g, \tag{14}$$

$$k_I = \frac{\omega(k_R - k_\alpha)(k_R - k_s)\,tg\,\vartheta}{(\omega_g^2 - \omega^2)^{1/2}\left[(k_R - k_s)^2 + k_\beta^2\right]^{1/2}}, \quad \omega > \omega_A. \tag{15}$$

При записи (14), (15) опущен индекс n у всех величин и введены обозначения

$$k_\alpha = \frac{1}{c}\sqrt{\frac{(\omega_A^2 - \omega^2)(\omega^2 - \omega_c^2)}{\omega_g^2 - \omega^2}}\,\sin\vartheta, \quad k_\beta = \frac{\omega}{c}\sqrt{\frac{\omega_A^2 - \omega^2}{\omega^2 - \omega_c^2}}\,\cos\vartheta,$$

$$k_\gamma = k_\beta + k_s\,, \quad k_\delta = k_s - k_\beta\,.$$

Интегрируя (10) по k методом перевала и не учитывая других особенностей подынтегрального выражения, находим

$$p_1 = \frac{\exp(-z/2H_1)\cos\vartheta}{Rc_1}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\omega^2 A_1(k_s,\omega,\varkappa_s)}{\omega^2-\omega_{c1}^2}\left|\omega_{A1}^2-\omega^2\right|^{1/2}\cdot$$

$$\cdot\exp\left\{-i\omega t + i\frac{R}{c}\sqrt{\frac{(\omega_{A1}^2-\omega^2)(\omega^2-\omega_{c1}^2)}{\omega_{g1}^2-\omega^2}}\right\}d\omega$$

(16)

Поток энергии W_ω переходного излучения на частоте ω в телесный угол $d\Omega = \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi$ за полное время пролета подсчитаем по формуле

$$\frac{dW_\omega}{d\Omega} = R^2\int_{-\infty}^{\infty} q_R\, dt\,, \qquad (17)$$

где $q_R = (p v_R^* + p^* v_R)/2$ – плотность потока энергии в радиальном направлении, знак ($*$) означает комплексную сопряженность. Радиальная компонента скорости v_R может быть выражена через давление $p = \psi\exp(-R\cos\vartheta/2H)$ из исходной системы уравнений гидродинамики для возмущений p, ρ, v_R, v_ϑ, записанных в сферической системе координат. Проделав необходимые выкладки, получим

$$\rho_0\left(\omega_g^2+\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\frac{\partial v_R}{\partial t}=-\exp\left(-\frac{R\cos\vartheta}{2H}\right)\left[\left(\omega_g^2\sin^2\vartheta+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\frac{\partial\psi}{\partial R}+\frac{\omega_g^2}{R}\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}\sin\vartheta\cos\vartheta+\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}k_H\cos\vartheta\right].$$

(18)

Используя представления (16), (18), приведем выражение $q_R(\omega,\vartheta)$ для случая, когда точечный источник массы (2) $Q\sim\delta(z+vt)$ движется в полупространстве $z>0$ к абсолютно жесткой границе

$$q_1=\frac{q_0\omega^3[(\omega_A^2-\omega^2)(\omega_g^2-\omega^2)]^{3/2}(k_H^2+\omega^2v^{-2})\cos^2\vartheta}{c^2v^2(\omega^2-\omega_g^2\cos^2\vartheta)^{5/2}(\varkappa_s^2-\omega^2v^{-2})(\varkappa_s^2+k_H^2)},$$

(19)

где $q_0=Q_0^2/16\pi^4\rho_{01}\acute{c}R^2$ величина $\varkappa_s$ определена формулой (13). Заметим, что из полного решения поставленной задачи (8) мы выделяем часть, соответствующую переходному излучению АГВ с плотностью потока энергии в радиальном направлении q_1. Несложный анализ формулы (19), однако, показывает, что при выполнении условия черенковского синхронизма $\varkappa_s^2-\omega^2v^{-2}=0$ +)

+) Более строгая оценка вклада седловой точки при приближении ее к полюсу k_p или точке ветвления k_B в интегральном представлении (10) дается формулами (16), (28) § 4 гл. IУ из [10].

плотность потока энергии неограниченно возрастает. В связи с этим воспользуемся равенством

$$\frac{k_H^2+\omega^2 v^{-2}}{(\varkappa_s^2+k_H^2)(\varkappa_s^2-\omega^2 v^{-2})^2}=\frac{1}{k_H^2+\omega^2 v^{-2}}\left[\frac{1}{\varkappa_s^2+k_H^2}+\frac{k_H^2-\varkappa_s^2+2\omega^2 v^{-2}}{(\varkappa_s^2-\omega^2 v^{-2})^2}\right] \quad (20)$$

и отбросим в (19) ту часть (второе слагаемое в квадратных скобках (20)), которая соответствует черенковскому механизму генерации возмущений. В результате для плотности потока энергии переходного излучения $q_{1п}$ получим

$$q_{1п}=\frac{q_0\,\omega^3[(\omega_A^2-\omega^2)(\omega_g^2-\omega^2)]^{3/2}}{c^2 v^2(\omega^2-\omega_g^2\cos\vartheta)^{5/2}(k_H^2+\varkappa_s^2)(k_H^2+\omega^2 v^{-2})} \quad (21)$$

Подсчитанная по формуле (21) плотность потока энергии $q_{1п}/q_0$ представлена на рис. 1 в зависимости от частоты ω/ω_g для $v=0{,}5c$ и углов $\vartheta_1=45^\circ$ (сплошная кривая) и $\vartheta_2=70^\circ$ (пунктир).

Кинематические соотношения АГВ для переходного излучения

В предыдущем разделе получено спектральное представление возмущений для переходного излучения АГВ, возникающего при пересечении источником массы границы раздела двух сред. Пространственно-временную форму соответствующего сигнала можно получить после интегрирования (16) по частоте ω, например, методом стационарной фазы.

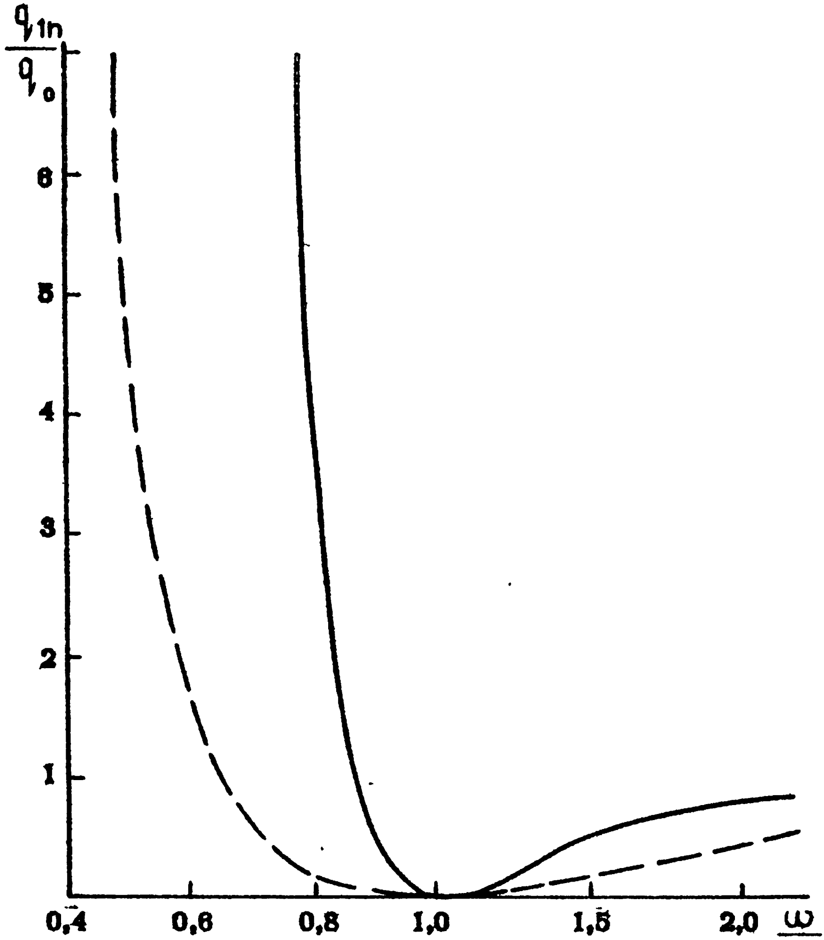

Рис. 1

Однако осуществить эту программу нелегко вследствие сложной зависимости $\Phi = \Phi(\omega)$. Тем не менее, используя кинематические соотношения, сделаем некоторые выводы о структуре сигнала. Анализ, проведенный в [6, 7], показал, что импульсный источник в безграничной изотермической атмосфере порождает три сигнала. Первыми в точку наблюдения приходят со скоростью звука возмущения на высоких частотах $\omega \gg \omega_A$. Затем появляется возмущение на частоте $\omega_m < \omega_g$, которое в дальнейшем расщепляется на два с частотами $\omega_g \cos\vartheta < \omega_1 < \omega_m$ и $\omega_m < \omega < \omega_g$. Асимптотически при $t \to \infty$ характерные частоты этих трех сигналов приближаются соответственно к значениям ω_A, ω_g и $\omega_c = \omega_g \cos\vartheta$. Пояснить эту ситуацию можно, анализируя зависимость групповой скорости $V_{гр}$ от частоты ω и угла ϑ. Определяя $V_{гр} = \sqrt{(\partial\omega/\partial\varkappa)^2 + (\partial\omega/\partial k)^2}$ из дисперсионного уравнения (5) и подставляя в полученное выражение найденные выше $k = k_s(\omega, \vartheta)$ и $\varkappa = \varkappa_s(\omega, \vartheta)$, получим

$$\frac{V_{гр}}{c} = \frac{\left[(\omega_A^2 - \omega^2)(\omega^2 - \omega_g^2\cos^2\vartheta)\right]^{1/2}(\omega_g^2 - \omega^2)^{3/2}}{\omega\left[(\omega^2 - \omega_g^2)^2 + \omega_g^2(\omega_A^2 - \omega_g^2)\sin^2\vartheta\right]} . \tag{22}$$

На рис. 2 дана зависимость $V_{гр}/c$ от частоты ω/ω_g для разных углов ϑ. Из этого рисунка видно, что для каждого угла ϑ есть частота $\omega_m < \omega_g$, для которой $V_{гр}(\vartheta, \omega_m)$ максимальна, а время группового запаздывания сигна-

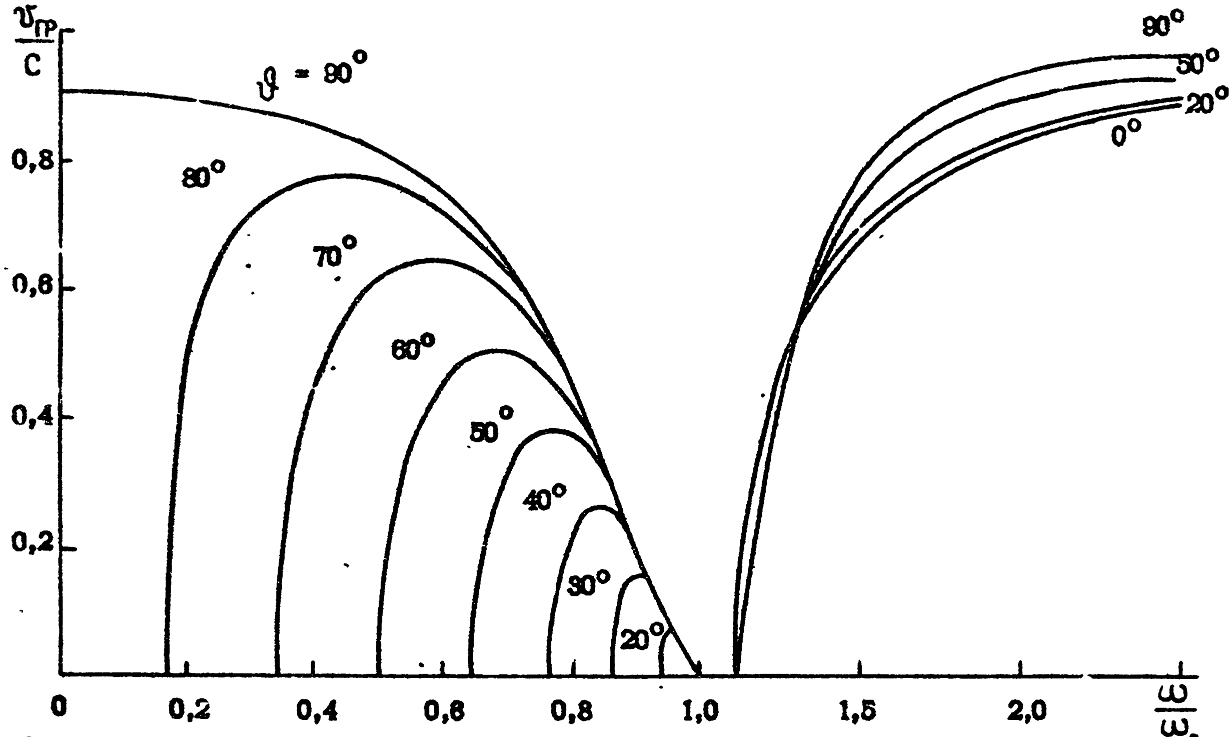
$\frac{v_{гр}}{c}$
$\vartheta = 90^\circ$
80°
70°
60°
50°
40°
30°
20°
90°
50°
20°
0°
0,8
0,6
0,4
0,2
0
0,2
0,4
0,6
0,8
1,0
1,5
2,0
$\frac{\omega}{\omega_g}$

Рис. 2

ла минимально.

Исходными для нахождения поверхностей равных фаз возмущений являются соотношения

$$\Phi(\omega,\vartheta)=\frac{R}{c}\left[\frac{(\omega_A^2-\omega^2)(\omega^2-\omega_g^2\cos^2\vartheta)}{\omega_g^2-\omega^2}\right]^{1/2}-\omega t-B=const,$$

$$\Phi'_\omega=\frac{R\omega}{ct}\,\frac{(\omega^2-\omega_g^2)^2+\omega_g^2(\omega_A^2-\omega_g^2)\sin^2\vartheta}{[(\omega_A^2-\omega^2)(\omega^2-\omega_g^2\cos^2\vartheta)]^{1/2}(\omega_g^2-\omega^2)^{3/2}}-1=0.$$

(23)

Вводя безразмерную частоту $\Omega=\omega/\omega_g$, а также $B_1=-B/\omega_g t$ и разрешая систему (23) относительно $\tilde{R}=r/ct$, $\tilde{z}=z/ct$, получаем в параметрическом виде уравнение искомых поверхностей

$$\tilde{R}^2=(\Omega^2-1)^2\left[\frac{(B_1+\Omega)^2}{(\Omega^2-1{,}225)^2}-\frac{B_1+\Omega}{\Omega(\Omega^2-1{,}225)}\right],$$

$$\tilde{z}^2=\frac{B_1+\Omega}{\Omega}-\left[1+\frac{0{,}225}{(\Omega^2-1)^2}\right]\tilde{R}^2.$$

(24)

Сечения поверхностей одинаковых фаз возмущений какой-либо из вертикальных плоскостей, содержащих траекторию источника массы, представлена на рис. 3 для разных значений

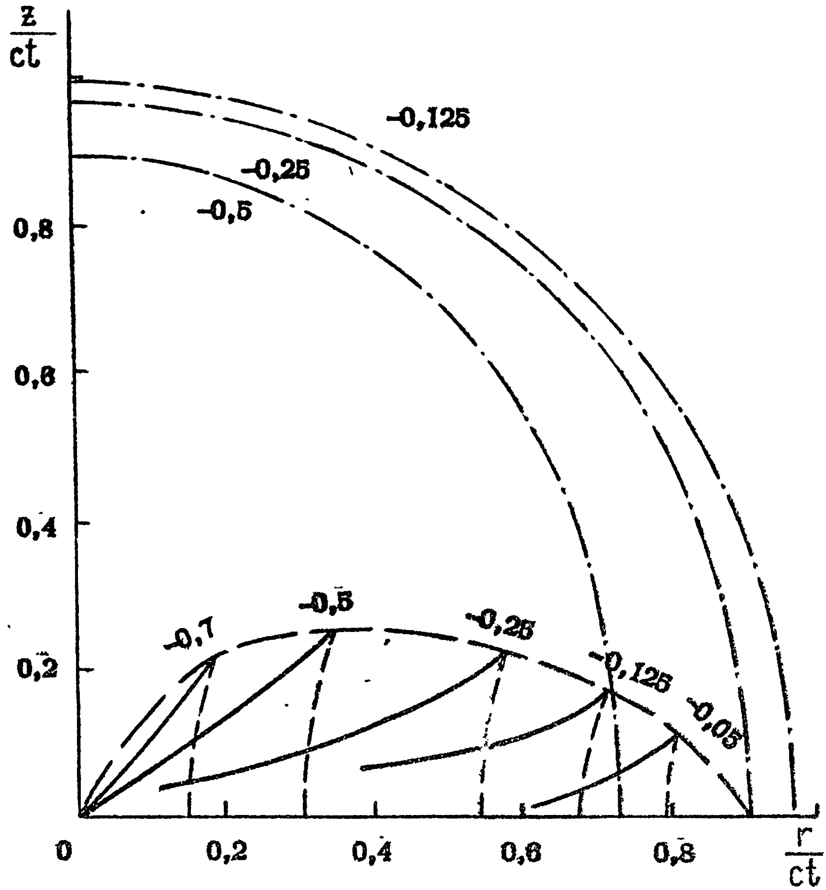

Рис. 3

параметра B_1, отмеченных цифрами у кривых. Штрихпунктирные линии на рис. 3 относятся к инфразвуковым возмущениям на частотах $\omega > \omega_A$, сплошные соответствуют частотам $\omega_g \cos\vartheta < \omega_1 < \omega_m$ пунктирные – частотам $\omega_m < \omega_2 < \omega_g$. Из приведенной картины следует важный вывод о том, что для переходного излучения в диапазоне частот $\omega < \omega_g$ образуется каустическая поверхность. На рис. 3 ее след изображен пунктиром вдоль носовых частей нижних кривых. Каустика отделяет область тени от области, куда приходят две группы волн.

Вывод о существовании каустической поверхности для импульсных источников можно сделать также, анализируя зависимость групповой скорости АГВ от частоты. Положение каустики определяется тогда как геометрическое место точек, где $\Phi''_{\omega\omega} = 0$ или $\partial V_{гр}/\partial\omega = 0$ [8, 9]. Пользуясь этим определением, на основании данных, представленных на рис. 2, можно найти каустику, которая, естественно, совпадает с изображенной на рис. 3.

В заключение укажем, что источник массы или энергии, находясь вблизи границы раздела двух сред, возбуждает также поверхностные волны. Соответствующая задача будет рассмотрена в другой работе авторов.

Литература

1. Гинзбург В.Л., Франк И.М. – ЖЭТФ, 1945, т. 16, в. 1, с. 15.

2. Докучаев В.П. – ЖЭТФ, 1962, т. 43, в. 2(8), с. 595.

3. Григорьев Г.И., Докучаев В.П. – Изв. АН СССР, ФАО, 1970, т. 6, № 7, с. 678.

4. Григорьев Г.И., Савина О.Н. – Изв. вузов – Радиофизика, 1982 (в печати).

5. Pierce A.D.–J.Acoust.Soc.Am.,1963,v.35,N11, p.1798.

6. Liu C.H.,Yeh K.C.–Tellus,1971,v.23,N2,p.150.

7. Francis S.H.–J.Atm.Terr.Phys.,1975,v.37, p.1011.

8. Tolstoy I.Wave propagation.McGraw-Hill,1973, p.292–294.

9. Cole J.D.,Greifinger C.–J.Geophys.Res.,1969, v.74,N14,p.3693.

Дата поступления
статьи 21 июня 1982 г.

Геннадий Иванович Григорьев

Ольга Николаевна Савина

ПЕРЕХОДНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ АКУСТИКО-ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН

Подписано в печать 15.07.82 г. МЦ 00678. Формат 60х84/16
Бумага множительная. Печать офсетная. Объем 0,99 усл.печ.л.
Тираж 120. Заказ 2824. Бесплатно

Горьковский ордена Трудового Красного Знамени научно-исследовательский радиофизический институт, 603600, Горький, ГСП-51, ул.Лядова, 25/14, т. 38-90-91, д. 5-09

Отпечатано на ротапринте НИРФИ