Министерство высшего и среднего специального образования
Р С Ф С Р

Ордена Трудового Красного Знамени
научно-исследовательский радиофизический институт (НИРФИ)

Препринт № 157

О ПРИРОДЕ И СТАТИСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ $1/f$ - ШУМА

Ю.Е.Кузовлев

Г.Н.Бочков

Горький 1982

УДК 536.75

Показано, что термодинамически равновесное броуновское движение носителей заряда всегда сопровождается низкочастотными флуктуациями коэффициента диффузии носителей и мощности "белого" шума среды, причем корреляционная функция флуктуаций затухает по логарифмическому закону $\left(\ln \frac{t}{\tau_0}\right)^{-1}$, а спектр относится к типу $\frac{1}{\omega}$. Такие же флуктуации испытывает проводимость и ток в неравновесном состоянии (во внешнем поле). Показано, что эти флуктуации не связаны с какими-либо специфически медленными процессами (и макроскопическими временами релаксации). Статистические характеристики $1/f$-шума целиком определяются микроскопическими параметрами "быстрого" случайного движения носителей. Спектр $1/f$ -типа отражает отсутствие долгоживущих корреляций при этом случайном движении.

Исчерпывающие сведения о спектре и величине $1/f$ -шума содержатся в четвертом кумулянте равновесных флуктуаций тока.

Предложенная теория дает согласующуюся с опытом оценку интенсивности $1/f$ -шума и объясняет происхождение эмпирической "константы Хоухе".

СОДЕРЖАНИЕ

1. ВВЕДЕНИЕ

1. Экспериментальные данные и эмпирические соотношения

Перенос заряда в различных средах и системах сопровождается своеобразным низкочастотным электрическим шумом, – так называемым избыточным шумом, или фликкер-шумом, – который известен почти так же давно, как обычный белый шум, но до сих пор не получил теоретического объяснения.

Удивительная отличительная особенность фликкер-шума заключается в том, что его спектральная плотность мощности быстро возрастает с уменьшением частоты, приблизительно по степенному закону $\omega^{-\alpha}$, и вплоть до минимальных доступных измерению частот $\sim 10^{-6} \div 10^{-7}$ Гц не обнаруживает тенденции к насыщению. Чаще всего показатель степени приблизительно равен единице, $\alpha \approx 1$, при этом говорят о $1/f$-шуме.

Интенсивность фликкерных флуктуаций электрического тока $J(t)$ или напряжения в слабо неравновесном состоянии (в области омического сопротивления) пропорциональна квадрату среднего тока, поэтому фликкер-шум обычно рассматривается как результат флуктуаций проводимости или сопротивления. Основные закономерности токового $1/f$-шума в однородных проводящих средах отражаются приближенной эмпирической "формулой Хоухе" (см. подробные обзоры [1-2]):

$$S_J(\omega) = \bar{J}^2 \frac{2\pi a}{N|\omega|} . \qquad (1.1)$$

Здесь $S_J(\omega)$ – спектральная плотность фликкерных флуктуаций тока, $\bar{J}$ – средний ток, N – число носителей заряда в шумящем образце среды, a – безразмерная величина.

Формула (1.1) отражает еще одно удивительное свойство $1/f$-шума: независимость его спектрального состава от геометрических размеров системы, "нульмерность" $1/f$-шума. Заметим, что в этом смысле он подобен белому шуму.

Формула (1.1) в основном удовлетворительно описывает $1/f$-шум в полупроводниках, твердых и жидких металлах, электролитах [1]. В случае полупроводников величина a практически не зависит от температуры T и числа N. Последнее указывает на статистическую независимость вкладов отдельных носителей в $1/f$-шум. Интересно, что для различных собственных (слабо легированных) полупроводников величина a имеет один и тот же порядок, $a \sim 0{,}001$ (впервые это было отмечено Хоухе [3]). При достаточно высоких температурах значения $a \sim 0{,}001$–$0{,}01$ характерны также для металлов, хотя здесь a зависит от T [1]. В электролитах также $a \sim 0{,}001$.

Имеются три сорта существенных отклонений уровня $1/f$-шума от того, который соответствует $a \sim 10^{-3}$. В сильно легированных полупроводниках шум намного меньше. Здесь, согласно Вандамму и Хоухе, $a \approx 10^{-3}(\mu/\mu_0)$, где μ – подвижность носителей, μ_0 – их подвижность в чистом материале. В неоднородных системах (к которым, видимо, нужно отнести также очень тонкие пленки и нити) шум может быть намного больше. В металлах при сравнительно низких температурах наблюдается "температурный" $1/f$-шум [1, 2, 4, 5]. Он характеризуется тем, что a зависит от температурного коэффициента проводимости и от теплового контакта образца с окружением. По-видимому, как отмечено в [5], шум в металлах представляет собой суперпозицию этого "температурного" шума и описанного выше шума, преобладающего при больших T ($T \gtrsim 150^\circ$K).

Вообще, картина фликкер-шума в металлах выглядит гораздо сложнее, чем в полупроводниках. В ряде случаев измеренные спектры имеют показатель α, существенно отличающийся от единицы ($0{,}8 \lesssim \alpha \lesssim 1{,}2$), так что формула (1.1) оказывается слишком грубой.

2. Корреляционные эксперименты. "Нульмерность" $1/f$ -шума

"Нульмерность" $1/f$ -шума ярко проявляется в так называемых корреляционных экспериментах: малые соседние области одного и того же проводящего образца дают некоррелированные вклады в его $1/f$ -шум. Это кажется поразительным. Ведь речь идет о чрезвычайно медленных, в микроскопической шкале времени, флуктуациях. Действительно, спектр $1/f$ -типа можно разложить в сумму лоренцианов,

$$\frac{1}{\omega} \longrightarrow \frac{2}{\pi} \int\limits_{\Omega_0}^{\infty} \frac{d\Omega}{\omega^2+\Omega^2} = \frac{1}{\omega}\,\frac{2}{\pi}\,\mathrm{arctg}\frac{\omega}{\Omega_0},$$

где, как отмечалось, $2\pi/\Omega_0 > 10^6$ с. Предположим, что каждому лоренциану отвечает некая реальная флуктуационная мода со временем релаксации $2\pi/\Omega$. Трудно вообразить такой механизм флуктуаций, который был бы пространственно локальным, но приводил при этом к временам вплоть до 10^6 с (и более).

Однако "температурный" $1/f$ -шум в металлах обнаруживает пространственные корреляции [4]. Восс и Кларк в [4] заключили отсюда, что он вызван просто термодинамическими флуктуациями температуры, "модулирующими" проводимость. Сейчас можно утверждать, что это заключение оказалось неверным. Согласующаяся с принципами статистической термодинамики теория флуктуаций температуры не приводит к спектру $1/f$ -типа [1, 2, 4]. В то же время несомненно, что "температурный" $1/f$ -шум тесно связан с тепловыми процессами.

Можно понять запутанность ситуации с металлами. В металле электроны не только переносят заряд, но и являются главными переносчиками тепла, так что электрические и тепловые процессы переплетены.

3. Термодинамически равновесный $1/f$ -шум и четвертый кумулянт флуктуаций тока

Накопленные экспериментальные данные свидетельствуют о том, что $1/f$ -шум имеет термодинамически равновесную природу [1, 2]. Это принципиально важное обстоятельство означает, что неизвестные физические процессы, ответственные за $1/f$ -шум, происходят и в равновесном состоянии, хотя и не проявляются в корреляционной функции и спектре равновесных флуктуаций тока или э.д.с.

Однако в чем-то эти процессы должны проявляться даже в равновесном случае. Нетрудно догадаться, что они должны привести к фликкерным флуктуациям интенсивности равновесного белого шума $S(t)$. На это указывает хотя бы формула Найквиста: $S = 2Tg$, если интерпретировать $1/f$ -шум как следствие флуктуаций проводимости $g(t)$. Восс и Кларк измерили флуктуации мощности белого шума в равновесной металлической пленке и действительно обнаружили, что они имеют спектр $1/f$ -типа [4]. Это явление также можно назвать $1/f$ -шумом (равновесным уже в самом буквальном смысле). При отклонении системы от равновесия во внешнем поле он трансформируется во флуктуации тока (а также напряжения), которые будем называть далее токовым $1/f$-шумом.

Подчеркнем, что флуктуирующая мощность $S(t)$ - это, в отличие от $J(t)$, сугубо феноменологическая характеристика шума. Тогда как $J(t)$ всегда можно записать в виде функции микроскопических динамических переменных системы, $S(t)$ нельзя выразить на динамическом языке ни через эти переменные, ни через флуктуации термодинамических величин: температуры, химпотенциала и т.п., - характеризующих квазиравновесные состояния системы. Дело в том, что мощность (спектральная плотность) белого шума - кинетическая величина. Ее определение должно включать статистическое усреднение по ансамблю и к тому же интегрирование (усреднение) по времени. Но таким образом можно строго ввести только среднее значение+ $\langle S(t)\rangle_0 \equiv S_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \langle J(t)J(0)\rangle_0 dt$,

---

+Значок "0" у угловых скобок показывает, что усреднение ведется по равновесному ансамблю.

флуктуации же $S(t)$ не имеют четко определенного динамического смысла. Сказанное относится и к флуктуациям проводимости $g(t)$ и других кинетических величин.

Как же тогда строго описывать флуктуации мощности и проводимости? Очень просто. Поскольку $\langle S(t)\rangle_0$ связана с квадратичными по току (или напряжению) величинами, то флуктуациям $S(t)$ соответствуют статистические моменты тока четвертого (и более высокого) порядка.

Таким образом, нужно рассмотреть четвертый момент флуктуаций тока:

$$\langle J(t_1)J(t_2)J(t_3)J(t_4)\rangle_0 = \langle J(t_1)J(t_2)\rangle_0\langle J(t_3)J(t_4)\rangle_0 +$$
$$+\langle J(t_1)J(t_3)\rangle_0\langle J(t_2)J(t_4)\rangle_0 + \langle J(t_1)J(t_4)\rangle_0\langle J(t_2)J(t_3)\rangle_0 +$$
$$+\langle J(t_1), J(t_2), J(t_3), J(t_4)\rangle_0 , \qquad (1.2)$$

для которого всегда имеется строгое динамическое выражение. Скобка с запятыми внутри справа в (1.2) – это четвертый кумулянт тока. Равенство (1.2) – это известное общее кумулянтное разложение четвертого момента с учетом $\langle J(t)\rangle_0=0$.

Подчеркнем, что информация о флуктуациях мощности и равновесном $1/f$ -шуме сидит именно в последнем члене (1.2), в четвертом кумулянте, который характеризует негауссовость флуктуаций тока. Равновесная корреляционная функция белого шума $\langle J(t_1)J(t_2)\rangle_0$ микроскопически быстро затухает при увеличении $|t_1-t_2|$. Поэтому низкочастотные процессы находят отражение только в последнем члене (1.2).

Отсюда следует важный вывод, что при статистическом описании $1/f$ -шума совершенно необходимо учитывать негауссовость флуктуаций тока (даже если она очень слаба в том или ином смысле)+. Разумеется, не только ток, но и любой другой физический случайный процесс всегда в какой-то ме-

---

+ Заметим, что, например, гауссовский шум со случайно изменяющейся интенсивностью · негауссовский случайный процесс. Об анализе негауссовости шума см. также: Nelkin.M., TremblayA.M.S.–J.Stat.Phys.,1981,v.25,p.253.

ре негауссов. Здесь мы сталкиваемся с ситуацией, когда это обстоятельство имеет принципиальное значение.

4. Флуктуации подвижности носителей

Ряд авторов приходит, на основе анализа экспериментов, к выводу, что основной источник $1/f$ -шума – это флуктуации подвижности носителей [1, 2, 6]. Формула Хоухе (1) получается, если предположить, что подвижности отдельных носителей $\mu(t)$ флуктуируют, статистически независимо друг от друга, со спектром

$$S_{\mu}(\omega)=\frac{2\pi a}{|\omega|}\mu^2, \tag{1.3}$$

где μ – средняя подвижность, $a \approx 10^{-3}$. Эта модель позволяет эмпирически описать $1/f$-шум также в неоднородных структурах: в различных контактах, в $p-n$ -переходах и других полупроводниковых приборах (и, видимо, при электронной эмиссии), причем даже в неомическом режиме [1]. $1/f$ -шум здесь, как можно предположить, возникает вследствие флуктуаций потока носителей на структурный переход из-за флуктуаций подвижности.

В применении к полупроводникам с гипотезой флуктуаций подвижности в ряде случаев конкурирует гипотеза флуктуаций числа носителей из-за медленных туннельных переходов в поверхностные состояния и обратно [1, 2, 7]. В этой модели просто, как сумма лоренцианов, получается спектр $1/f$-типа (правда, насыщающийся на очень низких частотах), но не удается сделать численные оценки. Этой модели противоречит наблюдаемый объемный характер $1/f$-шума. Кроме того, специальные эксперименты с горячими носителями также свидетельствуют в пользу гипотезы флуктуаций подвижности [6].

Естественно возникает вопрос о физической причине фликкерных флуктуаций подвижности. Если приписать причину каким-то медленным процессам в кристаллической решетке (например, флуктуациям числа фононов, как предположено в [1]), то флуктуации подвижности различных носителей должны бы быть коррелированы друг с другом. Но эксперименты говорят об обратном. Если же принять, что корреляция между носителями отсутствует, то возникает известный парадокс "нульмерности": почему вообще наблюдаются фликкерные корреляции намного более долгие, чем среднее время пребывания носителей заряда в малом образце? (Получается так, что носитель покинул образец, а корреляция, приводящая к фликкер-шуму, осталась). До сих пор в литературе не предложено никакого механизма флуктуаций подвижности. Очевидно, что данный парадокс сильно усложняет задачу.

5. Принципиальные положения работы. $1/f$-шум – результат отсутствия долгоживущих корреляций

Несмотря на многолетние экспериментальные исследования и массу попыток теоретического осмысления, $1/f$-шум все еще остается загадкой [1, 2]. Это тем более странно, что в других отношениях изучаемые системы не проявляют загадочных эффектов, которые можно было бы связать с $1/f$-шумом.

Усилия различных исследователей неизменно направляются либо на поиск каких-то новых "медленных" физических механизмов, которые привели бы к широкому набору очень больших времен релаксации (или времен корреляции, "времен жизни" и т.п.) и фликкерному спектру флуктуаций проводимости, либо на "апробацию" в этом смысле уже известных механизмов, таких, например, как флуктуации температуры и плотности числа носителей (см., например, [2, 4, 8–11]). Такой путь не привел к успеху.

В настоящей работе предлагается и обосновывается прямо противоположный подход к проблеме $1/f$-шума, позволяющий объяснить этот физический феномен. Показывается, что $1/f$-шум может быть связан как раз с отсутствием макроскопически больших времен релаксации и порождаться не какими-либо специфически медленными процессами, но самим броуновским движением носителей заряда, т.е. исключительно теми же "быстрыми" микроскопическими процессами, которые порождают диффузию и белый шум.

Мы показываем, что броуновское движение (диффузия) носителей всегда сопровождается фликкерными флуктуациями коэффициента диффузии и подвижности (мощности белого шума и проводимости), причем эти флуктуации естественно и неизбежно возникают в ходе диффузии при любом ее конкретном микроскопическом механизме, а не вызваны какими-то медленными возмущениями (например, случайными изменениями термодинамических условий диффузии). Излагаемая ниже теория не только дает спектр $1/f$-типа, но и приводит к правильной оценке величины $1/f$-шума и объясняет происхождение эмпирической "константы Хоухе", $\alpha \sim 10^{-3}$.

Ключевая, принципиальная идея нашего подхода состоит в том, что спектр $1/f$-типа представляет собой не следствие реальных долгоживущих корреляций, но, наоборот, результат отсутствия долгих корреляций, безразличия системы по отношению к случайным отклонениям "быстроты" диффузии носителя от среднего режима. Такое отклонение не подавляется возвращающими силами, поскольку его единственный результат – простое пространственное перемещение носителя, т.е. переход системы в состояние, тождественное исходному в термодинамическом смысле.

Этим и объясняются, видимо, наблюдаемые (см. выше) флуктуации подвижности. Сформулированная идея приводит также к разрешению "парадокса нульмерности". Поскольку в действительности в движении носителей нет никаких долгоживущих корреляций (нет долгой памяти о прошлом), то, конечно, не может быть и разрушения корреляций[+] при смене одних носителей другими в малом "шумящем" образце (аналогично, процессы генерации – рекомбинации носителей не влияют на $1/f$-шум).

[+]Понятно, что вообще безразличие системы к некоторым спонтанным отклонениям и их накопление во времени (в нашем случае – броуновское перемещение носителя) можно формально трактовать и как отсутствие корреляций, и как наличие бесконечно долгих корреляций, хотя физически правильно первое утверждение. Формальную (но не по существу!) аналогию дает сверхпроводник с незатухающим током.

2. БРОУНОВСКОЕ ДВИЖЕНИЕ И РАВНОВЕСНЫЙ 1/f-ШУМ. ФЛУКТУАЦИИ МОЩНОСТИ БЕЛОГО ШУМА

1. Феноменологическое описание флуктуаций тока

Рассмотрим следующую простую физическую ситуацию. Возьмем образец проводящей среды и электрически закоротим его, замкнем в кольцо. Нас интересуют термодинамически равновесные флуктуации электрического тока $J(t)$ в этой замкнутой цепи. Будем считать, что среда статистически однородна, а также, что носители движутся статистически независимо друг от друга (это обычно отвечает реальной ситуации в полупроводниках). Тогда достаточно рассмотреть случайное блуждание отдельного носителя вдоль кольцевой цепи.

Обозначим через $v(t)$ случайную скорость носителя вдоль цепи (таким образом, $v(t)$ будет скаляром), через

$$r(t) = \int_0^t v(t')dt' \qquad (2.1)$$

– его смещение за время t. Отметим, что в $r(t)$ "засчитывается" (со знаком плюс или минус), согласно (1), каждый полный оборот вокруг цепи. Так же будем понимать смещение $r(t)$ при переносе заряда не свободными, а локализованными носителями (прыжковая проводимость), когда $v(t)$ – менее естественная характеристика движения. Данное определение $r(t)$ удобно в том отношении, что в стационарном состоянии $r(t)$ является случайным процессом с однородными приращениями (поскольку $v(t)$ – стационарный процесс). Иначе говоря, смещение $r(t)$ – процесс неограниченной диффузии, хотя рассматриваемая система, по существу, ограничена и конечна. Сразу подчеркнем, что последующие результаты совершенно не зависят от размеров системы (длины кольца).

Разумеется, $v(t)$ – всегда в той или иной мере негауссовский процесс. Простейшая, обычно используемая модель диффузии игнорирует этот очевидный физический факт и предполагает $v(t)$ и $r(t)$ гауссовскими. Это оправдано при рассмотрении флуктуаций плотности числа носителей (их и имеют в виду в литературе, когда говорят о "диффузионном шуме", "диффузионных механизмах" и т.п.), но не при анализе электрического шума, вызванного случайным блужданием носителей (в нашей системе полное число "шумящих" носителей не меняется при диффузии). Мы уже отмечали, в частности, что в гауссовской модели интенсивность шума априори считается постоянной.

Полная статистическая информация о флуктуациях $r(t)$, $v(t)$, $J(t)$ в стационарном равновесном состоянии содержится в характеристических функциях (ХФ)

$$\theta_t(ik) \equiv \langle e^{ikr(t)} \rangle_0 ; \tag{2.2}$$

$$\theta_t(iu) \equiv \langle e^{iuQ(t)} \rangle_0 , \quad Q(t) \equiv \int_0^t J(t')\,dt' , \tag{2.3}$$

здесь k, u – произвольные пробные параметры. Подчеркнем, что в принципе всегда можно дать строгое микроскопическое выражение для этих объектов, поэтому использование ХФ само по себе не связано с какими-либо приближениями. Однако практически не обойтись без упрощающих предположений, приводящих к некоторой достаточно простой стохастической модели.

В гауссовской модели, как известно,

$$\theta_t(ik) = e^{-Dk^2 t} , \quad \theta_t(iu) = e^{-\frac{1}{2} S u^2 t} , \tag{2.4}$$

где D – коэффициент диффузии, S – спектральная плотность равновесного токового шума на нулевой частоте. Здесь предположено, что $t \gg \tau_\mu$, где τ_μ – время корреляции равновесного шума. Более аккуратная запись (4) дается с помощью функций

$$\Delta_t(ik) \equiv \frac{1}{t} \ln \langle e^{ikr(t)} \rangle_0 = \frac{1}{t} \ln \theta_t(ik) , \tag{2.5}$$

$$\Delta_\infty(ik) \equiv \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \langle e^{ikr(t,}\rangle_0$$

и аналогично для тока. Тогда в гауссовской модели

$$\Delta_\infty(ik) = -Dk^2. \qquad (2.6)$$

Плотность вероятностного распределения смещения $r(t)$,

$$W_t(r) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikr}\,\theta_t(ik)\,dk, \qquad (2.7)$$

имеет в этой модели при $t \gg \tau_\mu$ вид

$$W_t(r) = (4\pi D t)^{1/2} \exp\left(-\frac{r^2}{4Dt}\right). \qquad (2.8)$$

Рассмотрим теперь негауссовскую модель, в которой учитываются флуктуации интенсивности токового шума. Само понятие таких флуктуаций имеет смысл только тогда, когда они являются очень медленными в масштабе τ_μ. Поэтому для их феноменологического описания необходимо использовать модель, в которой $v(t)$ рассматривается как гауссовский белый шум со случайно "модулированной" интенсивностью $2D(t)$ (после чего он становится негауссовским). В такой модели по определению

$$\langle \exp\left\{\int_0^t ik(t')v(t')dt'\right\}\rangle_0 = \langle \exp\left\{-\int_0^t D(t')k^2(t')dt'\right\}\rangle_0' =$$

$$= \exp\left\{-D\int_0^t k^2(t')dt' + \frac{1}{2}\int_0^t\int \mathcal{K}_D(t'-t'')k^2(t')k^2(t'')dt'dt'' - \ldots\right\} \qquad (2.9)$$

где первое равенство соответствует усреднению по белому шуму при фиксированной функции $D(t)$, скобка $\langle\ldots\rangle_0'$ обозначает усреднение по флуктуациям $D(t)$, $D = \langle D(t')\rangle_0'$,
$\mathcal{K}(t'-t'') \equiv \langle D(t')D(t'')\rangle_0' - D^2 \equiv \langle D(t'), D(t'')\rangle_0$
– корреляционная функция флуктуаций коэффициента диффузии

$D(t)$, $K(t)$ – произвольная пробная функция; многочлем заменен вклад в ХФ от высших кумулянтов флуктуаций $D(t)$.

С другой стороны, имеется общее точное разложение логарифма ХФ (9) в ряд по кумулянтам скорости $v(t)$:

$$\left\langle \exp\left\{ \int_0^t i\kappa(t')v(t')dt' \right\} \right\rangle_0 =$$

$$= \exp\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int_0^t \langle v(t_1),\dots,v(t_n)\rangle_0 \kappa(t_1)\dots\kappa(t_n)dt_1\dots dt_n \right\} \tag{2.10}$$

Фактически это определение кумулянтов [13, 14]. В равновесии $\langle v(t)\rangle_0 = 0$. Приравнивая (9) и (10), можно вследствие произвольности $\kappa(t)$, получить для четвертого кумулянта скорости выражение

$$\begin{aligned}\langle v(t_1),v(t_2),v(t_3),v(t_4)\rangle &= 4\delta(t_1-t_2)\delta(t_3-t_4)\mathcal{K}_D(t_1-t_3)+\\ &+4\delta(t_1-t_3)\delta(t_2-t_4)\mathcal{K}_D(t_1-t_4)+\\ &+4\delta(t_1-t_4)\delta(t_2-t_3)\mathcal{K}_D(t_1-t_2).\end{aligned} \tag{2.11}$$

Отсюда находим (с учетом $\int_0^\infty \delta(t)\,dt = 1/2$)

$$\int_0^t\!\!\int \langle v(t),v(t'),v(t''),v(0)\rangle_0\, dt'dt'' = 2\mathcal{K}_D(t). \tag{2.12}$$

Понятно, что в аналогичной модели флуктуаций тока $J(t)$ для четвертого кумулянта $J(t)$, фигурирующего в (1.2), получим равенство

$$\int_0^t\!\!\int \langle J(t),J(t'),J(t''),J(0)\rangle_0\, dt'dt'' = \frac{1}{2}\mathcal{K}_S(t), \tag{2.13}$$

где $\mathcal{K}_S(t)$ – корреляционная функция флуктуаций мощности равновесного белого шума $S(t)$.

2. Негауссовское случайное блуждание. Характеристическая функция смещения

Рассмотрим ХФ (2). Ее логарифм (5) для краткости также будем называть ХФ. Разложим ХФ (5) в ряд по ik:

$$\Delta_t(ik) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(ik)^{2m}}{2m!} D_{2m}(t). \qquad (2.14)$$

Мы учли, что, вследствие инвариантности законов микродинамики относительно обращения времени, равновесное броуновское движение пространственно симметрично. Поэтому в (14) фигурируют только члены четного по ik порядка. Из теории вероятностей известно, что количество ненулевых членов ряда (14) всегда бесконечно. Единственное исключение - это "гауссовский" случай, когда все $D_n(t) = 0$ при $n \geqslant 3$.

Согласно (1), (5), (10),

$$D_n(t) = \frac{1}{t}\int_0^t \langle v(t_1), \ldots, v(t_n)\rangle_0 \, dt_1' \ldots dt_n . \qquad (2.15)$$

Пусть время наблюдения $t \gg \tau_\mu$. Тогда $D_2(t) = 2D$, где D - коэффициент диффузии. Предположим, что высшие корреляторы (кумулянты) скорости достаточно быстро затухают при $|t_i - t_j| \to \infty$. В таком случае в (14), (15) существуют пределы $D_n \equiv \lim_{t\to\infty} D_n(t)$. Величина D_n $(n \geqslant 3)$ - это значение полиспектра скорости n-го порядка на нулевой частоте, ее можно назвать также "негауссовским" коэффициентом диффузии n-го порядка. Из (5), (14) имеем

$$\Delta_\infty(ik) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(ik)^{2m}}{2m!} D_{2m} = -Dk^2 + D_4 \frac{k^4}{24} - \ldots \qquad (2.16)$$

Если же высшие корреляторы скорости по какой-либо причине медленно затухают при раздвижении временных аргументов, то коэффициенты диффузии D_n $(n \geqslant 4)$ могут оказаться бесконечными. Это означает, что ХФ (16) является неаналитической функцией iK. В подобном случае удобно воспользоваться интегральным представлением ХФ [12]:

$$\Delta_\infty(iK) = \int_{-\infty}^{\infty} (\cos Kr - 1) \frac{2D}{r^2} G(r)\, dr . \tag{2.17}$$

Множитель $2D$ здесь выделен из соображений размерности. Из (14), (15) видно, что $G(r) = G(-r)$, и

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(r)\, dr = 1 . \tag{2.18}$$

По существу, (17) – это вариант преобразования Фурье (с учетом того, что $\Delta_\infty(0) = 0$).

В теории вероятностей предельный переход $\tau_\mu / t \to 0$, аналогичный рассмотренному, совершается иным, более формальным образом. Здесь t остается конечным, но τ_μ устремляется к нулю. Результатом является некоторый "броуновский" процесс с безгранично делимыми приращениями, т.е. с независимыми приращениями [12]. Интегральное представление (17) называется представлением Леви–Хинчина. Фундаментальная теорема теории вероятностей утверждает, что ядро $G(r)$ всегда неотрицательно, $G(r) \geq 0$, что и означает безграничную делимость. В остальном эта функция произвольна (лишь бы интеграл (17) сходился).

Гауссовская диффузия, когда $D_n = 0$ ($n \geq 3$), представляет собой единственный особый, вырожденный случай и соответствует ядру $G(r) = \delta(r)$.

При "физическом" предельном переходе, когда t растет, а τ_μ фиксировано, предел ХФ (10) не обязан, вообще говоря, соответствовать безгранично делимому распределению, а $G(r)$ – быть строго неотрицательной. Однако практически в разнообразных физических задачах приращения $r(t)$ $Q(t)$ и т.д. при больших t обладают асимптотическим свойством безграничной делимости (даже при наличии медленно затухающих, неинтегрируемых, корреляций; см. пример в [15]).

ХФ (16) содержит полную информацию о крупномасштабных характеристиках случайного блуждания, рассматриваемого в грубой макроскопической шкале времени. Соответствующее приближенное выражение для вероятностного распределения $r(t)$ получается из (7) заменой $\theta_t(ik) \longrightarrow \exp(t\Delta_\infty(ik))$. При $t \to \infty$, $k \to 0$ основную роль играет первый член разложения (16), т.е. диффузия является асимптотически гауссовской.

3. Масштабная инвариантность реального броуновского движения ($r^2 \sim t$).

Рассматриваемое броуновское движение представляет собой физический процесс, происходящий в термодинамической системе и в равновесном состоянии. Как и другие термодинамические явления, этот процесс не должен зависеть (на масштабах, больших, чем характерные микроскопические масштабы) от детальной структуры микроскопических взаимодействий. Следовательно, он должен обладать некоторой пространственно-временной масштабной инвариантностью. Явное указание на вид этой масштабной инвариантности дает размерность коэффициента диффузии D –макропараметра, определяющего крупномасштабные свойства броуновского движения (и характерный закон диффузии $\langle r^2(t)\rangle_0 = 2Dt$). Другой, соперничающий в этом смысле с D, параметр мог бы появиться лишь при наличии каких-то медленных физических процессов, существенно влияющих на статистическую структуру диффузии.

Будем считать, что подобных медленных процессов в нашей системе нет. Тогда единственными дополнительными к D параметрами, которые задают вместе с D весь набор статистических характеристик диффузии $\{D_n(t)\}$, являются микроскопические величины, описывающие "быстрое" взаимодействие носителя со средой. Это означает, что масштабной инвариантностью, зафиксированной в "среднем" законе диффузии $\langle r^2(t)\rangle_0 = 2Dt$, обладает также статистическая картина броуновского движения в целом. Иначе говоря, она будет выглядеть по прежнему, если масштаб длины изменить в λ раз, а масштаб времени – в λ^2 раз ($r^2 \sim t$).

Математически это утверждение формулируется, как нетрудно увидеть из (5), следующим образом:

$$\lambda^2 \Delta_{\lambda^2 t}\left(\frac{ik}{\lambda}\right) = \Delta_t(ik), \tag{2.19}$$

при достаточно большом t и малом $|k|$, и

$$\lambda^2 \Delta_\infty\left(\frac{ik}{\lambda}\right) = \Delta_\infty(ik). \tag{2.20}$$

Далее мы покажем, что такое масштабно инвариантное (на больших масштабах) броуновское движение реализуется посредством фликкерных флуктуаций коэффициента диффузии (интенсивности движения), со спектром $1/f$-типа.

4. $1/f$-шум как естественный атрибут диффузии. Спонтанные флуктуации коэффициента диффузии. Логарифмически затухающие корреляции

Рассмотрим сначала соотношение (20). Подставляя (17) в (20) и делая замену переменных в интеграле, получим

$$\lambda G(\lambda r) = G(r).$$

Это функциональное уравнение имеет два решения:

$$G(r) = \delta(r), \qquad G(r) = \frac{A}{|r|}, \tag{2.21}$$

где A = const. Первая возможность дает ХФ (6), т.е. ведет к идеальной гауссовской диффузии, которой в природе не существует. Поэтому рассмотрим вторую возможность.

Выбор второго из решений (21) приводит к расходимости интеграла в (17) при $r \to 0$. Это означает, что масштабная инвариантность не может быть полной, т.е. должна нарушаться на малых (микроскопических) масштабах, что очевидно с физической точки зрения. Следовательно, нужно обрезать интеграл при $r \to \infty$, например, положив

$$G(r)=\frac{A}{|r|+r_0} \tag{2.22}$$

(из дальнейшего будет ясно, что выбор способа обрезания не играет существенной роли). Тем самым вводится характерный пространственный микромасштаб r_0. Он не может быть меньше, чем средняя длина свободного пробега (в случае свободных носителей) или средний шаг при прыжковой проводимости.

Подставляя (22) в (17), получаем при $K^2 r_0^2 \ll 1$ (что соответствует большим, по сравнению с r_0, масштабам)

$$\Delta_\infty(ik)\approx -DK^2 A \ln\frac{1}{r_0^2 K^2}\,. \tag{2.23}$$

Неаналитичность этой функции свидетельствует о наличии неинтегрируемых долгоживущих высших корреляций $\upsilon(t)$. Неприятно, однако, то, что функция (22) не удовлетворяет необходимому условию (18), и поэтому в (23) отсутствует квадратичный по ik член. Это отражение того обстоятельства, что на очень больших временных масштабах инвариантность также должна нарушаться, поскольку любое наблюдение за процессом диффузии занимает конечное время.

Следовательно, нужно вернуться к ХФ (5) для конечного времени и проанализировать ее с помощью соотношения (19). Для этого воспользуемся аналогичным (17) представлением:

$$\Delta_t(ik)=\int_{-\infty}^{\infty}(\cos kr-1)\frac{2D}{r^2}G(r,t)\,dr\,; \tag{2.24}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}G(r,t)\,dr=1. \tag{2.25}$$

При $t\to\infty$ функция $G(r,t)$ должна переходить в (22) (однако уже с коэффициентом A, зависящим от t вследствие условия (25)). Условие (25) означает, что при $K\to 0$, (и $t\gg\tau_\mu$) ХФ (24) стремится к выражению $(-DK^2)$, т.е. является асимптотически гауссовской. Из этих соображений и из (19), (24) следует, как можно убедиться, что ядро представления (24) имеет следующий вид:

$$G(r,t)=\frac{A(t)}{|r|+r_0}F\left(\frac{r^2}{4D't}\right), \qquad (2.26)$$

где D' – константа с размерностью коэффициента диффузии, $A(t)$ определяется условием нормировки (25), функция $F(z)$ удовлетворяет требованиям

$$F(0)=1, \quad F(z)\rightarrow 0 \text{ при } z\rightarrow\infty, \quad \int_0^\infty F(z)dz=1 \qquad (2.27)$$

(их всегда можно предъявить, благодаря явному выделению параметров A, D'). С учетом (27) из (25) находим, что, независимо от конкретного вида $F(z)$,

$$A(t)=\left\{\int_{-\infty}^{\infty}F\left(\frac{r^2}{4D't}\right)\frac{dr}{|r|+r_0}\right\}^{-1}\approx\left(\ln\frac{t}{\tau_0}\right)^{-1} \qquad (2.28)$$

при $t \gg \tau_0$. Здесь появился некоторый временной микроскопический масштаб диффузии:

$$\tau_0=\frac{r_0^2}{2D'}. \qquad (2.29)$$

Подставим теперь (26), (28) в (24) и рассмотрим первые два члена разложения (14):

$$\Delta_t(ik)=-Dk^2+\frac{1}{3}DD'k^4tA(t)-\ldots;$$

$$D_4(t)=8DD'tA(t). \qquad (2.30)$$

Второй член в (30) содержит информацию о флуктуациях ко–

эффициента диффузии $D(t)$. Действительно, из феноменологических соотношений (11), (12) и определения (15) вытекает соотношение

$$\frac{d^2}{dt^2}\, t\, D_4(t) = 24\, \mathcal{K}_D(t), \tag{2.31}$$

сравнение же (30) и (31) дает (при $t \gg \tau_0$)

$$\mathcal{K}_D(t) = \frac{1}{3} DD' \frac{d^2}{dt^2}\, t^2 \left(\ln\frac{t}{\tau_0}\right)^{-1} \approx \frac{2}{3} DD' \left(\ln\frac{t}{\tau_0}\right)^{-1} \tag{2.32}$$

– корреляционная функция флуктуаций коэффициента диффузии затухает по логарифмическому закону. Из соображений размерности сразу видно, что соответствующий спектр относится к $1/f$ –типу.

Эти фликкерные флуктуации являются, таким образом, естественным свойством реального броуновского движения (которое неизбежно должно становиться макроскопически масштабно-инвариантным, когда все микромасштабы "остаются позади").

Интересно отметить, что эти флуктуации очень слабо сказываются на форме вероятностного распределения смещения (7). Как показывает несложный анализ (24), (26), при $t/\tau_0 \gg 1$, $K^2 r_0^2 \ll 1$ ХФ (24) имеет приблизительно универсальный вид

$$\Delta_t(iK) \approx \frac{DK^2}{\ln\frac{t}{\tau_0}} \ln\left(r_0^2 K^2 + c\,\frac{\tau_0}{t}\right), \tag{2.33}$$

где C – величина порядка единицы. ХФ (33) весьма слабо отличается от идеальной гауссовской (6), хотя коэффициенты ее разложения в ряд (14) неограниченно растут со временем. Соответственно разница между распределением (7), соответствующим (33), и гауссовским колоколом (8) прак –

тически незаметна. Иначе говоря, фликкерные флуктуации $D(t)$ не искажают среднюю картину диффузии. Если "выпустить" из одной точки ансамбль броуновских частиц, то закон расплывания ансамбля (изменения плотности числа частиц) почти не отличается от гауссовского колокола (8). Более того, можно показать, что флуктуации $D(t)$ практически не влияют на (равновесные) флуктуации плотности числа частиц, так что последние могут быть прекрасно описаны обычной "идеально гауссовской" моделью диффузии.

5. Спектр флуктуаций коэффициента диффузии. Количественные оценки. Происхождение "константы Хоухе"

Рассмотрим спектральную плотность (относительных) фликкерных флуктуаций коэффициента диффузии

$$S_{\delta D}(\omega) \equiv \frac{S_D(\omega)}{D^2} \equiv \frac{2}{D^2}\int_0^\infty K_D(t)\cos\omega t\, dt\,. \tag{2.34}$$

Мы не приводим громоздкое вычисление интеграла Фурье(34), (32). Результат в интересующей нас области $(\omega\tau_0)^2 \ll 1$ с большой точностью равен

$$S_{\delta D}(\omega) = \frac{2D'}{3D}\;\frac{\pi}{|\omega|(\ln|\omega|\tau_0)^2} \tag{2.35}$$

Сравним это выражение с эмпирической формулой (1.3). Медленные фликкерные флуктуации $D(t)$ и подвижности $\mu(t)$ должны быть связаны, как следует из простых физических соображений, соотношением Эйнштейна: $D(t) = T\mu(t)$ (в разд. 3 мы строго докажем это для стационарного неравновесного состояния). Следовательно, $S_{\delta D}(\omega) = S_{\delta\mu}(\omega)$ и можно записать (35) в виде

$$S_{\delta\mu}(\omega) = \frac{2\pi}{|\omega|}\, a(\omega), \tag{2.36}$$

$$a(\omega) = \frac{D'}{3D}\left(\ln|\omega|\tau_0\right)^{-2} = \frac{r_0^2}{6D\tau_0}\left(\ln|\omega|\tau_0\right)^{-2}.$$

Спектр относительных флуктуаций $S(t)$ мощности суммарного белого шума N статистически независимых носителей получается из (35) делением на N :

$$S_{\delta S}(\omega) \equiv S_{\delta D}(\omega)\frac{1}{N} \cdot \tag{2.37}$$

Параметры r_0 и τ_0 – это микромасштабы, при превышении которых броуновское движение становится масштабно-инвариантным. Физически вполне очевидно, что в однородной среде $2D\tau_0 \gtrsim r_0^2$, т.е. $D' \lesssim D$. Действительно, если уже после однократного типичного "свободного пробега" (или "шага") с длиной λ_0 корреляция направления движения исчезает, то r_0 должен достигать наименьшего возможного значения $\approx \lambda_0$, и поэтому величина $2D\tau_0$ не может оказываться значительно меньшей, чем $r_0^2 \approx \lambda_0^2$.

Пусть временная инвариантность формируется начиная с минимального допустимого масштаба $\sim r_0^2/2D$, тогда $2D\tau_0 \approx r_0^2$, $D' \approx D$. В простейшем этом случае $\tau_0 \sim \tau_\mu$ (τ_μ – среднее время свободного пробега, время перескока из одного локализованного состояния в другое). Заметим также, что в этом случае "ширина" функции $F(r^2/4D't)$ в (26) совпадает, в силу (27), с шириной гауссовского колокола (8). Данный случай замечателен тем, что диффузия инвариантна в максимальной степени и описывается всего двумя параметрами: D и τ_0.

Ограничиваясь здесь этой ситуацией+, положим $2D\tau_0 = r_0^2$ $(D' = D)$ и оценим "константу Хоухе" $a(\omega)$ (ср. (38)

+Можно предположить, что эта ситуация реализуется, в частности, когда преобладает какой-то один тип неупругого взаимодействия носителей с термостатом, и все корреляции $v(t)$ быстро затухают за время $\sim r_0^2/2D$.

с (1.3)).

В полупроводниках типичное время свободного пробега $\tau_\mu \sim 10^{-12}$ с. Взяв $\tau_0 = 10^{-12}$ с, на частоте 1 Гц получим $a(\omega) = \frac{2}{3}(\ln|\omega|\tau_0)^{-2} = 2/[3(12\ln 10 - \ln 2\pi)^2] \approx 5 \cdot 10^{-4}$, а на частоте 10^4 Гц – $a \approx 1{,}2 \cdot 10^{-3}$ – в хорошем согласии с типичными экспериментальными значениями $\approx 10^{-3}$ (см. Введение). Таким образом, наша теория дает правильную оценку "константы Хоухе", а тем самым – и оценку величины $1/f$ –шума в разнообразных реальных ситуациях [1].

Мы видим, что "константа Хоухе", $a(\omega) \approx 1/3 \times (\ln|\omega|\tau_0)^{-2}$, определяется только микроскопическим временным масштабом броуновского движения τ_0 и временем наблюдения за $1/f$ –шумом $\sim 2\pi/\omega$. Зависимость $a(\omega)$ от частоты весьма слабая. Однако она обеспечивает интегрируемость спектра (35), (36) на низких частотах (как это и должно быть в случае стационарных флуктуаций).

Когда $2D\tau_0 \gg r_0^2$, уровень $1/f$ –шума сильно уменьшается, как это следует из (36). Этот вывод согласуется с наблюдаемым уменьшением шума в сильно легированных полупроводниках [1]. Действительно, здесь r_0 определяется рассеянием носителей на примеси. Однако масштаб τ_0 должен определяться значительно более медленным взаимодействием с фононами. Поэтому $2D\tau_0 \gg r_0^2$. Предположим, что $2D\tau_0 \approx \lambda_\phi^2$, где λ_ϕ – средняя длина свободного пробега при взаимодействии только с фононами (т.е. в чистом материале). Тогда в (36) $r_0^2/2D\tau_0 \approx r_0^2/\lambda_\phi^2$; это можно переписать также в виде $r_0^2/2D\tau_0 \approx (\mu/\mu_0)^2$, в соответствии с эмпирической формулой Вандамма–Хоухе (см. Введение).

6. Микроскопическая природа фликкерных корреляций

Мы показали, что броуновское движение, не имеющее макроскопических масштабов и поэтому обладающее естественной масштабной инвариантностью $r^2 \sim t$, сопровождается фликкерными флуктуациями интенсивности движения ("скорости" диффузии). Уже из самой предпосылки следует сделанное во Введении утверждение, что соответствующие корреляции отражают отсутствие долгой памяти в случайном движении носителей, т.е. это мнимые корреляции (тем не менее статистически их приходится описывать как реальные корреляции). И временное поведение корреляций (32), и логарифмическое обрезание спектра (35) – (37) на очень низких частотах определяется исключительно микромасштабом τ_0. По существу оба положения – "мнимость" фликкерных корреляций и отсутствие макромасштабов – эквивалентны.

"Микроскопическая" интерпретация полученных результатов заставляет уточнить некоторые привычные понятия. Привычная точка зрения на флуктуации подвижности и проводимости состоит в том, что эти кинетические характеристики всегда, в каждый момент времени, обладают четко определенными текущими значениями, которые, однако, подвергаются некоторым случайным возмущениям. Тогда нужно отыскать механизмы этих медленных возмущений, а это никак не удается сделать. Но возможна совершенно иная точка зрения: текущие ("мгновенные") кинетические характеристики не имеют определенных значений, не существуют, и именно этим физическим обстоятельством объясняется $1/f$-шум.

Действительно, нетрудно понять, что взаимодействие броуновской частицы (носителя) с термостатом не только принуждает его к диффузионному движению, но и отклоняет ее случайное движение от некоторого среднего режима. Этот режим можно точно и быстро измерить, наблюдая за большим ансамблем носителей, что и происходит обычно в эксперименте. Однако отдельный носитель ничего "не знает" о свойствах ансамбля и вовсе не обязан демонстрировать движение с определенным коэффициентом диффузии и подвижностью. Эти понятия имеют смысл только в применении к большому набору реализаций случайного движения, прикладывать же их к отдельной случайной (но динамической) траектории носителя бессмысленно. У одного отдельно взятого носителя попросту нет текущего коэффициента диффузии и текущей подвижности, так что говорить о флуктуациях этих кинетических величин, можно только в условном, феноменологическом смысле. Как D, μ, так и корреляционные функции $K_D(t)$, $K_\mu(t)$ и т.п., это лишь характеристики ансамбля траекторий.

Конечно, то, что не существует (как текущая динамическая характеристика движения), не может и флуктуировать.

Поэтому приходится усложнить картину. Свойство диффузии, которое эмпирически воспринимается как фликкерные флуктуации $D(t)$ (или $\mu(t)$), – простое следствие временной однородности броуновского движения, термодинамического безразличия системы к "ходу" диффузии". Куда бы ни попал носитель в данный момент времени, он каждый раз "начинает все сначала", и прошлое не имеет для него значения. Поэтому любые уклонения – от "положенного" по законам ансамбля режима движения – ничем не компенсируются и накапливаются во времени+. Эти уклонения, вариации "степени случайности" движения, не приводят ни к динамической, ни к термодинамической обратной реакции системы. В то же время они остаются в рамках характерной диффузионной зависимости $r^2 \sim t$. Результатом, как мы видели, является $1/f$-шум.

Вся эта, выскользающая из традиционных приемов описания, картина в принципе могла бы быть описана формально строгим и достаточно полным образом с помощью корреляторов (кумулянтов) четвертого порядка (1,2), (12), (13), если бы мы могли проанализировать их методами статистической механики. Однако подобная задача чрезвычайно трудна даже в случае квадратичных корреляторов.

По существу, все сказанное выше относится не только к "электрическим", но и к другим кинетическим параметрам. Можно, видимо, утверждать, что в любой системе, где происходит однородный во времени перенос какой-либо экстенсивной физической величины, имеются фликкерные флуктуации мощности случайных потоков (ланжевеновских сил), а в неравновесном состоянии – еще и флуктуации необратимых потоков. Например, перенос тепла должен сопровождаться фликкерными флуктуациями теплопроводности и, при наличии градиента температуры, теплового потока. Другой простой пример дают наблюдаемые флуктуации (со спектром $1/f$-шума) потерь в кварцевых резонаторах (см., например, [9]).

+Отметим, что в [8] была предпринята попытка ввести в модель диффузии подобные незатухающие ("остаточные") корреляции, однако они приписывались флуктуациям плотности диффундирующей величины. В нашей модели они автоматически появляются во флуктуациях $D(t)$.

7. Общее описание равновесного $1/f$-шума

Возьмем теперь произвольный диссипативный электрический двухполюсник, выводы которого накоротко соединены друг с другом. Рассмотрим равновесную диффузию заряда (3) $Q(t)$ через двухполюсник. Здесь также выполняется, в среднем, обычный диффузионный закон: $\langle Q^2(t)\rangle_0 = St$. Если перенос заряда через двухполюсник определяется только микроскопическими процессами, то "броуновское движение заряда" $Q(t)$ должно быть снова масштабно-инвариантным. Очевидно, сейчас мы сразу можем написать выражение для спектра относительных флуктуаций мощности белого шума $S_{\delta S}(\omega)$. Достаточно сделать в (35), (36) замену $2D \to S$, $r_0 \to q_0$, где q_0 – характерный микроскопический масштаб переноса заряда, и τ_0 имеет прежний смысл. Находим, таким образом, при $(\omega\tau_0)^2 \ll 1$

$$S_{\delta S}(\omega) \approx \frac{q_0^2}{3\tau_0 S}\,\frac{2\pi}{|\omega|}\left(\ln\tau_0|\omega|\right)^{-2}. \qquad (2.38)$$

Если двухполюсник – это однородный образец длины L, то из (38) легко получить снова (35), (36), полагая $q_0 = \frac{e}{L} r_0$, где e – заряд электрона, и выражая S через коэффициент диффузии (независимых) носителей и число носителей. Здесь q_0 – заряд, перемещаемый во внешней цепи (когда она подключена) при смещении носителя на расстояние r_0.

Рассмотрим теперь в качестве примера $p-n$ -переход. В этом случае $S = e^2 n$, где n – среднее число носителей, пересекающих его в единицу времени. Если носители не коррелируют друг с другом, то, очевидно, можно написать $q_0 \approx e$. Тогда из (38) получаем при $\tau_0 \sim 10^{-7}$, $\omega/2\pi \sim 1$ Гц оценку

$$S_{\delta S}(\omega) \approx \frac{0.002}{\tau_0 n}\,\frac{2\pi}{|\omega|}. \qquad (2.39)$$

Масштаб τ_0 должен определяться "временем жизни" носителей на переходе, так что $\tau_0 n \gg 1$. Отношение τ_0 к конкретным характерным временам системы можно выявить лишь при более детальном ее описании.

Разумеется, оставаясь в рамках данного феноменологического статистического описания, нельзя получить оценки лучшие, чем по порядку величины⁺.

3. ТОКОВЫЙ 1/f-ШУМ В СТАЦИОНАРНОМ НЕРАВНОВЕСНОМ СОСТОЯНИИ И НЕЛИНЕЙНЫЕ ФЛУКТУАЦИОННО-ДИССИПАЦИОННЫЕ СООТНОШЕНИЯ (ФДС)

1. Характеристическая функция переносимого заряда. Кубичное ФДС

Использование математического аппарата негауссовских случайных процессов позволило нам рассмотреть $1/f$-шум, "оставляя" его в равновесном состоянии. При включении электрического поля флуктуации коэффициента диффузии $D(t)$ трансформируются во флуктуации подвижности носителей $\mu(t)$ и проводимости $g(t)$ и станут причиной фликкерного токового $1/f$-шума. Для корректного анализа этого неравновесного состояния применим нелинейные флуктуационно-диссипационные соотношения (ФДС), о которых см. [16-21].

Рассмотрим снова диссипативный электрический двухполюсник. Пусть до момента $t = 0$ он находился в равновесии с окружением (и был короткозамкнутым), а в момент $t = 0$ на него подали заданное постоянное напряжение $x(t) = \mathrm{const}$. В таком случае, как показано в [16, 17] (см. также [18, 21]), выполняется вытекающее из микроскопической обратимости точное производящее ФДС⁺⁺

⁺Авторы [1] довольно успешно описывают $1/f$-шум в неоднородных полупроводниковых структурах на основе эмпирической модели флуктуаций подвижности (см. введение) с $a \approx 0{,}001$. Интересное исключение представляет собой диод с барьером Шоттки [1].

⁺⁺Формула (1) относится к системе, включающей помимо самого двухполюсника и его окружение. При этом предполагается, что до включения силы двухполюсник находился в термодинамическом равновесии с окружением при температуре T (более общий случай рассмотрен в [18]). Считаем также, что отсутствует стороннее магнитное поле.

$$\left\langle \exp\left\{\int_0^t \left[iu(t')-\frac{x}{T}\right]J(t')dt'\right\}\right\rangle_x =$$

$$= \left\langle \exp\left\{-\int_0^t iu(t-t')J(t')dt'\right\}\right\rangle_x , \tag{3.1}$$

где $u(t)$ – произвольная пробная функция. Значок " x " у скобки напоминает о неравновесности флуктуаций.

Положим здесь $u(t) = u = const$. Введем ХФ:

$$\Delta_t(iu|x) = \frac{1}{t}\ln\left\langle \exp\left\{iu\int_0^t J(t')dt'\right\}\right\rangle_x . \tag{3.2}$$

В равновесном состоянии она совпадает с (2.5). Из (1) следует, что

$$\Delta_t\left(iu-\frac{x}{T}\Big|x\right) = \Delta_t(-iu|x). \tag{3.3}$$

Разложение (3) в ряд по iu дает бесконечную цепочку ФДС, связывающих среднее значение перенесенного, за время t заряда $\langle Q(t)\rangle_x$ и различные кумулянты флуктуаций тока $J(t)$, или $Q(t)$. Можно показать, в частности, что имеет место такое соотношение

$$\langle Q(t)\rangle_x = \sum_{m=1}^{\infty} c_m \left(\frac{x}{T}\right)^{2m-1} \langle Q^{(2m)}(t)\rangle_x , \tag{3.4}$$

где

$$\langle Q^{(n)}(t)\rangle_x = \int_0^t \langle J(t_1),\ldots,J(t_n)\rangle_x dt_1\ldots dt_n - \tag{3.5}$$

высшие кумулянты перенесенного заряда, а числа C_n определяются формулой $\sum_{m=1}^{\infty} C_m z^{2m-1} = th\,\frac{z}{2}$, $C_1=\frac{1}{2}$, $C_2=-\frac{1}{24}$, $C_3=\frac{1}{240}$.

Дифференцирование (4) по t приводит к флуктуационному выражению для среднего тока:

$$\langle J(t)\rangle_x = \frac{x}{T}\int_0^t \langle J(t),J(t')\rangle_x\, dt' -$$

$$-\frac{1}{6}\left(\frac{x}{T}\right)^3 \int_0^t \langle J(t),J(t_1),J(t_2),J(t_3)\rangle_x dt_1 dt_2 dt_3 + \ldots \tag{3.6}$$

Рассмотрим случай слабо неравновесного состояния и разложим фигурирующие в (6) величины в ряд по x :

$$\langle J(t)\rangle_x = g_1(t)x + g_3(t)x^3 + \ldots ; \tag{3.7}$$

$$\langle J(t),J(t')\rangle_x = \langle J(t),J(t')\rangle_0 + x^2 R(t;t') + \ldots \tag{3.8}$$

(считаем двухполюсник электрически симметричным). Выделяя в (6) линейные по x члены, получим

$$g_1(t) = \frac{1}{T}\int_0^t \langle J(t'),J(0)\rangle_0\, dt' \tag{3.9}$$

– флуктуационно-диссипационную теорему (ФДТ). Выделение кубичных по x членов дает "кубичную ФДТ":

$$g_3(t) = \frac{1}{T}\int_0^t R(t;t')\,dt' -$$

$$-\frac{1}{6T^3}\int_0^t \langle J(t),J(t_1),J(t_2),J(t_3)\rangle_0 dt_1 dt_2 dt_3 . \tag{3.10}$$

Отметим, что подобные кубичные ФДС изучались еще Ефремовым [19] и Стратоновичем [20].

2. Слабо неравновесное состояние. Статистическое выражение для корреляционной функции флуктуаций проводимости

Рассмотрим соотношение (10) при $t \gg \tau_\mu$, где τ_μ –

время корреляции равновесного токового шума в коротко-замкнутом двухполюснике. Функция $g_3(t)$ описывает кубичную часть отклика среднего тока и учитывает как "быстрые" электрические процессы, обусловливающие нелинейную проводимость, так и сравнительно медленные тепловые процессы, а также изменение проводимости вследствие джоулева нагрева системы. Таким образом, $g_3(t)$ не выходит, в отличие от $g_1(t)$ (9), на постоянный уровень при $t \gg \tau_\mu$ и может содержать медленно меняющийся "хвост". Более того, этот хвост может, в принципе, оказаться нестационарным.

Функция $R(t,t')$, как видно из (8), описывает "избыточные" флуктуации тока в слабо неравновесном состоянии, т.е. в квадратичном по напряжению (и среднему току) режиме. В частности, $R(t,t')$ содержит информацию о фликкерных флуктуациях тока. Из (10) и (2.18) следует, что низкочастотные (фликкерные) флуктуации тока в квадратичном режиме определяются как равновесными флуктуациями мощности белого шума, так и медленными или нестационарными тепловыми процессами (вызванными джоулевым нагревом). Отметим, что этот второй источник имеет, возможно, отношение к так называемому "температурному" $1/f$-шуму, иногда наблюдающемуся в металлах (см. Введение).

Нас, однако, интересует здесь первый источник токового $1/f$-шума, имеющий термодинамически равновесную природу. Поэтому мы пренебрежем неравновесными тепловыми процессами, т.е. будем считать, что при $t > \tau_\mu$ в системе устанавливается строго стационарное состояние. В таком случае $g_3(t)$ обращается в константу при $t > \tau_\mu$. Кроме того, при $t,\ t' \gg \tau_\mu$ функция R будет зависеть только от разности аргументов: $R(t,t') \cong R(t-t')$. Тогда можно воспользоваться феноменологической концепцией флуктуаций проводимости, написав (при $t,t' \gg \tau_\mu$ и $(t-t') \gg \tau_\mu$)

$$R(t,t') = R(t-t') = \mathcal{K}_g(t-t'), \qquad (3.11)$$

где $\mathcal{K}_g(t-t')$ – корреляционная функция этих флуктуаций[+]. Продифференцируем теперь (10) по t. Поскольку левая часть при этом исчезает, из (10), (11) и (2.13) получаем

$$\mathcal{K}_g(t) = \frac{1}{2T^2} \int_0^t\!\!\int \langle J(t), J(t'), J(t''), J(0) \rangle_0 dt'dt'' = \mathcal{K}_s(t)/4T^2. \tag{3.12}$$

Таким образом, корреляционная функция флуктуаций проводимости (обусловленных термодинамически равновесными процессами) выражается через четвертый кумулянт равновесных флуктуаций тока. По существу, формулу (12) следует рассматривать как статистическое определение $\mathcal{K}_g(t)$, поскольку четвертый равновесный кумулянт тока всегда можно записать в строгих терминах статистической механики.

Вследствие (12) и формулы Найквиста, $S = 2Tg$, спектры относительных фликкерных флуктуаций $g(t)$ и $s(t)$ полностью совпадают как между собой, так и (в слабо неравновесном стационарном состоянии, при $\langle J(t) \rangle_x = gx$) со спектром относительных флуктуаций тока. Из (2.38) и (12) получаем в квадратичном режиме

$$S_J(\omega) = \bar{J}^2 \frac{q_0^2}{3\tau_0 S} \frac{2\pi}{|\omega|} (\ln \tau_0 |\omega|)^{-2}, \tag{3.14}$$

где $\bar{J} = gx$. В случае однородного проводника и в приближении независимых носителей из (2.35), (2.37) и (12) имеем

[+]Заметим, что использование модели флуктуаций проводимости автоматически предполагает стационарность. Иначе говоря, вклад нестационарных процессов (если такой существует) в токовый $1/f$-шум нельзя описать в рамках этой модели, без сомнений используемой в литературе.

$$S_J(\omega) = \bar{J}^2 \frac{2\pi}{N|\omega|} a(\omega),$$

$$a(\omega) = \frac{r_0^2}{6D\tau_0} \left(\ln|\omega|\tau_0 \right)^{-2} . \qquad (3.15)$$

Выше было показано, что данный результат в количественном отношении удовлетворительно согласуется с обобщающей эмпирической формулой (1.1). Учитывая, что мы исходили только из "первых принципов", это обстоятельство можно рассматривать как важное свидетельство в пользу изложенной теории.

3. Нелинейный проводник. Токовый $1/f$ –шум в неомическом режиме

Проделанный анализ справедлив для любого (нелинейного) проводника, но в квадратичном по току, или омическом, режиме. При описании неомического режима необходимо учитывать негауссовость уже самого белого шума проводника, поскольку она тесно связана, как следует из ФДС [17, 21], с диссипативной нелинейностью. Естественно предположить, что характер этой связи не нарушается медленным фликкерными флуктуациями. В соответствующей статистической модели все кинетические параметры белого шума флуктуируют согласованно, что можно математически описать (в стационарном режиме при $t \gg \tau_\mu$) следующим образом (ср. с (2.9)):

$$\Delta_t(iu|x) = \frac{1}{t} \ln\left\langle \exp\left\{ \int_0^t \xi(t') S(iu|x) dt' \right\} \right\rangle_x . \qquad (3.16)$$

Здесь $\int_0^t \xi(t')\,dt'$ – изученный уже процесс масштабно-инвариантной диффузии, $\xi(t) = S(t)/S$, $S(iu\,|\,x)$ – ХФ белого шума. Она должна, в силу (3), удовлетворять аналогичному (3) соотношению

$$S\left(iu - \frac{x}{T} \Big| x\right) = S(-iu|x) . \qquad (3.17)$$

Заметим, что теперь как S, так и микромасштабы r_0, τ_0 являются, вообще говоря, функциями x.

Запишем ХФ белого шума в виде ряда

$$S(iu|x) = iu\bar{J}(x) + \frac{(iu)^2}{2} S(x) + \ldots, \qquad (3.18)$$

где $\bar{J}$ (x) – средний ток, $S \equiv S(x)$ – спектральная плотность шума. Подставляя (18) в (16), нетрудно получить для фликкерных флуктуаций тока выражение

$$\mathcal{K}_J(t) = \bar{J}^2(x) \frac{2q_0^2(x)}{3\tau_0 S(x)} \left(\ln \frac{t}{\tau_0}\right)^{-1} \qquad (3.19)$$

и соответственно

$$S_J(\omega) = \frac{\bar{J}^2(x) q_0^2(x)}{3\tau_0 S(x)} \frac{2\pi}{|\omega|} (\ln|\omega|\tau_0)^{-2}. \qquad (3.20)$$

Таким образом, спектр флуктуаций тока дается прежним выражением типа (38), только с учетом зависимости от x. ФДС (17) приводит к определенной, иногда жесткой, связи между $\bar{J}$ (x) и S (x).

Рассмотрим снова в качестве примера идеальный полупроводниковый диод ($p-n$ – переход) в неомическом режиме, или в режиме дробового шума. В этом случае, как известно,

$$S(x) = e\bar{J}(x). \qquad (3.21)$$

Считая, что $q_0 = e, \tau_0$ остаются неизменными, получаем из (20), (21)

$$S_J(\omega) \approx \frac{e\bar{J}(x)}{\tau_0} \frac{2\pi a(\omega)}{|\omega|}.$$

Таким образом, интенсивность токового фликкер-шума растет в нелинейном режиме пропорционально среднему току, т.е. просто числу носителей, пересекающих переход в единицу времени (см. [1]).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Резюмируем основные моменты и результаты работы.

1. Экспериментальная ситуация с $1/f$ -шумом не укладывается в рамки традиционных понятий. Причиной этого является смешение понятий, относящихся к случайному движению отдельного носителя заряда и к статистическому поведению ансамбля, неявно закрепленное традиционно используемой гауссовской моделью диффузии.

2. Принципиальный результат работы заключается в том, что $1/f$ -шум может быть объяснен без привлечения специальных физических механизмов, как естественное свойство случайного броуновского движения носителей заряда, т.е. того хорошо известного процесса, который лежит в основе большинства электрических явлений.

3. Мы построили новую простую модель броуновского движения, используя только те физические предпосылки, которые используются в гауссовской модели, но отвергая предположение о строго гауссовском характере статистики реальной диффузии как физически бессмысленное. Таким образом, наша теория более адекватна действительности (хотя, конечно, возможны и дальнейшие уточнения).

4. Построенная теория с необходимостью приводит к выводу о том, что реальное броуновское движение всегда сопровождается флуктуациями "интенсивности движения" со спектром $1/f$ -типа.

На языке ансамбля можно сказать, что коэффициент диффузии и мощность "белого" электрического шума испытывают флуктуации со спектром $1/f$ -типа. В неравновесном состоянии такими же флуктуациями обладает подвижность носителей, проводимость и ток.

5. Случайное движение отдельного носителя (и вообще конкретная броуновская траектория) не имеет определенного коэффициента диффузии. Что касается "интенсивности движения", то ее спонтанные (термодинамические) флуктуации не имеют характерного временного масштаба, т.к. не влияют ни на динамическую картину движения, ни на термодинамическое состояние системы.

$1/f$ -шум является именно результатом отсутствия длительных корреляций в случайном движении носителей (и не связан ни с какими макроскопически большими временами релаксации). Спектральный состав $1/f$-шума не зависит от размеров системы.

6. Интенсивность $1/f$-шума определяется исключительно микроскопическими масштабами случайного движения носителей. В построенной модели присутствуют только два таких параметра, которые указывают пространственную и временную нижнюю границу области масштабно-инвариантного броуновского движения.

7. Оценка интенсивности $1/f$-шума удовлетворительно согласуется с экспериментом. При этом выясняется происхождение малой эмпирической "константы Хоухе".

8. Полную микроскопическую информацию о $1/f$-шуме в стационарном состоянии можно получить, в принципе, из равновесных корреляторов (кумулянтов) четвертого порядка, используя для этого строгие методы статистической механики. Это совершенно новая по своему характеру задача теоретической физики.

Литература

1. Hooge F.N.,Kleinpenning T.G.M.,Wandamme L.K.L. - Rep.Progr.Phys.,I98I,v.44,p.479.

2. Bell D.A. - J. Phys., I980, v.C I3,p4425.

3. Hooge F.N. - Physica, I972, v.60, p.I30 .

4. Voss R.,Clarke J. - Phys. Rev.,I976 , v. B I3, p. 556 .

5. Dutta P.,Eberhard J.W.,Horn P.M. - Solid State Commun., I978, v. 27, p. I389 .

6. Kleinpenning T.G.M.- Physica,v.B I03,p340

7. Ван дер Зил А. Шум. – М.: Сов. Радио, 1973.

8. Климонтович Ю.Л. – ЖЭТФ, 1980, т. 80, с. 2243.

9. Handel P.H. – Solid-State Elect., 1979, v. 22, p. 875.

10. Ганцевич С.В., Каган В.Д., Катилюс Р. – ЖЭТФ, 1981, т. 80, с. 1827.

11. Коган Ш.М., Шкловский Б.И. – ФТП, 1981, т. 15, с. 1049.

12. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее прило – жения. Т. 2. – М.: 1967.

13. Стратонович Р.Л. Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. – М.: Сов. радио, 1961.

14. Малахов А.Н. Кумулянтный анализ случайных негауссовских процессов и их преобразований. – М.: Сов. радио, 1978.

15. Бочков Г.Н., Кузовлев Ю.Е. – ЖЭТФ, 1980, т. 79, с. 2339.

16. Бочков Г.Н., Кузовлев Ю.Е. – ЖЭТФ, 1977, т. 72, с. 238.

17. Бочков Г.Н., Кузовлев Ю.Е. – ЖЭТФ, 1979, т. 76, с. 1071.

18. Bochkov G.N., Kuzovlev Yu.E.– Physica, 1981, v. A 106, p. 443 .

19. Ефремов Г.Ф. – ЖЭТФ, 1968, т. 55, с. 2322.

20. Стратонович Р.Л. – ЖЭТФ, 1970, т. 58, с. 1612.

21. Бочков Г.Н., Кузовлев Ю.Е. – Изв. вузов – Радиофизика, 1978, т. 21, с. 1467.

Дата поступления статьи

30 июля 1982 г.

Юрий Евгеньевич Кузовлев

Герман Николаевич Бочков

О ПРИРОДЕ И СТАТИСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ $1/f$-ШУМА

Подписано к печать 09.08.82г. МЦ00251. Формат 60x84/16

Бумага писчая. Печать офсетная. Объем 2,21 усл. печ. л.

Тираж 120 экз. Заказ 2840. Бесплатно.

Горьковский ордена Трудового Красного Знамени научно-исследовательский радиофизический институт. Горький, 603600, ГСП-51, ул. Лядова, 25/14, т. 38-90-91, д. 5-09

Отпечатано на ротапринте НИРФИ