Министерство высшего и среднего специального образования РСФСР
Ордена Трудового Красного Знамени
научно-исследовательский радиофизический институт (НИРФИ)

Препринт № 159

САМОСОГЛАСОВАННЫЕ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ ОДНОМЕРНЫХ СИСТЕМ С ДВИЖУЩИМИСЯ НАГРУЗКАМИ И ЗАКРЕПЛЕНИЯМИ

А.И.Весницкий
Л.Э.Каплан
С.В.Крысов
Г.А.Уткин

Горький 1982

УДК 538.3

Вопросы динамического поведения распределенных систем с движущимися границами и нагрузками с каждым годом привлекают внимание все большего числа исследователей не только в области механики, в связи с проблемами динамики мостов [I], шахтных подъемников [2, 3], силовых передач с гибкими связями [4] и т.д., но и в области электродинамики, оптики и акустики в связи с проблемами генерации волн, преобразования их спектра и диагностики движущихся сред [5].

В теории таких систем одним из основных является вопрос о корректных условиях на движущихся границах. До сих пор его удалось решить лишь применительно к ряду частных случаев [6, 7].

В данной работе впервые для произвольной одномерной системы с движущейся вдоль нее произвольной нагрузкой проводится постановка задачи об их самосогласованном динамическом поведении. В частности, получены уравнения переноса волновой энергии и волнового импульса.

1. Рассмотрим голономную систему с идеальными связями, состоящую из одномерной системы, вдоль которой по некоторому закону, согласованному с движением распределенной системы, перемещается сосредоточенная нагрузка. Задачу об отыскании указанных законов движения будем решать, исходя из принципа Гамильтона. При этом, поскольку поведение распределенной системы и поведение нагрузки взаимообусловлены, функционал действия по Гамильтону зависит не только от обобщенных координат, описывающих распределенную систему, но и от закона движения нагрузки вдоль нее. С учетом этого обстоятельства приходим к следующей вариационной задаче.

Пусть $D = \{(x, t): a \le x \le b \ , \ \alpha \le t \le \beta\}$ - некоторая прямоугольная область в плоскости (x, t). Кривую $l = \{(x, t): x = l(t), \alpha \le t \le \beta\}$ назовем допустимой кривой (на D), если выполняются условия:

а) функция $l(t)$ дважды дифференцируема на $[\alpha, \beta]$,

б) кривая l лежит в области D и разбивает её на части

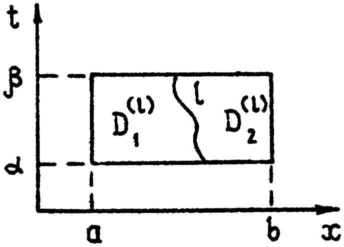

Рис. I

$$D_1^{(l)} = \{(x,t): a \le x \le l(t), \ \alpha \le t \le \beta\}$$

и

$$D_2^{(l)} = \{(x,t): l(t) \le x \le b \ , \ \alpha \le t \le \beta\}$$

(см. Рис. I)

Пусть l - некоторая допустимая кривая на D. Под l- допустимой функцией (на D) будем понимать вектор-функцию

$$\bar{u}(x,t)=\begin{cases} {}^1\bar{u}(x,t)=({}^1u^1(x,t),\dots,{}^1u^n(x,t)) & \text{при } (x,t)\in D_1^{(l)} \\ {}^0\bar{u}(t)=({}^0u^1(t),\dots,{}^0u^n(t)) & \text{при } (x,t)\in l \\ {}^2\bar{u}(x,t)=({}^2u^1(x,t),\dots,{}^2u^n(x,t)) & \text{при } (x,t)\in D_2^{(l)} \end{cases},$$

для которой выполнены условия:

I) вектор-функция $\bar{u}(x,t)$ непрерывна в D ,

2) вектор-функция ${}^1\bar{u}(x,t)$ и ${}^2\bar{u}(x,t)$ дважды непрерывно дифференцируемы в областях $D_1^{(l)}$ и $D_2^{(l)}$ соответственно.

Если l - допустимая кривая на D, определяемая уравнением $x=l(t)$, $\alpha\le t\le\beta$ и $\bar{u}(x,t)$ - l -допустимая функция на D, то упорядоченную пару функций $(l(t),\ \bar{u}(x,t))$ будем называть D - согласованной парой. В этом случае кривая l является возможной линией разрыва производных функции $\bar{u}(x,t)$ в области D и, обратно, линией разрыва производных функции $\bar{u}(x,t)$ в области D может быть только линия l .

С физической точки зрения функция $l(t)$ характеризует закон движения нагрузки, вектор-функция $\bar{u}(x,t)$ характеризует закон движения распределенной системы; согласованность пары $(l(t),\bar{u}(x,t))$ отражает факт взаимообусловленности указанных движений при рассмотрении реального поведения всей системы.

На множестве всех D-согласованных пар $\{(l(t),\ \bar{u}(x,t))\}$ рассмотрим функционал вида

$$J[(l,\bar{u})]=\sum_{\nu=1}^{2}\iint_{D_\nu^{(l)}} F^\nu(x,t,{}^\nu\bar{u},{}^\nu\bar{u}_x,{}^\nu\bar{u}_t)\,dx\,dt+\int_\alpha^\beta F^0(t,l,\dot{l},{}^0\bar{u},{}^0\dot{\bar{u}})\,dt. \quad (I,I)$$

Здесь F^1, F^2 и F^0 - дважды непрерывно дифференцируемые функции по совокупности своих аргументов.

Функционал (I.I) характеризует действие по Гамильтону системы; при этом, функция

$$F=\begin{cases} F^1 & \text{при } a\le x\le l(t) \\ F^2 & \text{при } l(t)\le x\le b \end{cases}$$

является плотностью функции Лагранжа распределенной системы, а функция F^0 является функцией Лагранжа нагрузки.

В соответствии с принципом Гамильтона, действительным движением системы является такое, для которого функционал действия принимает стационарное значение. Таким образом, наша вариационная задача состоит в нахождении таких D-согласованных пар $(l(t), \bar{u}(x,t))$, для которых первая вариация функционала (I.I) равна нулю.

Пусть $(l(t), \bar{u}(x,t))$ - некоторая D-согласованная пара. Для составления изохронной вариации функционала (I.I) введем преобразование области D на себя и функции сравнения $l^*(t^*)$ и $\bar{u}^*(x^*, t^*)$ формулами

$$\begin{aligned} x^* &= x + \varepsilon\varphi(x,t), \\ t^* &= t, \\ l^*(t^*) &= l(t) + \varepsilon\, {}^0\varphi(t), \\ \bar{u}^*(x^*,t^*) &= \bar{u}(x,t) + \varepsilon\bar{\psi}(x,t). \end{aligned} \tag{I.2}$$

Здесь ε - произвольный параметр, принимающий достаточно малые значения, функции

$$\varphi(x,t) = \begin{cases} {}^1\varphi(x,t) & \text{при } (x,t)\in D_1^{(l)} \\ {}^0\varphi(t) & \text{при } (x,t)\in l \\ {}^2\varphi(x,t) & \text{при } (x,t)\in D_2^{(l)} \end{cases},$$

и

$$\bar{\psi}(x,t) = \begin{cases} {}^1\bar{\psi}(x,t) = ({}^1\psi^1(x,t), \ldots, {}^1\psi^n(x,t)) & \text{при } (x,t)\in D_1^{(l)} \\ {}^0\bar{\psi}(t) = ({}^0\psi^1(t), \ldots, {}^0\psi^n(t)) & \text{при } (x,t)\in l \\ {}^2\bar{\psi}(x,t) = ({}^2\psi^1(x,t), \ldots, {}^2\psi^n(x,t)) & \text{при } (x,t)\in D_2^{(l)} \end{cases},$$

непрерывны в области D, причем функции ${}^\nu\varphi(x,t)$ и ${}^\nu\bar{\psi}(x,t)$ дважды непрерывно дифференцируемы в $D_\nu^{(l)}$, $\nu = 1,2$. Кроме того, мы предполагаем, что на границе области D функции $\varphi(x,t)$ и $\bar{\psi}(x,t)$ обращаются в нуль, а в остальном они произвольные.

Преобразование (I.2) переводит D-согласованную пару $(l(t), \bar{u}(x,t))$ в "близкую" D-согласованную пару $(l^*(t^*), \bar{u}^*(x^*,t^*))$. Отметим, что указанное варьирование D-согласованной пары $(l(t), \bar{u}(x,t))$ индуцирует варьирование областей $D_1^{(l)}$ и $D_2^{(l)}$.

Положим

$$\Phi(\varepsilon) = J\left[(l^*(t^*), \bar{u}^*(x^*,t^*))\right] =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{2} \iint\limits_{D_\nu^{(l^*)}} F^\nu(x^*, t^*, {}^\nu\bar{u}^*(x^*,t^*), {}^\nu\bar{u}^*_{x^*}(x^*,t^*), {}^\nu\bar{u}^*_{t^*}(x^*,t^*))\,dx^*dt^* + \int_\alpha^\beta F^0(t^*, l^*(t^*), \dot{l}^*(t^*), {}^0\bar{u}^*(t^*), {}^0\dot{\bar{u}}^*(t^*))\,dt^*.$$

Отсюда, сведя интегрирования по $D_1^{(l^*)}$ и $D_2^{(l^*)}$ к интегрированию по исходным областям $D_1^{(l)}$ и $D_2^{(l)}$ соответственно, будем иметь

$$\Phi(\varepsilon)=\sum_{\nu=1}^{2}\iint\limits_{D_\nu^{(l)}}\Big[F^\nu\big(x+\varepsilon\,{}^\nu\varphi(x,t),\,t,\,{}^\nu\bar u(x,t)+\varepsilon\,{}^\nu\bar\psi(x,t)\big),$$

$${}^\nu\bar u_x(x,t)+\varepsilon\big({}^\nu\bar\psi_x(x,t)-{}^\nu\bar u_x(x,t)\,{}^\nu\varphi_x(x,t)\big)+\ldots,\,{}^\nu\bar u_t(x,t)+$$

$$+\varepsilon\big({}^\nu\bar\psi_t(x,t)-{}^\nu\bar u_x(x,t)\,{}^\nu\varphi_t(x,t)\big)+\ldots\Big]\big(1+\varepsilon\,{}^\nu\varphi_x(x,t)\big)\,dx\,dt+$$

$$+\int\limits_\alpha^\beta F^0\big(t,\,l(t)+\varepsilon\,{}^0\varphi(t),\,\dot l(t)+\varepsilon\,{}^0\dot\varphi(t),\,{}^0\bar u(t)+\varepsilon\,{}^0\bar\psi(t),\,{}^0\dot{\bar u}(t)+\varepsilon\,{}^0\dot{\bar\psi}(t)\big)\,dt.$$

Таким образом, для первой вариации $\delta J=\Phi'(0)$ функционала (I.I) получаем следующее выражение:

$$\delta J=\sum_{\nu=1}^{2}\iint\limits_{D_\nu^{(l)}}\Big[F^\nu\,{}^\nu\varphi_x+F^\nu_x\,{}^\nu\varphi+\sum_{k=1}^{n}F^\nu_{{}^\nu u^k}\,{}^\nu\psi^k+\sum_{k=1}^{n}F^\nu_{{}^\nu u^k_x}\big({}^\nu\psi^k_x-{}^\nu u^k_x\,{}^\nu\varphi_x\big)+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}F^\nu_{{}^\nu u^k_x}\big({}^\nu\psi^k_t-{}^\nu u^k_x\,{}^\nu\varphi_t\big)\Big]dx\,dt+\int\limits_\alpha^\beta\Big(F^0_l\,{}^0\varphi+F^0_{\dot l}\,{}^0\dot\varphi+\sum_{k=1}^{n}F^0_{{}^0u^k}\,{}^0\psi^k+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}F^0_{{}^0\dot u^k}\,{}^0\dot\psi^k\Big)\,dt.$$

Приведя полученное выражение к дивергентному виду и использовав в двойных интегралах формулу Грина, а в однократном - интегрирование по частям, получим следующее выражение для первой вариации функционала (I.I):

$$\delta J=\sum_{\nu=1}^{2}\sum_{k=1}^{n}\iint\limits_{D_\nu^{(l)}}\Big(F^\nu_{{}^\nu u^k}-\frac{\partial}{\partial x}F^\nu_{{}^\nu u^k_x}-\frac{\partial}{\partial t}F^\nu_{{}^\nu u^k_t}\Big)\big({}^\nu\psi^k-{}^\nu u^k_x\,{}^\nu\varphi\big)\,dx\,dt+ \tag{I.3}$$

$$+\int\limits_\alpha^\beta\Big\{\Big[F^1-F^2-\sum_{k=1}^{n}\big(F^1_{{}^1u^k_x}\,{}^1u^k_x-F^2_{{}^2u^k_x}\,{}^2u^k_x\big)+\dot l\sum_{k=1}^{n}\big(F^1_{{}^1u^k_t}\,{}^1u^k_x-F^2_{{}^2u^k_t}\,{}^2u^k_x\big)\Big]_{x=l(t)}+$$

$$+F^0_l-\frac{d}{dt}F^0_{\dot l}\Big\}\,{}^0\varphi(t)\,dt+\sum_{k=1}^{n}\int\limits_\alpha^\beta\Big\{\Big[F^1_{{}^1u^k_x}-F^2_{{}^2u^k_x}-\dot l\big(F^1_{{}^1u^k_t}-F^2_{{}^2u^k_t}\big)\Big]_{x=l(t)}+F^0_{{}^0u^k}-\frac{d}{dt}F^0_{{}^0\dot u^k}\Big\}\,{}^0\psi^k(t)\,dt.$$

Пусть теперь D-согласованная пара $(l(t), \bar{u}(x,t))$ такова, что $\delta J[(l(t), \bar{u}(x,t))] = 0$. Тогда, рассуждая традиционным образом, с использованием основной леммы вариационного исчисления, приходим к теореме.

Теорема I.I. Для того, чтобы D-согласованная пара $(l(t), \bar{u}(x,t))$ давала стационарное значение функционалу (I.I) необходимо, чтобы выполнялись соотношения

$$F^{\nu}_{{}^{\nu}u^{\kappa}} - \frac{\partial}{\partial x} F^{\nu}_{{}^{\nu}u^{\kappa}_{x}} - \frac{\partial}{\partial t} F^{\nu}_{{}^{\nu}u^{\kappa}_{t}} = 0, \quad \kappa = 1,\dots,n; \ (x,t) \in D^{(l)}_{\nu}, \ \nu = 1,2; \tag{I.4}$$

$$\left[F^{1} - F^{2} - \sum_{\kappa=1}^{n}\left(F^{1}_{{}^{1}u^{\kappa}_{x}}\, {}^{1}u^{\kappa}_{x} - F^{2}_{{}^{2}u^{\kappa}_{x}}\, {}^{2}u^{\kappa}_{x}\right) + \dot{l}\sum_{\kappa=1}^{n}\left(F^{1}_{{}^{1}u^{\kappa}_{t}}\, {}^{1}u^{\kappa}_{x} - F^{2}_{{}^{2}u^{\kappa}_{t}}\, {}^{2}u^{\kappa}_{x}\right)\right]_{x=l(t)} +$$

$$+ F^{0}_{l} - \frac{d}{dt} F^{0}_{\dot{l}} = 0; \tag{I.5}$$

$${}^{1}u^{\kappa}(l(t),t) = {}^{2}u^{\kappa}(l(t),t) = {}^{0}u^{\kappa}(t), \quad \kappa = 1,\dots,n; \tag{I.6}$$

$$\left[F^{1}_{{}^{1}u^{\kappa}_{x}} - F^{2}_{{}^{2}u^{\kappa}_{x}} - \dot{l}\left(F^{1}_{{}^{1}u^{\kappa}_{t}} - F^{2}_{{}^{2}u^{\kappa}_{t}}\right)\right]_{x=l(t)} +$$
$$+ F^{0}_{{}^{0}u^{\kappa}} - \frac{d}{dt} F^{0}_{{}^{0}\dot{u}^{\kappa}} = 0, \quad \kappa = 1,\dots,n. \tag{I.7}$$

Доказанная теорема позволяет осуществлять постановку смешанных задач для одномерных систем с движущимися нагрузками. При этом, соотношения (I.4) задают дифференциальные уравнения для компонент вектор-функции $\bar{u}(x,t)$, характеризующих поведение распределенной системы, соотношение (I.5) задает дифференциальное уравнение для функции $l(t)$, характеризующей закон движения нагрузки, а соотношения (I.6) и (I.7) являются условиями сопряжения.

Замечание. К компонентам вектор-функции $\bar{u}(x,t)$ целесообразно относить и некоторые неизвестные функции от t, не имеющие прямого отношения к распределенной системе (например, обобщенные координаты нагрузки, не характеризующиеся функцией $l(t)$). В этом случае соотношения (I.4) не задают уравнений для этих функций; недостающие уравнения получаются из соотношений (I.7).

2. Рассмотрим некоторую модификацию нашей вариационной задачи, вызванную рассмотрением движущихся закреплений.

Пусть $D^{(l_1,l_2)}=\{(x,t): l_1(t)\leqslant x\leqslant l_2(t),\ \alpha\leqslant t\leqslant\beta\}$ – "криволинейная трапеция" (см. рис. 2), ограниченная некоторыми фиксированными прямыми $t=\alpha$ и $t=\beta$ $(0<\alpha<\beta)$ и некоторыми (допустимыми) кривыми l_1 и l_2, определяемыми соответственно уравнениями $x=l_1(t)$ и $x=l_2(t)$, $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$, где $l_1(t)$ и $l_2(t)$ дважды дифференцируемые функции, причем $l_1(t)<l_2(t)$ при $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$.

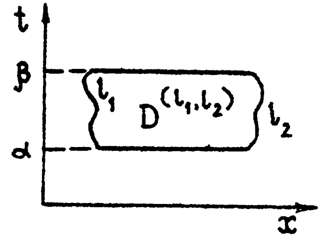

Рис. 2

Под (l_1,l_2) – допустимой функцией (на $D^{(l_1,l_2)}$) будем понимать дважды непрерывно дифференцируемую вектор-функцию

$$\bar u(x,t)=\begin{cases} {}^{0}_{1}\bar u(t)=\left({}^{0}_{1}u^1(t),\dots,{}^{0}_{1}u^n(t)\right) & \text{при } (x,t)\in l_1\\ \left(u^1(x,t),\dots,u^n(x,t)\right) & \text{при } (x,t)\in D^{(l_1,l_2)}\\ {}^{0}_{2}\bar u(t)=\left({}^{0}_{2}u^1(t),\dots,{}^{0}_{2}u^n(t)\right) & \text{при } (x,t)\in l_2\end{cases}$$

и упорядоченную тройку функций $(l_1(t),l_2(t),\ \bar u(x,t))$ будем называть естественно согласованной.

На множестве всех естественно согласованных троек $\{(l_1(t),l_2(t),\bar u(x,t))\}$ рассмотрим функционал вида

$$J[(l_1,l_2,\bar u)]=\iint\limits_{D^{(l_1,l_2)}}F(x,t,\bar u,\bar u_x,\bar u_t)\,dx\,dt+\sum_{\nu=1}^{2}\int_\alpha^\beta F^{0\nu}(t,l_\nu,\dot l_\nu,{}^{0}_{\nu}\bar u,{}^{0}_{\nu}\dot{\bar u})\,dt. \tag{2.I}$$

Здесь F, F^{01} и F^{02} – дважды непрерывно дифференцируемые функции по совокупности своих аргументов.

Из предыдущих рассмотрений непосредственно следует.

Т е о р е м а 2.I. Для того, чтобы естественно согласованная тройка $(l_1(t),l_2(t),\bar u(x,t))$ давала функционалу (2.I) стационарное значение, наобходимо, чтобы для функций $\bar u(x,t)$, $l_1(t)$ и $l_2(t)$ выполнялись соотношения

$$F_{u^k}-\frac{\partial}{\partial x}F_{u^k_x}-\frac{\partial}{\partial t}F_{u^k_t}=0,\quad k=1,\dots,n;\ (x,t)\in D^{(l_1,l_2)}; \tag{2.2}$$

$$\left[-F+\sum_{k=1}^{n} F_{u_x^k} u_x^k - \dot{l}_1 \sum_{k=1}^{n} F_{u_t^k} u_x^k\right]_{x=l_1(t)} + F^{01}_{l_1} - \frac{d}{dt} F^{01}_{\dot{l}_1} = 0; \quad (2.3)$$

$$\left[F-\sum_{k=1}^{n} F_{u_x^k} u_x^k + \dot{l}_2 \sum_{k=1}^{n} F_{u_t^k} u_x^k\right]_{x=l_2(t)} + F^{02}_{l_2} - \frac{d}{dt} F^{02}_{\dot{l}_2} = 0; \quad (2.4)$$

$$\left[-F_{u_x^k} + \dot{l}_1 F_{u_t^k}\right]_{x=l_1(t)} + F^{01}_{{}_1\overset{\circ}{u}{}^k} - \frac{d}{dt} F^{01}_{{}_1\dot{\overset{\circ}{u}}{}^k} = 0, \ k=1,\dots,n; \quad (2.5)$$

$$\left[F_{u_x^k} - \dot{l}_2 F_{u_t^k}\right]_{x=l_2(t)} + F^{02}_{{}_2\overset{\circ}{u}{}^k} - \frac{d}{dt} F^{02}_{{}_2\dot{\overset{\circ}{u}}{}^k} = 0, \ k=1,\dots,n. \quad (2.6)$$

Здесь соотношения (2.5) и (2.6) задают естественные условия на движущихся границах.

3. Предположим, что на функции, характеризующие поведение распределенной системы и нагрузки (закрепления), наложены конечные связи.

Рассмотрим сначала случай движущейся нагрузки с законом движения, характеризующимся функцией $l(t)$ (см. п. I).

D-согласованную пару $(l(t), \bar{u}(x,t))$ назовем допустимой, если ее компоненты "стеснены" конечными связями вида

$${}^{\nu}\Phi^{i_\nu}(t, x, {}^{\nu}\bar{u}) = 0, \ i_\nu = 1,\dots,p_\nu \ (p_\nu < n), \ \nu = 1, 2 \quad (3.1)$$

и

$$\Psi^{j}(t, l, {}^{\circ}\bar{u}) = 0, \ j = 1,\dots,q \ (q<n), \quad (3.2)$$

где ${}^1\Phi^{i_1}$, $i_1 = 1,\dots,p_1$, ${}^2\Phi^{i_2}$, $i_2 = 1,\dots,p_2$, Ψ^j, $j = 1,\dots,q$ – дважды непрерывно дифференцируемые функции по совокупности своих аргументов, причем выполняются условия

$$\frac{D({}^{\nu}\Phi^1,\dots,{}^{\nu}\Phi^{p_\nu})}{D({}^{\nu}u^1,\dots,{}^{\nu}u^{p_\nu})} \neq 0; \quad (x,t)\in D_\nu^{(l)}, \quad \nu = 1,2; \quad (3.3)$$

$$\frac{D(\Psi^1,\dots,\Psi^q)}{D({}^{\circ}u^1,\dots,{}^{\circ}u^q)} \neq 0, \quad t\in[\alpha,\beta]. \quad (3.4)$$

Замечание. Условие (3.4) означает независимость связей (3.2), наложенных на функции t, $l(t)$ и ${}^{0}\bar{u}(t)$; предполагается, что связи, получающиеся из (3.I) при $(x,t)\in l$, являются зависимыми от связей (3.2).

На множестве всех допустимых D-согласованных пар $\{(l(t),\bar{u}(x,t))\}$ рассмотрим функционал вида (I.I). Наша вариационная задача состоит в нахождении таких допустимых D-согласованных пар $(l(t),\bar{u}(x,t))$ для которых первая вариация функционала (I.I) равна нулю.

Изохронное варьирование допустимой D-согласованной пары $(l(t),$ $\bar{u}(x,t))$ по-прежнему осуществляется при помощи формул (I.2), только дополнительно предполагается, что выполняются соотношения

$$ {}^{\nu}\Phi_{x}^{i_\nu}\,{}^{\nu}\varphi + \sum_{k=1}^{n} {}^{\nu}\Phi_{{}^{\nu}u^k}^{i_\nu}\,{}^{\nu}\psi^{k} = 0, \quad i_\nu = 1,\dots,p_\nu, \quad \nu = 1,2; \tag{3.5} $$

$$ \Psi_{l}^{j}\,{}^{0}\varphi + \sum_{k=1}^{n} \Psi_{{}^{0}u^k}^{j}\,{}^{0}\psi^{k} = 0, \quad j = 1,\dots,q, \tag{3.6} $$

получающиеся путем варьирования соответствующих уравнений связи. Преобразование (I.2) при этих дополнительных предположениях переводит допустимую D-согласованную пару $(l(t),\bar{u}(x,t))$ в "близкую" D-согласованную пару $(l^*(t^*),\bar{u}^*(x^*,t^*))$, также являющуюся допустимой.

Выражение для первой вариации функционала (I.I) по-прежнему имеет вид (I.3). Пусть теперь допустимая D-согласованная пара $(l(t),$ $\bar{u}(x,t))$ такова, что $\delta J[(l(t),\bar{u}(x,t))] = 0$. Тогда, полагая

$$ \tilde{F}^{\nu} = F^{\nu} + \sum_{i_\nu=0}^{p_\nu} {}^{\nu}\lambda^{i_\nu}(x,t)\,{}^{\nu}\Phi^{i_\nu}, \quad \nu = 1,2; \tag{3.7} $$

$$ \tilde{F}^{0} = F^{0} + \sum_{j=1}^{q} \mu^{j}(t)\Psi^{j}, \tag{3.8} $$

где ${}^{\nu}\lambda^{i_\nu}(x,t)$, $i_\nu = 1,\dots,p_\nu$, $\nu = 1, 2$ и $\mu^{j}(t)$, $j = 1,\dots,q$, – подлежащие определению множители Лагранжа, и учитывая соотношения (3.5), (3.6), будем иметь

$$\sum_{\nu=1}^{2}\sum_{k=1}^{n}\iint\limits_{D_\nu^{(t)}}\left(\tilde F^{\nu}_{{}^\nu u^k}-\frac{\partial}{\partial x}\tilde F^{\nu}_{{}^\nu u^k_x}-\frac{\partial}{\partial t}\tilde F^{\nu}_{{}^\nu u^k_t}\right)\left({}^\nu\psi^k-{}^\nu u^k_x\,{}^\nu\varphi\right)dx\,dt+$$

$$+\int_\alpha^\beta\left\{\left[\tilde F^1-\tilde F^2-\sum_{k=1}^{q}\left(\tilde F^1_{{}^1u^k_x}\,{}^1u^k_x-\tilde F^2_{{}^2u^k_x}\,{}^2u^k_x\right)+\dot l\sum_{k=1}^{n}\left(\tilde F^1_{{}^1u^k_t}\,{}^1u^k_x-\tilde F^2_{{}^2u^k_t}\,{}^2u^k_x\right)\right]_{x=l(t)}+\right.$$

$$\left.+\tilde F^0_l-\frac{d}{dt}\tilde F^0_{\dot l}\right\}{}^0\varphi(t)\,dt+\sum_{k=1}^{n}\int_\alpha^\beta\left\{\left[\tilde F^1_{{}^1u^k_x}-\tilde F^2_{{}^2u^k_x}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\dot l\left(\tilde F^1_{{}^1u^k_t}-\tilde F^2_{{}^2u^k_t}\right)\right]_{x=l(t)}+\tilde F^0_{{}^0u^k}-\frac{d}{dt}\tilde F^0_{{}^0\dot u^k}\right\}{}^0\psi^k(t)\,dt=0.$$

Отметим, что в этом соотношении произвольными являются лишь функции ${}^\nu\varphi$, ${}^\nu\psi^{p_\nu+1},\dots,{}^\nu\psi^n$, $\nu=1,2$ и ${}^0\varphi$, ${}^0\psi^{q+1},\dots,{}^0\psi^n$, а остальные определяются из уравнений (3.5), (3.6).

Ввиду (3.3) и (3.4), можно выбрать множители ${}^\nu\lambda^{i_\nu}(x,t)$, $i_\nu=1,\dots,p_\nu$, $\nu=1,2$ и $\mu^j(t)$, $j=1,\dots,q$, так, чтобы выполнялись соотношения

$$\tilde F^{\nu}_{{}^\nu u^{k_\nu}}-\frac{\partial}{\partial x}\tilde F^{\nu}_{{}^\nu u^{k_\nu}_x}-\frac{\partial}{\partial t}\tilde F^{\nu}_{{}^\nu u^{k_\nu}_t}=0,\quad k_\nu=1,\dots,p_\nu,\quad \nu=1,2,$$

$$\left[\tilde F^1_{{}^1u^k_x}-\tilde F^2_{{}^2u^k_x}-\dot l\left(\tilde F^1_{{}^1u^k_t}-\tilde F^2_{{}^2u^k_t}\right)\right]_{x=l(t)}+\tilde F^0_{{}^0u^k}-\frac{d}{dt}\tilde F^0_{{}^0\dot u^k}=0,\quad k=1,\dots,q.$$

Далее традиционные рассуждения приводят к теореме.

Теорема 3.I. Для того, чтобы допустимая D-согласованная пара $(l(t),\bar u(x,t))$ (т.е. D-согласованная пара $(l(t),\bar u(x,t))$, компоненты которой удовлетворяют конечным уравнениям (3.I), (3.2) при условиях (3.3), (3.4)) давала стационарное значение функционалу (I.I), необходимо, чтобы при соответствующем выборе множителей ${}^\nu\lambda^{i_\nu}(x,t)$, $i_\nu=1,\dots,p_\nu$, $\nu=1,2$ и $\mu^j(t)$, $j=1,\dots,q$, для функций $\bar u(x,t)$, ${}^\nu\lambda^{i_\nu}(x,t)$, $l(t)$, $\mu^j(t)$ выполнялись соотношения

$$F^{\nu}_{{}^{\nu}u^{\kappa}} - \frac{\partial}{\partial x} F^{\nu}_{{}^{\nu}u^{\kappa}_{x}} - \frac{\partial}{\partial t} F^{\nu}_{{}^{\nu}u^{\kappa}_{t}} + \sum_{i_\nu=1}^{p_\nu} {}^{\nu}\lambda^{i_\nu}(x,t)\,{}^{\nu}\Phi^{i_\nu}_{{}^{\nu}u^{\kappa}} = 0, \quad \kappa = 1,\dots,n, \; \nu = 1,2, \tag{3.9}$$

$${}^{\nu}\Phi^{i_\nu}(t,x,{}^{\nu}\bar{u}(x,t)) = 0, \quad i_\nu = 1,\dots,p_\nu, \quad \nu = 1,2, \tag{3.10}$$

$$\left[F^1 - F^2 - \sum_{\kappa=1}^{n}\left(F^1_{{}^1u^{\kappa}_{x}}\,{}^1u^{\kappa}_{x} - F^2_{{}^2u^{\kappa}_{x}}\,{}^2u^{\kappa}_{x}\right) + \dot{l}\sum_{\kappa=1}^{n}\left(F^1_{{}^1u^{\kappa}_{t}}\,{}^1u^{\kappa}_{x} - F^2_{{}^2u^{\kappa}_{t}}\,{}^2u^{\kappa}_{x}\right)\right]_{x=l(t)} + \tag{3.11}$$
$$+ F^0_{l} - \frac{d}{dt}F^0_{\dot{l}} + \sum_{j=1}^{q}\mu^j(t)\Psi^j_{l} = 0,$$

$$\Psi^j(t, l(t), {}^0\bar{u}(t)) = 0, \quad j = 1,\dots,q, \tag{3.12}$$

$${}^1u^{\kappa}(l(t),t) = {}^2u^{\kappa}(l(t),t) = {}^0u^{\kappa}(t), \quad \kappa = 1,\dots,n, \tag{3.13}$$

$$\left[F^1_{{}^1u^{\kappa}_{x}} - F^2_{{}^2u^{\kappa}_{x}} - \dot{l}\left(F^1_{{}^1u^{\kappa}_{t}} - F^2_{{}^2u^{\kappa}_{t}}\right)\right]_{x=l(t)} + F^0_{{}^0u^{\kappa}} - \frac{d}{dt}F^0_{{}^0\dot{u}^{\kappa}} + \tag{3.14}$$
$$+ \sum_{j=1}^{q}\mu^j(t)\Psi^j_{{}^0u^{\kappa}} = 0, \quad \kappa = 1,\dots,n.$$

Доказанная теорема позволяет осуществлять постановку смешанных задач для одномерных систем с движущимися нагрузками при наличии конечных (голономных) связей.

Рассмотрим теперь случай движущихся закреплений, законы движений которых характеризуются функциями $l_1(t)$ и $l_2(t)$ соответственно (см.п.2).

Естественно согласованную тройку $(l_1(t), l_2(t), \bar{u}(x,t))$ назовём допустимой, если её компоненты "стеснены" конечными связями вида

$$\Phi^i(t, x, \bar{u}) = 0, \quad i = 1,\dots,p \quad (p < n), \tag{3.15}$$

$${}^{\nu}\Psi^{j_\nu}(t, l_\nu, {}^{0}_{\nu}\bar{u}) = 0, \quad j_\nu = 1,\dots,q_\nu, \quad (q_\nu < n), \quad \nu = 1,2, \tag{3.16}$$

где Φ^i, $i = 1,\dots,p$, ${}^1\Psi^{j_1}$, $j_1 = 1,\dots,q_1$, ${}^2\Psi^{j_2}$, $j_2 = 1,\dots,q_2$, –

дважды непрерывно дифференцируемые функции по совокупности своих аргументов, причём выполняются условия

$$\frac{D(\Phi^1,\ldots,\Phi^p)}{D(u^1,\ldots,u^p)}\neq 0, \qquad (x,t)\in D^{(l_1,l_2)}, \tag{3.17}$$

$$\frac{D({}^{\nu}\Psi^1,\ldots,{}^{\nu}\Psi^{q_\nu})}{D({}^{\circ}_{\nu}u^1,\ldots,{}^{\circ}_{\nu}u^{q_\nu})}\neq 0, \quad t\in[\alpha,\beta],\ \nu=1,2. \tag{3.18}$$

Из предыдущих рассмотрений непосредственно следует

Т е о р е м а 3.2. Для того, чтобы допустимая естественно согласованная тройка $(l_1(t), l_2(t), \overline{u}(x,t))$ давала стационарное значение функционалу (2.1), необходимо, чтобы при соответствующем выборе множителей $\lambda^i(x,t)$, $i=1,\ldots,p$, ${}^{\nu}\mu^{j_\nu}(t)$, $j_\nu=1,\ldots,q_\nu$, $\nu=1,2$, для функций $\overline{u}(x,t)$, $\lambda^i(x,t)$, $l_1(t)$, ${}^1\mu^{j_1}(t)$, $l_2(t)$, ${}^2\mu^{j_2}(t)$ выполнялись соотношения

$$F_{u^k}-\frac{\partial}{\partial x}F_{u^k_x}-\frac{\partial}{\partial t}F_{u^k_t}+\sum_{i=1}^{p}\lambda^i(x,t)\Phi^i_{u^k}=0, \quad k=1,\ldots,n, \tag{3.19}$$

$$\Phi^i(t,x,\overline{u}(x,t))=0, \quad i=1,\ldots,p, \tag{3.20}$$

$$\left[-F+\sum_{k=1}^{n}F_{u^k_x}u^k_x-\dot{l}_1\sum_{k=1}^{n}F_{u^k_t}u^k_x\right]_{x=l_1(t)}+F^{01}_{l_1}-\frac{d}{dt}F^{01}_{\dot{l}_1}+\sum_{j_1=1}^{q_1}{}^1\mu^{j_1}(t)\,{}^1\Psi^{j_1}_{l_1}=0, \tag{3.21}$$

$${}^1\Psi^{j_1}(t,l_1(t),{}^{\circ}_{1}\overline{u}(t))=0, \quad j=1,\ldots,q_1, \tag{3.22}$$

$$\left[F-\sum_{k=1}^{n}F_{u^k_x}u^k_x+\dot{l}_2\sum_{k=1}^{n}F_{u^k_t}u^k_x\right]_{x=l_2(t)}+F^{02}_{l_2}-\frac{d}{dt}F^{02}_{\dot{l}_2}+\sum_{j_2=1}^{q_2}{}^2\mu^{j_2}(t)\,{}^2\Psi^{j_2}_{l_2}=0, \tag{3.23}$$

$${}^2\Psi^{j_2}(t,l_2(t),{}^{\circ}_{2}\overline{u}(t))=0, \quad j_2=1,\ldots,q_2, \tag{3.24}$$

$$\left[-F_{u^\kappa_x}+\dot{l}_1 F_{u^\kappa_t}\right]_{x=l_1(t)}+F^{01}_{{}^{\circ}_1u^\kappa}-\frac{d}{dt}F^{01}_{{}^{\circ}_1\dot{u}^\kappa}+$$

$$+\sum_{j_1=1}^{q_1}{}^1\mu^{j_1}(t)\,{}^1\Psi^{j_1}_{{}^{\circ}_1u^\kappa}=0,\quad \kappa=1,\dots,n, \tag{3.25}$$

$$\left[F_{u^\kappa_x}-\dot{l}_2 F_{u^\kappa_t}\right]_{x=l_2(t)}+F^{02}_{{}^{\circ}_2u^\kappa}-\frac{d}{dt}F^{02}_{{}^{\circ}_2\dot{u}^\kappa}+$$

$$+\sum_{j_2=1}^{q_2}{}^2\mu^{j_2}(t)\,{}^2\Psi^{j_2}_{{}^{\circ}_2u^\kappa}=0,\quad \kappa=1,\dots,n. \tag{3.26}$$

Эта теорема позволяет осуществлять постановку краевых задач для одномерных систем с движущимися закреплениями при наличии конечных (голономных) связей. Здесь соотношения (3.25) и (3.26) задают условия на движущихся границах.

4. Имея по-прежнему в виду указанные выше механические приложения, остановимся на функционалах с высшими производными.

Прежде всего, рассмотрим функционал вида

$$J[(l,\bar{u})]=\sum_{\nu=1}^{2}\iint_{D^{(l)}_\nu}F^\nu(x,t,{}^\nu\bar{u},{}^\nu\bar{u}_x,{}^\nu\bar{u}_t,{}^\nu\bar{u}_{xx},{}^\nu\bar{u}_{xt})\,dx\,dt+$$
$$+\int_\alpha^\beta F^0(t,l,\dot{l},{}^\circ\bar{u},{}^\circ\dot{\bar{u}},{}^\circ\bar{u}_x,{}^\circ\dot{\bar{u}}_x)\,dt. \tag{4.1}$$

Здесь F^1, F^2 и F^0 – дважды непрерывно дифференцируемые функции по совокупности своих аргументов. Как и ранее, l -допустимая кривая на D, определяемая уравнением $x=l(t)$; относительно l -допустимой функции $\bar{u}(x,t)$ сейчас дополнительно предполагается, что она имеет непрерывные частные производные первого порядка в области D, причем функции ${}^1\bar{u}(x,t)$ и ${}^2\bar{u}(x,t)$ имеют непрерывные производные до 4-го порядка включительно в областях $D^{(l)}_1$ и $D^{(l)}_2$ соответственно (сильная l -допустимость на D); ${}^\circ\bar{u}(t)\overset{\mathrm{def}}{=}{}^1\bar{u}(l(t),t)={}^1\bar{u}(l(t),t)=$

$\overset{2}{\bar{u}}(l(t),t)$, $\overset{0}{\bar{u}}_x(t) \overset{def}{=} \bar{u}_x(l(t),t) = \overset{1}{\bar{u}}_x(l(t),t) = \overset{2}{\bar{u}}_x(l(t),t)$.

Если $\bar{u}(x,t)$ - сильно l -допустимая функция на D, то упорядоченную пару функций $(l(t), \bar{u}(x,t))$ будем называть сильно D -согласованной парой. В этом случае кривая l является возможной линией. разрыва производных функции $\bar{u}(x,t)$ порядков выше первого в области D и, обратно, линией разрыва указанных производных в области D может быть только линия l.

Вариационная задача состоит в нахождении таких сильно D -согласованных пар $(l(t), \bar{u}(x,t))$, для которых первая вариация функционала (4.I) равна нулю.

Полагая

$$\begin{cases} \overset{\nu}{u}{}^{k}(x,t) = \overset{\nu}{v}{}^{k}(x,t), \\ \overset{\nu}{u}{}^{k}_{x}(x,t) = \overset{\nu}{v}{}^{n+k}(x,t), \end{cases} \quad k = 1,\dots,n; \ \nu = 1,2,$$

приходим к задаче на условный экстремум функционала

$$J[(l,\bar{v})] = \sum_{\nu=1}^{2} \iint\limits_{D_\nu^{(l)}} \overset{\nu}{F}(x,t,\overset{\nu}{\bar{v}},\overset{\nu}{\bar{v}}_x,\overset{\nu}{\bar{v}}_t)\,dx\,dt + \int_{\alpha}^{\beta} \overset{0}{F}(t,l,\dot{l},\overset{0}{\bar{v}},\overset{0}{\dot{\bar{v}}})\,dt, \tag{4.2}$$

определенного на множестве D -согласованных пар $\{(l(t), \bar{v}(x,t))\}$, при наличии связей

$$\overset{\nu}{v}{}^{i_\nu}_{x} - \overset{\nu}{v}{}^{n+i_\nu} = 0, \quad i_\nu = 1,\dots,n; \ \nu = 1,2. \tag{4.3}$$

Отметим, что $\overset{\nu}{F}$ не зависит явно от $\overset{\nu}{v}{}^{1}_{x}, \dots, \overset{\nu}{v}{}^{n}_{x}$; $\nu = 1, 2$.

Положим $$\overset{\nu}{\tilde{F}} = \overset{\nu}{F} + \sum_{i_\nu=1}^{n} \overset{\nu}{\lambda}{}^{i_\nu}(x,t)\left(\overset{\nu}{v}{}^{i_\nu}_{x} - \overset{\nu}{v}{}^{n+i_\nu}\right), \quad \nu = 1,2,$$

где $\overset{\nu}{\lambda}{}^{i_\nu}(x,t)$, $i_\nu = 1,\dots,n$; $\nu = 1, 2$ - подлежащие определению множители Лагранжа. Учитывая, что функционал (4.2) имеет вид уже рассмотренного функционала (I.I), так что можно использовать результаты п. I, приходим, что при соответствующем выборе множителей $\overset{\nu}{\lambda}{}^{i_\nu}$ для компонент искомой D-согласованной пары $(l(t), \overline{v}(x,t))$ с необходимостью выполняются следующие соотношения:

$$\tilde{F}^{\vartheta}_{\vartheta_{v^{\kappa}}} - \frac{\partial}{\partial x}\tilde{F}^{\vartheta}_{\vartheta_{v^{\kappa}_{x}}} - \frac{\partial}{\partial t}\tilde{F}^{\vartheta}_{\vartheta_{v^{\kappa}_{t}}} = 0, \quad \kappa = 1,\dots,2n, \ (x,t)\in D^{(l)}_{\vartheta}, \ \vartheta = 1,2,$$

$${}^{\vartheta}v^{i}_{x}(x,t) - {}^{\vartheta}v^{n+i}(x,t) = 0, \quad i = 1,\dots,n, \ (x,t)\in D^{(l)}_{\vartheta}, \ \vartheta = 1,2,$$

$$\left[\tilde{F}^{1} - \tilde{F}^{2} - \sum_{\kappa=1}^{2n}\left(\tilde{F}^{1}_{{}^{1}v^{\kappa}_{x}}\,{}^{1}v^{\kappa}_{x} - \tilde{F}^{2}_{{}^{2}v^{\kappa}_{x}}\,{}^{2}v^{\kappa}_{x}\right) + \dot{l}\sum_{\kappa=1}^{2n}\left(\tilde{F}^{1}_{{}^{1}v^{\kappa}_{t}}\,{}^{1}v^{\kappa}_{x} - \tilde{F}^{2}_{{}^{2}v^{\kappa}_{t}}\,{}^{2}v^{\kappa}_{x}\right)\right]_{x=l(t)} +$$

$$+ F^{0}_{l} - \frac{d}{dt}F^{0}_{\dot{l}} = 0,$$

$${}^{1}v^{\kappa}(l(t),t) = {}^{2}v^{\kappa}(l(t),t) = {}^{0}v^{\kappa}(t), \quad \kappa = 1,\dots,2n,$$

$$\left[\tilde{F}^{1}_{{}^{1}v^{\kappa}_{x}} - \tilde{F}^{2}_{{}^{2}v^{\kappa}_{x}} - \dot{l}\left(\tilde{F}^{1}_{{}^{1}v^{\kappa}_{t}} - \tilde{F}^{2}_{{}^{2}v^{\kappa}_{t}}\right)\right]_{x=l(t)} +$$

$$+ F^{0}_{{}^{0}v^{\kappa}} - \frac{d}{dt}F^{0}_{{}^{0}\dot{v}^{\kappa}} = 0, \quad \kappa = 1,\dots,2n.$$

Осуществляя исключение множителей Лагранжа и переходя к исходным обозначениям, приходим к теореме.

Т е о р е м а 4.I. Для того, чтобы сильно D-согласованная пара $(l(t), \overline{u}(x,t))$ давала стационарное значение функционалу (4.I), необходимо, чтобы выполнялись соотношения

$$F^{\vartheta}_{\vartheta_{u^{\kappa}}} - \frac{\partial}{\partial x}F^{\vartheta}_{\vartheta_{u^{\kappa}_{x}}} - \frac{\partial}{\partial t}F^{\vartheta}_{\vartheta_{u^{\kappa}_{t}}} + \frac{\partial^{2}}{\partial x^{2}}F^{\vartheta}_{\vartheta_{u^{\kappa}_{xx}}} + \frac{\partial^{2}}{\partial x\partial t}F^{\vartheta}_{\vartheta_{u^{\kappa}_{xt}}} = 0, \qquad (4.4)$$

$$\kappa = 1,\dots,n, \quad \vartheta = 1,2;$$

$$\Big\{ F^1 - F^2 - \sum_{k=1}^{n} \Big(F^1_{{}^1u^k_x}\,{}^1u^k_x + F^1_{{}^1u^k_{xx}}\,{}^1u^k_{xx} - {}^1u^k_x \frac{\partial}{\partial x} F^1_{{}^1u^k_{xx}} - {}^1u^k_x \frac{\partial}{\partial t} F^1_{{}^1u^k_{xt}} -$$

$$- F^2_{{}^2u^k_x}\,{}^2u^k_x - F^2_{{}^2u^k_{xx}}\,{}^2u^k_{xx} + {}^2u^k_x \frac{\partial}{\partial x} F^2_{{}^2u^k_{xx}} + {}^2u^k_x \frac{\partial}{\partial t} F^2_{{}^2u^k_{xt}} \Big) + \tag{4.5}$$

$$+ \dot{l} \sum_{k=1}^{n} \Big(F^1_{{}^1u^k_t}\,{}^1u^k_x + F^1_{{}^1u^k_{xt}}\,{}^1u^k_{xx} - F^2_{{}^2u^k_t}\,{}^2u^k_x - F^2_{{}^2u^k_{xt}}\,{}^2u^k_{xx} \Big) \Big\}_{x=l(t)} + F^0_l - \frac{d}{dt} F^0_{\dot{l}} = 0;$$

$${}^1u^k(l(t),t) = {}^2u^k(l(t),t) = {}^0u^k(t), \quad k = 1,\dots,n; \tag{4.6}$$

$$\Big[F^1_{{}^1u^k_x} - \frac{\partial}{\partial x} F^1_{{}^1u^k_{xx}} - \frac{\partial}{\partial t} F^1_{{}^1u^k_{xt}} - F^2_{{}^2u^k_x} + \frac{\partial}{\partial x} F^2_{{}^2u^k_{xx}} + \frac{\partial}{\partial t} F^2_{{}^2u^k_{xt}} - \tag{4.7}$$

$$- \dot{l} \big(F^1_{{}^1u^k_t} - F^2_{{}^2u^k_t} \big) \Big]_{x=l(t)} + F^0_{{}^0u^k} - \frac{d}{dt} F^0_{{}^0\dot{u}^k} = 0, \quad k = 1,\dots,n;$$

$${}^1u^k_x(l(t),t) = {}^2u^k_x(l(t),t) = {}^0u^k_x(t), \quad k = 1,\dots,n; \tag{4.8}$$

$$\Big[F^1_{{}^1u^k_{xx}} - F^2_{{}^2u^k_{xx}} - \dot{l} \big(F^1_{{}^1u^k_{xt}} - F^2_{{}^2u^k_{xt}} \big) \Big]_{x=l(t)} + \tag{4.9}$$

$$+ F^0_{{}^0u^k_x} - \frac{d}{dt} F^0_{{}^0\dot{u}^k_x} = 0, \quad k = 1,\dots,n.$$

Доказанная теорема позволяет осуществлять постановку смешанных задач для одномерных систем с движущимися нагрузками. При этом, соотношения (4.4) задают дифференциальные уравнения для компонент вектор-функции $u(x,t)$, характеризующих поведение распределенной системы, соотношение (4.5) задает дифференциальное уравнение для функции $l(t)$, характеризующей закон движения нагрузки, а соотношения (4.6) – (4.9) являются условиями сопряжения.

Если для l-допустимой функции $\bar{u}(x,t)$ не требовать непрерывности частных производных первого порядка в области D (слабая l-допустимость на D), то приходим к функционалам вида

$$J[(l,\bar{u})]=\sum_{\nu=1}^{2}\iint\limits_{D_\nu^{(l)}} F^\nu(x,t,{}^\nu\bar{u},{}^\nu\bar{u}_x,{}^\nu\bar{u}_t,{}^\nu\bar{u}_{xx},{}^\nu\bar{u}_{xt})\,dx\,dt+$$

$$+\int_\alpha^\beta F^0(t,\,l,\,\dot{l},\,{}^0\bar{u},\,{}^0\dot{\bar{u}},\,{}^{01}\bar{u}_x,\,{}^{01}\dot{\bar{u}}_x,\,{}^{02}\bar{u}_x,\,{}^{02}\dot{\bar{u}}_x)\,dt; \tag{4.10}$$

здесь ${}^{0\nu}\bar{u}_x(t)\overset{def}{=}{}^0\bar{u}_x(l(t),t),\quad \nu=1,2.$

Вариационная задача состоит в нахождении таких слабо D-согласованных пар $(l(t),\bar{u}(x,t))$, для которых первая вариация функционала (4.10) равна нулю.

Полагая

$$\begin{cases} {}^\nu u^k(x,t)={}^\nu v^k(x,t), & \nu=1,\,2 \\ {}^1u_x^k(x,t)={}^1v^{n+k}(x,t), & k=1,\dots,n \\ {}^2u_x^k(x,t)={}^2v^{2n+k}(x,t) & , \end{cases}$$

приходим к задаче на условный экстремум функционала

$$J|(l,\bar{v})|=\sum_{\nu=1}^{2}\iint\limits_{D_\nu^{(l)}} F^\nu(x,t,{}^\nu\bar{v},{}^\nu\bar{v}_x,{}^\nu\bar{v}_t)\,dx\,dt+\int_\alpha^\beta F^0(t,l,\dot{l},{}^0\bar{v},{}^0\dot{\bar{v}})\,dt,$$

определенного на множестве D-согласованных пар $\{(l(t),\,\bar{v}(x,t))\}$, при наличии связей

$${}^1v_x^{i_1}-{}^1v^{n+i_1}=0,\quad i_1=1,\dots,n,$$

$${}^2v_x^{i_2}-{}^2v^{2n+i_2}=0,\quad i_2=1,\dots,n.$$

Отметим, что F^1 не зависит явно от ${}^1v^{2n+1},\dots,{}^1v^{3n}$, ${}^1v_x^1,\dots$ ${}^1v_x^n$, ${}^1v_x^{2n+1},\dots,{}^1v_x^{3n}$, ${}^1v_t^{2n+1},\dots,{}^1v_t^{3n}$, а F^2 не зависит явным образом от ${}^2v^{n+1},\dots,{}^2v^{2n},\ {}^2v_x^1,\dots,{}^2v_x^{2n},\ {}^2v_t^{n+1},\dots,{}^2v_t^{2n}$.

Рассуждая как и ранее, приходим к следующей теореме.

Теорема 4.2. Для того, чтобы слабо D –согласованная пара $(l(t),\ \overline{u}(x,t))$ давала стационарное значение функционалу (4.10), необходимо, чтобы выполнялись соотношения

$$F^{\nu}_{{}^\nu u^k}-\frac{\partial}{\partial x}F^{\nu}_{{}^\nu u^k_x}-\frac{\partial}{\partial t}F^{\nu}_{{}^\nu u^k_t}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}F^{\nu}_{{}^\nu u^k_{xx}}+\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial t}F^{\nu}_{{}^\nu u^k_{xt}}=0,$$
$$k=1,\dots,n,\quad (x,t)\in D^{(l)}_{\nu},\quad \nu=1,2; \tag{4.11}$$

$$\Big\{F^1-F^2-\sum_{k=1}^{n}\Big(F^1_{{}^1u^k_x}\,{}^1u^k_x+F^1_{{}^1u^k_{xx}}\,{}^1u^k_{xx}-{}^1u^k_x\frac{\partial}{\partial x}F^1_{{}^1u^k_{xx}}-{}^1u^k_x\frac{\partial}{\partial t}F^1_{{}^1u^k_{xt}}-$$
$$-F^2_{{}^2u^k_x}\,{}^2u^k_x-F^2_{{}^2u^k_{xx}}\,{}^2u^k_{xx}+{}^2u^k_x\frac{\partial}{\partial x}F^2_{{}^2u^k_{xx}}+{}^2u^k_x\frac{\partial}{\partial t}F^2_{{}^2u^k_{xt}}\Big)+ \tag{4.12}$$
$$+\dot{l}\sum_{k=1}^{n}\Big(F^1_{{}^1u^k_t}\,{}^1u^k_x+F^1_{{}^1u^k_{xt}}\,{}^1u^k_{xx}-F^2_{{}^2u^k_t}\,{}^2u^k_x-F^2_{{}^2u^k_{xt}}\,{}^2u^k_{xx}\Big)\Big\}_{x=l(t)}+$$
$$+F^0_l-\frac{d}{dt}F^0_{\dot{l}}=0;$$

$${}^1u^k(l(t),t)={}^2u^k(l(t),t)={}^0u^k(t),\quad k=1,\dots,n; \tag{4.13}$$

$$\Big[F^1_{{}^1u^k_x}-\frac{\partial}{\partial x}F^1_{{}^1u^k_{xx}}-\frac{\partial}{\partial t}F^1_{{}^1u^k_{xt}}-F^2_{{}^2u^k_x}+\frac{\partial}{\partial x}F^2_{{}^2u^k_{xx}}+\frac{\partial}{\partial t}F^2_{{}^2u^k_{xt}}-$$
$$-\dot{l}\big(F^1_{{}^1u^k_t}-F^2_{{}^2u^k_t}\big)\Big]_{x=l(t)}+F^0_{{}^0u^k}-\frac{d}{dt}F^0_{{}^0\dot{u}^k}=0,\quad k=1,\dots,n; \tag{4.14}$$

$$\left[F^1_{{}_1u^k_{xx}} - \dot{l}\, F^1_{{}_1u^k_{xt}}\right]_{x=l(t)} + F^0_{01u^k_x} - \frac{d}{dt} F^0_{01\dot{u}^k_x} = 0, \qquad k = 1,\dots,n; \quad (4.15)$$

$$\left[-F^2_{{}_2u^k_{xx}} + \dot{l}\, F^2_{{}_2u^k_{xt}}\right]_{x=l(t)} + F^0_{02u^k_x} - \frac{d}{dt} F^0_{02\dot{u}^k_x} = 0, \qquad k = 1,\dots,n. \quad (4.16)$$

Функционалы с высшими производными, отвечающие случаю движущихся закреплений (ср. п.2), имеют вид

$$J[(l_1, l_2, \bar{u})] = \iint\limits_{D^{(l_1,l_2)}} F(x, t, \bar{u}, \bar{u}_x, \bar{u}_t, \bar{u}_{xx}, \bar{u}_{xt})\, dx\, dt + \sum_{\nu=1}^{2} \int_{\alpha}^{\beta} F^{0\nu}(t, l_\nu, \dot{l}_\nu, {}^0_\nu\bar{u}, {}^0_\nu\dot{\bar{u}}, {}^0_\nu\bar{u}_x, {}^0_\nu\dot{\bar{u}}_x)\, dt. \quad (4.17)$$

Здесь F, F^{01} и F^{02} – дважды непрерывно дифференцируемые функции по совокупности своих аргументов. Функционал (4.17) определён на множестве естественно согласованных троек $\{(l_1(t), l_2(t), \bar{u}(x,t))\}$, причем предполагается, что (l_1, l_2)-допустимая функция $\bar{u}(x,t)$ четырежды непрерывно дифференцируема в области $D^{(l_1,l_2)}$; ${}^0_\nu\bar{u}(t) \overset{def}{=} \bar{u}(l_\nu(t),t)$, ${}^0_\nu\bar{u}_x(t) \overset{def}{=} \bar{u}_x(l_\nu(t),t)$, $\nu = 1, 2$.

Из предыдущих рассмотрений непосредственно следует

Т е о р е м а 4.3. Для того, чтобы естественно согласованная тройка $(l_1(t), l_2(t), \bar{u}(x,t))$ давала функционалу (4.17) стационарное значение, необходимо, чтобы для функций $\bar{u}(x,t)$, $l_1(t)$ и $l_2(t)$ выполнялись соотношения

$$F_{u^k} - \frac{\partial}{\partial x} F_{u^k_x} - \frac{\partial}{\partial t} F_{u^k_t} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} F_{u^k_{xx}} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} F_{u^k_{xt}} = 0, \quad (4.18)$$

$$k = 1,\dots,n, \quad (x,t) \in D^{(l_1,l_2)};$$

$$\Big[-F+\sum_{\kappa=1}^{n}\Big(F_{u_x^\kappa}u_x^\kappa+F_{u_{xx}^\kappa}u_{xx}^\kappa-u_x^\kappa\frac{\partial}{\partial x}F_{u_{xx}^\kappa}-u_x^\kappa\frac{\partial}{\partial t}F_{u_{xt}^\kappa}\Big)-$$

$$-\dot{l}_1\sum_{\kappa=1}^{n}\Big(F_{u_t^\kappa}u_x^\kappa+F_{u_{xt}^\kappa}u_{xx}^\kappa\Big)\Big]_{x=l_1(t)}+F_{l_1}^{01}-\frac{d}{dt}F_{\dot{l}_1}^{01}=0; \tag{4.19}$$

$$\Big[F-\sum_{\kappa=1}^{n}\Big(F_{u_x^\kappa}u_x^\kappa+F_{u_{xx}^\kappa}u_{xx}^\kappa-u_x^\kappa\frac{\partial}{\partial x}F_{u_{xx}^\kappa}-u_x^\kappa\frac{\partial}{\partial t}F_{u_{xt}^\kappa}\Big)+$$

$$+\dot{l}_2\sum_{\kappa=1}^{n}\Big(F_{u_t^\kappa}u_x^\kappa+F_{u_{xt}^\kappa}u_{xx}^\kappa\Big)\Big]_{x=l_2(t)}+F_{l_2}^{02}-\frac{d}{dt}F_{\dot{l}_2}^{02}=0; \tag{4.20}$$

$$\Big[-F_{u_x^\kappa}+\frac{\partial}{\partial x}F_{u_{xx}^\kappa}+\frac{\partial}{\partial t}F_{u_{xt}^\kappa}+\dot{l}_1F_{u_t^\kappa}\Big]_{x=l_1(t)}+ \tag{4.21}$$

$$+F_{\overset{\circ}{u}{}_1^\kappa}^{01}-\frac{d}{dt}F_{\dot{\overset{\circ}{u}}{}_1^\kappa}^{01}=0,\quad \kappa=1,\dots,n;$$

$$\Big[-F_{u_{xx}^\kappa}+\dot{l}_1F_{u_{xt}^\kappa}\Big]_{x=l_1(t)}+F_{\overset{\circ}{u}{}_{1x}^\kappa}^{01}-\frac{d}{dt}F_{\dot{\overset{\circ}{u}}{}_{1x}^\kappa}^{01}=0,\qquad \kappa=1,\dots,n; \tag{4.22}$$

$$\Big[F_{u_x^\kappa}-\frac{\partial}{\partial x}F_{u_{xx}^\kappa}-\frac{\partial}{\partial t}F_{u_{xt}^\kappa}-\dot{l}_2F_{u_t^\kappa}\Big]_{x=l_2(t)}+ \tag{4.23}$$

$$+F_{\overset{\circ}{u}{}_2^\kappa}^{02}-\frac{d}{dt}F_{\dot{\overset{\circ}{u}}{}_2^\kappa}^{02}=0,\quad \kappa=1,\dots,n;$$

$$\Big[F_{u_{xx}^\kappa}-\dot{l}_2F_{u_{xt}^\kappa}\Big]_{x=l_2(t)}+F_{\overset{\circ}{u}{}_{2x}^\kappa}^{02}-\frac{d}{dt}F_{\dot{\overset{\circ}{u}}{}_{2x}^\kappa}^{02}=0,\quad \kappa=1,\dots,n; \tag{4.24}$$

Эта теорема позволяет осуществлять постановку краевых задач для одномерных систем с движущимися закреплениями. Здесь соотношения (4.2I) - (4.24) задают естественные условия на движущихся границах.

5. Как мы видели, соотношения (I.4) - (I.7) определяют поведение системы (распред. сист.+движ. нагрузка), рассмотренной в п. I. Выясним физический смысл этих соотношений.

Поскольку каждая из величин

$$ {}^{\vartheta}p^{\kappa}(x,t) = F^{\vartheta}_{{}^{\vartheta}u^{\kappa}_{t}}\,, \quad \kappa = 1,\dots,n\,;\ \vartheta = 1,\,2 \tag{5.1} $$

представляет собой плотность обобщенного импульса, соответствующего обобщенной координате ${}^{\vartheta}u^{\kappa}$ распределенной системы,

$$ {}^{\vartheta}Q^{\kappa}(x,t) = F^{\vartheta}_{{}^{\vartheta}u^{\kappa}}\,, \quad \kappa = 1,\dots,n\,;\ \vartheta = 1,\,2 \tag{5.2} $$

- плотность внешней потенциальной силы, а

$$ {}^{\vartheta}T^{\kappa}(x,t) = F^{\vartheta}_{{}^{\vartheta}u^{\kappa}_{x}}\,, \quad \kappa = 1,\dots,n\,;\ \vartheta = 1,\,2 \tag{5.3} $$

- внутреннюю потенциальную силу в сечении x , то соотношения (I.4) выражают локальные законы изменения указанных обобщенных импульсов

$$ \frac{\partial}{\partial t}{}^{\vartheta}p^{\kappa} + \frac{\partial}{\partial x}{}^{\vartheta}T^{\kappa} = {}^{\vartheta}Q^{\kappa}, \quad \kappa = 1,\dots,n,\ \vartheta = 1,2. \tag{5.4} $$

Учитывая (I.4), нетрудно убедиться в справедливости соотношений

$$ \frac{\partial}{\partial t}\Big(\sum_{\kappa=1}^{n}{}^{\vartheta}u^{\kappa}_{t}F^{\vartheta}_{{}^{\vartheta}u^{\kappa}_{t}} - F^{\vartheta}\Big) + \frac{\partial}{\partial x}\sum_{\kappa=1}^{n}{}^{\vartheta}u^{\kappa}_{t}F^{\vartheta}_{{}^{\vartheta}u^{\kappa}_{x}} = -F^{\vartheta}_{t}\,; \tag{5.5} $$

$$ -\frac{\partial}{\partial t}\sum_{\kappa=1}^{n}{}^{\vartheta}u^{\kappa}_{x}F^{\vartheta}_{{}^{\vartheta}u^{\kappa}_{t}} + \frac{\partial}{\partial x}\Big(F^{\vartheta} - \sum_{\kappa=1}^{n}{}^{\vartheta}u^{\kappa}_{x}F^{\vartheta}_{{}^{\vartheta}u^{\kappa}_{x}}\Big) = F^{\vartheta}_{x}\,. \tag{5.6} $$

В соответствии с обычной формулой, связывающей обобщенную энергию с функцией Лагранжа, величина

$$h^{\nu}(x,t)=\sum_{k=1}^{n}{}^{\nu}u_t^k F^{\nu}_{{}^{\nu}u_t^k}-F^{\nu}, \qquad \nu = 1,\ 2 \tag{5.7}$$

есть плотность обобщенной энергии распределенной системы. Для стационарной и однородной системы ($F_t^{\nu}=F_x^{\nu}=0$) соотношение (5.5) выражает закон изменения энергии в элементе распределенной системы за счет её потока через границы элемента. Следовательно, величину

$$S^{\nu}(x,t)=\sum_{k=1}^{n}{}^{\nu}u_t^k F^{\nu}_{{}^{\nu}u_x^k}, \qquad \nu = 1,\ 2 \tag{5.8}$$

надо рассматривать как поток волновой энергии.

Далее, величина

$$T^{\nu}(x,t)=F^{\nu}-\sum_{k=1}^{n}{}^{\nu}u_x^k F^{\nu}_{{}^{\nu}u_x^k}, \qquad \nu = 1,\ 2 \tag{5.9}$$

есть сила волнового давления в сечении x , а

$$P^{\nu}(x,t)=-\sum_{k=1}^{n}{}^{\nu}u_x^k F^{\nu}_{{}^{\nu}u_t^k}, \qquad \nu = 1,\ 2 \tag{5.10}$$

– плотность импульса волны.

Таким образом, соотношения (5.5) и (5.6) выражают локальные законы изменения энергии и импульса волны

$$\frac{\partial h^{\nu}}{\partial t}+\frac{\partial S^{\nu}}{\partial x}=W^{\nu}, \qquad \nu = 1,\ 2; \tag{5.11}$$

$$\frac{\partial p^{\nu}}{\partial t}+\frac{\partial T^{\nu}}{\partial x}=Q^{\nu}, \qquad \nu = 1,\ 2; \tag{5.12}$$

здесь

$$W^{\nu}(x,t)=-F_t^{\nu}, \qquad \nu = 1,\ 2 \tag{5.13}$$

– плотность мощности источника, изменяющего параметры распределенной системы, а

$$Q^{\nu}(x,t)=F_x^{\nu}, \qquad \nu = 1,\ 2 \tag{5.14}$$

– плотность силы волнового давления, обусловленного распределенным отражением.

Что касается соотношения (I.5) и (I.7), то они выражают собой законы изменения импульсов нагрузки

$$\frac{d}{dt}p^{0}=[T]-\dot{l}\,[p]+Q^{0}\,; \qquad (5.15)$$

$$\frac{d}{dt}{}^{0}p^{\kappa}=[T^{\kappa}]-\dot{l}\,[p^{\kappa}]+{}^{0}Q^{\kappa}\,, \quad \kappa=1,\dots,n\,; \qquad (5.16)$$

здесь $p^{0}=F^{0}_{\dot{l}}$, ${}^{0}p^{\kappa}=F^{0}_{{}^{0}\dot{u}^{\kappa}}$ – обобщенные импульсы нагрузки, а $Q^{0}=F^{0}_{l}$, ${}^{0}Q^{\kappa}=F^{0}_{{}^{0}u^{\kappa}}$ – обобщенные потенциальные силы. Скобка $[A(x,t)]$ обозначает разность $A^{1}(l(t),t)-A^{2}(l(t),t)$.

Наконец, соотношение (I.6) является условием непрерывности среды.

Отметим, что закон изменения энергии нагрузки имеет вид

$$\frac{d}{dt}h^{0}=[S]-\dot{l}\,[h]+W^{0}, \qquad (5.17)$$

где $h^{0}=\dot{l}F^{0}_{\dot{l}}+\sum\limits_{\kappa=1}^{n}{}^{0}\dot{u}^{\kappa}F^{0}_{{}^{0}\dot{u}^{\kappa}}-F^{0}$ – полная энергия нагрузки, а $W^{0}=-F^{0}_{t}$ – мощность сил, изменяющих параметры нагрузки.

Для системы в целом справедливы следующие интегральные законы измерения энергии и импульсов:

$$\frac{d}{dt}H=S^{1}(a,t)-S^{2}(b,t)+\int\limits_{a}^{l(t)}W^{1}dx+\int\limits_{l(t)}^{b}W^{2}dx+W^{0}\,; \qquad (5.18)$$

$$\frac{d}{dt}P=T^{1}(a,t)-T^{2}(b,t)+\int\limits_{a}^{l(t)}Q^{1}dx+\int\limits_{l(t)}^{b}Q^{2}dx+Q^{0}\,; \qquad (5.19)$$

$$\frac{d}{dt}P^{\kappa}={}^{1}T^{\kappa}(a,t)-{}^{2}T^{\kappa}(b,t)+\int\limits_{a}^{l(t)}{}^{1}Q^{\kappa}dx+\int\limits_{l(t)}^{b}{}^{2}Q^{\kappa}dx+{}^{0}Q^{\kappa}, \qquad (5.20)$$

$$\kappa=1,\dots,n\,;$$

здесь $H = \int_a^{l(t)} h^1 dx + \int_{l(t)}^b h^2 dx + h^0$ — полная энергия системы,

$$P = \int_a^{l(t)} p^1 dx + \int_{l(t)}^b p^2 dx + p^0$$ — полный волновой импульс системы,

$$P^k = \int_a^{l(t)} {}^1p^k dx + \int_{l(t)}^b {}^2p^k dx + \overset{0}{p}{}^k, \quad k = 1, \ldots, n$$ — обобщенные импульсы

системы, соответствующие координатам u^k.

Литература

1. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. – М.: Наука, 1967.
2. Ишлинский А.Ю. Об уравнении продольных движений каната (упругой нити) переменной длины. – ДАН СССР, 1954, т. XCV, № 5.
3. Горошко О.А., Савин Г.Н. Введение в механику деформируемых одномерных тел переменной длины. – Киев: Наукова думка, 1971.
4. Светлицкий В.А. Передачи с гибкой связью. – М.: Машиностроение, 1967.
5. Островский Л.А. Степанов Н.С. Нерезонансные параметрические явления в распределенных системах (обзор). – Изв. вузов – Радиофизика, 1971, т. 14, № 4, с. 489.
6. Неронов Н.П. О некоторых вопросах, связанных с определением напряжений в подъемных канатах. – Прикладная математика и механика, 1940, т. IV, вып. 2, с. 59.
7. Островский Л.А. Некоторые общие соотношения для волн на движущейся границе раздела двух сред. – ЖЭТФ, 1970, т. 61, № 2(18), с. 551.

Дата поступления статьи
30 июля 1982 г.

Веселицкий Александр Иванович

Каплан Лев Эльевич

Крысов Сергей Васильевич

Уткин Геннадий Александрович

САМОСОГЛАСОВАННЫЕ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ ОДНОМЕРНЫХ СИСТЕМ С ДВИЖУЩИМИСЯ НАГРУЗКАМИ И ЗАКРЕПЛЕНИЯМИ

Подписано в печать 14.10.82. МЦ 00331. Формат 60 х 84 / 16.

Бумага писчая. Печать офсетная. Объем 1,45 усл.печ.л. Тираж 120.

Заказ 2867. Бесплатно.

Отпечатано на ротапринте Горьковского научно-исследовательского радиофизического института 603600 Горький ГСП-51, ул.Лядова 25/14, т. 38-09-81 д.5-09.