

Министерство высшего и среднего специального образования РСФСР
Ордена Трудового Красного Знамени
научно-исследовательский радиофизический институт (НИРФИ)

П р е п р и н т № 160

ИЗЛУЧЕНИЕ УПРУГИХ ВОЛН В ОДНОМЕРНЫХ
СИСТЕМАХ РАВНОМЕРНО-ДВИЖУЩИМИСЯ ИСТОЧНИКАМИ

А.И.Весницкий

С.В.Крысов

С.А.Сьянов

Г.А.Уткин

Г о р ь к и й 1989

В последние годы в связи с ростом скоростей работы соответствующих машин и механизмов активизировался интерес к исследованию явления излучения упругих волн движущимися источниками. Этот интерес обусловлен ещё и тем, что возможные при этом эффекты (резонанс, тормозное излучение и излучение Вавилова-Черенкова) в силу специфики дисперсии упругих систем, имеют некоторые особенности и оказываются тесно связанными с такими техническими проблемами, как, например, проблема критических скоростей движения нагрузок.

В данной работе на примере одномерных упругих систем рассмотрено излучение волн равномерно-движущимися источниками, характеризующимися как гармонической вынуждающей силой, так и собственной степенью свободы. Проводится кинематический анализ качественно-различных случаев излучения волн и определены критические скорости движения нагрузок как условия проявления резонанса системы.

I. Введение

Рассмотрим явление излучения волн в одномерной упругой системе равномерно-движущимся источником. Пусть слева и справа от источника система однородна и характеризуется соответствующими плотностями функций Лагранжа $F^{\nu}(t, x, \overset{\nu}{u}, \overset{\nu}{u}_x, \overset{\nu}{u}_t)$, где $\nu = 1, 2$, $\overset{\nu}{u}(x, t)$ - вектор смещений, а источник характеризуется функцией Лагранжа $F^{\circ}(x, t, \overset{\circ}{u}, \overset{\circ}{u}_x, \overset{\circ}{u}_t, \overset{\circ}{u}_x, \overset{\circ}{u}_t, \bar{y}(t), \dot{\bar{y}}(t))$, где $\overset{\circ}{u}$ - значение вектора $\overset{\nu}{u}(x, t)$ при $x = Vt$, $\bar{y}(t)$ - вектор, определяющий собственные степени свободы источника. Тогда для отыскания функций $\overset{\nu}{u}(x, t)$ и $\bar{y}(t)$ получаем следующую систему уравнений [1]:

$$F_{\overset{\nu}{u}_k}^{\nu} - \frac{\partial}{\partial x} F_{\overset{\nu}{u}_x}^{\nu} - \frac{\partial}{\partial t} F_{\overset{\nu}{u}_t}^{\nu} = 0 \quad (I.1)$$

с условиями согласования при $x = Vt$

$$\overset{1}{u}(x, t)|_{x=Vt} = \overset{2}{u}(x, t)|_{x=Vt} = \overset{\circ}{u} \quad (I.2)$$

$$\left[F_x^k - V F_{\overset{\circ}{u}_k}^{\circ} \right]_1 + F_{\overset{\circ}{u}_k}^{\circ} - \frac{d}{dt} F_{\dot{\bar{y}}_k}^{\circ} = P(t) \quad (I.3)$$

$$F_{\dot{\bar{y}}_k}^{\circ} - \frac{d}{dt} F_{\bar{y}_k}^{\circ} = 0, \quad (I.4)$$

где $P(t)$ - внешнее воздействие на границу.

Выражение (I.2) является условием непрерывности распределённой системы, (I.3), (I.4) выражает баланс обобщённых сил при $x = Vt$, причём (I.4) является уравнением движения источника относительно его координат $\bar{y}(t)$.

Полагая систему (I.1) линейной, вынуждающее воздействие гармоническим $P \exp(i\Omega t)$, а процесс колебаний установившимся, решение задачи (I.1) - (I.4) будем искать в виде

$$\bar{u} = A \exp [i(\omega t + kx)] \quad (I.5)$$

$$\bar{y} = B \exp(i\Omega t). \quad (I.6)$$

Причём среди решений (I.5) физически реализуемыми будем считать лишь те, которые соответствуют ограниченным решениям $\bar{u}(x, t)$ на бесконечности

$$|\bar{u}(x, t)| < \infty \quad \text{при } x \rightarrow \pm \infty \quad (I.7)$$

и удовлетворяют условию излучения Мандельштама [2]

$${}^1 V_{rp} < V, \quad {}^2 V_{rp} > V \quad (I.8)$$

где $V_{rp} = d\omega/dk$ - скорость переноса энергии.

Для определения частот и волновых чисел возбуждаемых волн имеем систему алгебраических уравнений

$$f(k, \omega) = 0.$$

$${}^1 \omega + V {}^1 k = \Omega,$$

первое из которых определяет дисперсионные свойства системы, а второе выражает равенство фаз волн (I.5) фазе вынуждающего воздействия и известно в электродинамике движущихся сред как кинематический инвариант [3]. Заметим, что значения ${}^1 \omega$ и ${}^1 k$ могут быть как действительными, так и комплексными. В случае комплексных ${}^1 \omega$, ${}^1 k$ среди решений (I.5) следует оставить лишь те, которые удовлетворяют условию (I.7). При действительных же ${}^1 \omega$, ${}^1 k$ выбор физически реализуемых решений производится с помощью условия (I.8).

Амплитуды A, B при известных ω и k находятся из системы урав-

нений, определяемой условиями согласования (I.2) - (I.4).

2. Излучение волн в балке Тимошенко движущейся нагрузкой

Рассмотрим однородный бесконечный стержень, лежащий на упругом основании, вдоль которого с постоянной скоростью V движется нагрузка, действие которой характеризуется гармонической силой $P(t) = p_0 e^{i\Omega t}$ (см. рис. I).

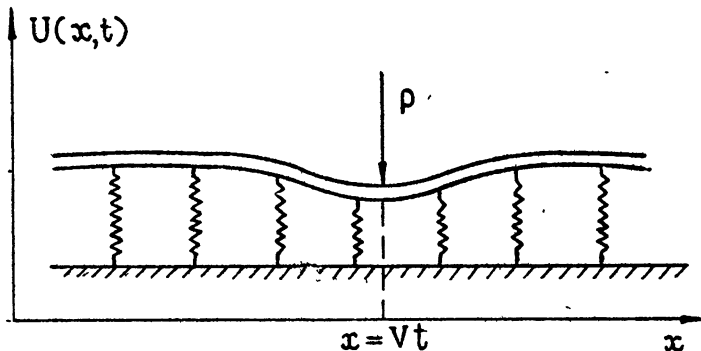


Рис. I

Колебания стержня, согласно уточнённой теории Тимошенко [4], описываются системой уравнений

$$\begin{aligned} u_{tt} - c_s^2 u_{xx} + \omega_k^2 u &= -c_s^2 \varphi_x \\ \varphi_{tt} - c_p^2 \varphi_{xx} + d^2 c_s^2 \varphi &= c_s^2 d^2 u_x \end{aligned} \quad (2.1)$$

с условиями на движущейся границе [5] $x = Vt$, $V > 0$

$$\begin{aligned} \overset{II}{u} = \overset{I}{u}, \quad \overset{II}{\varphi} = \overset{I}{\varphi}, \quad V(\overset{II}{u}_t - \overset{I}{u}_t) + c_s^2 (\overset{II}{u}_x - \overset{I}{u}_x) &= P \exp(i\Omega t), \\ V(\overset{II}{\varphi}_t - \overset{I}{\varphi}_t) + c_p^2 (\overset{II}{\varphi}_x - \overset{I}{\varphi}_x) &= 0, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где $u(x, t)$, $\varphi(x, t)$ - функции, определяющие соответственно поперечные смещения и углы поворота сечений стержня, $c_p = (E \cdot \rho \cdot F^{-1})^{1/2}$ - скорость продольных волн, $c_s = \chi^{1/2} c$, $c = (G \cdot \rho \cdot F^{-1})^{1/2}$ -

скорость сдвиговых волн, χ - коэффициент Тимошенко, $\alpha^2 = F J^{-1}$, F - площадь поперечного сечения, J - момент инерции, ω_* - наименьшая частота колебаний стержня, ρ - плотность, $P = P_0 \rho^{-1} F^{-1}$, P_0 - максимальное значение силы. Индексы I, II различают функции $\varphi(x, t)$ и $u(x, t)$ соответственно слева и справа от границы $x = Vt$.

Первые два уравнения в (2.2) есть условия непрерывности, два последних - уравнения баланса обобщённых сил.

Полагая

$$\varphi(x, t) = W_{tt} - c_s^2 W_{xx} + \omega_*^2 W,$$

$$u(x, t) = -c_s^2 W_x,$$

перейдём к односкалярному описанию задачи (2.1), (2.2)

$$(\omega_*^2 + \alpha^2 c_s^2) W_{tt} - \omega_*^2 c_p^2 W_{xx} + \square_c \square_s W + \alpha^2 c_s^2 \omega_*^2 W = 0, \quad (2.3)$$

$$\square_c = D_{tt} - c^2 D_{xx} \quad - \text{оператор Даламбера,}$$

$$\begin{aligned} \text{II } W_x \Big|_{x=Vt} = \text{I } W_x \Big|_{x=Vt} & \cdot \left[(\text{II } W_{tt} - \text{I } W_{tt}) - c_s^2 (\text{II } W_{xx} - \text{I } W_{xx}) \right. \\ & \left. + \omega_*^2 (\text{II } W - \text{I } W) \right] \Big|_{x=Vt} = 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\left[V (\text{II } W_{xt} - \text{I } W_{xt}) + c_s^2 (\text{II } W_{xx} - \text{I } W_{xx}) \right] \Big|_{x=Vt} = P c_s^{-2} \exp(i\Omega t),$$

$$\left\{ V \left[(\text{II } W_{ttt} - \text{I } W_{ttt}) - c_s^2 (\text{II } W_{xxt} - \text{I } W_{xxt}) + \omega_*^2 (\text{II } W_t - \text{I } W_t) \right] + \right.$$

$$-c_p^2 \left[\left({}^{\text{II}}W_{ttx} - {}^{\text{I}}W_{ttx} \right) - c_s^2 \left({}^{\text{II}}W_{xxx} - {}^{\text{I}}W_{xxx} \right) + \omega_*^2 \left({}^{\text{II}}W_x - {}^{\text{I}}W_x \right) \right] \Big|_{x=Vt} = 0.$$

Считая процесс возбуждения колебаний стержня установившимся, решение задачи (2.3), (2.4) будем искать в виде бегущих волн

$${}^{\nu}W(x, t) = {}^{\nu}A \exp \left[i \left({}^{\nu}\omega t + {}^{\nu}kx \right) \right], \quad (2.5)$$

где ${}^{\nu}A$ — комплексные амплитуды. Тогда частоты ${}^{\nu}\omega$, ${}^{\nu}k$ и волновые числа искомых волн определяются системой уравнений

$$\begin{aligned} -{}^{\nu}\omega^2 \left(\omega_*^2 + a^2 c_s^2 \right) + \omega_*^2 c_p^2 {}^{\nu}k^2 + \left(-{}^{\nu}\omega^2 - c_p^2 {}^{\nu}k^2 \right) \left(-{}^{\nu}\omega^2 + c_s^2 {}^{\nu}k^2 \right) + a^2 c_s^2 \omega_*^2 &= 0 \\ {}^{\nu}\omega + V {}^{\nu}k &= \Omega. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Рассмотрим сначала случай движения постоянной силой. Разрешая систему (2.6), получаем

$${}^{\text{I, II}}k_{1,2,3,4} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \left[\left(M - N^{1/2} \right)^{1/2} \pm \left(M + N^{1/2} \right)^{1/2} \right] \quad (2.7)$$

$${}^{\text{I, II}}\omega_{1,2,3,4} = \mp \frac{\sqrt{2}}{2} \left[\left(M - N^{1/2} \right)^{1/2} \pm \left(M + N^{1/2} \right)^{1/2} \right] V,$$

где

$$M = \frac{1}{2} \left[V^2 \left(\omega_*^2 + c_s^2 a^2 \right) - \omega_*^2 c_p^2 \right] \left(c_p^2 - V^2 \right)^{-1} \left(c_s^2 - V^2 \right)^{-1}, \quad N = a^2 c_s^2 \omega_*^2 \left(c_p^2 - V^2 \right)^{-1} \left(c_s^2 - V^2 \right)^{-1}.$$

Из (2.7) следует, что при $V < c_s$ решение $W(x, t)$ характеризуется двумя качественно-различными случаями ($M^2 - N \geq 0$) в зависимости от V .

При малых скоростях движения границы, $V < V_*$ ($M^2 - N < 0$), выбирая из (2.7) парн значений ${}^{\nu}\omega$ и ${}^{\nu}k$, соответствующие ограниченным решениям $W(x, t)$ на бесконечности, и определяя амплитуды волн ${}^{\nu}A$ из граничных условий (2.4), получаем

$$W(x,t) = {}^I W + {}^II W = \frac{1}{2} \left[(\Delta M - \beta)^2 + \Delta^2 \right]^{1/2} (N - M^2)^{-1/2} \cos \left[\frac{\sqrt{2}}{2} (M + N^{1/2})^{1/2} x \right.$$

$$\left. + (x - Vt) + \theta \right] \left\{ \exp \left[\frac{\sqrt{2}}{2} (N^{1/2} - M)^{1/2} (x - Vt) \right] \right\} \exp \left[- \frac{\sqrt{2}}{2} (N^{1/2} - M)^{1/2} (x - Vt) \right] \left. \right\}$$

$$\theta = \arctg \left[(\Delta M - \beta) (N - M^2)^{-1/2} \Delta^{-1} \right],$$

где

$$\Delta = -P_0 (\rho F \omega_x^2 c_s^2)^{-1}, \quad \beta = P_0 \left[\rho F c_s^2 (c_p^2 - V^2) \right]^{-1}.$$

Решение $W(x,t)$ представляет собой две неоднородные по амплитуде волны, сопутствующие движущейся границе, групповые скорости которых совпадают с V . Таким образом, движущаяся сила, как и в случае отсутствия движения $V=0$, служит источником лишь возмущений среды и не приводит к относительному переносу энергии. Движение силы обуславливает лишь колебательный характер возмущений.

При скоростях $V > V_N$ ($M^2 - N > 0$) значения ω и k , соответствующие физически реализуемым решениям (2.5), определяются из условия (1.8). Решение в этом случае имеет вид

$$W(x,t) = {}^I W + {}^II W = \frac{1}{2} \left\{ \Delta \left[M + (M^2 - N)^{1/2} \right] - \beta (M^2 - N)^{1/2} \cos \left[\frac{\sqrt{2}}{2} \left[M + N^{1/2} \right]^{1/2} - \right. \right.$$

$$\left. - (M - N^{1/2})^{1/2} \right] (x - Vt) \right\} + \frac{1}{2} \left\{ \Delta \left[M - (M^2 - N)^{1/2} \right] - \beta (M^2 - N)^{-1/2} \right.$$

$$\left. \times \cos \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2} \left[(M + N^{1/2})^{1/2} + (M - N^{1/2})^{1/2} \right] (x - Vt) \right\} \right\}$$

и является суперпозицией двух бегущих волн соответственно слева (обл. I) и справа (обл. II) от границы $x = Vt$, отводящих от неё энергию со скоростями

$${}^I V_{гp} = \left\{ \omega_x^2 c_p^2 + 2(c_p^2 - V^2)(c_s^2 - V^2) \left[(M + N^{1/2})^{1/2} - (M - N^{1/2})^{1/2} \right] \right\} x$$

$$\times V^{-1} (\omega_x^2 + c_s^2 \sigma^2)^{-1} | < V,$$

$$V_{rp} = \left\{ \omega_*^2 c_p^2 + 2(c_p^2 - V^2)(c_s^2 - V^2) \left[(M + N^{1/2})^{1/2} + (M - N^{1/2})^{1/2} \right] \right\} \times \\ \times V^{-1} (\omega_*^2 + c_s^2 \alpha^2)^{-1} > V.$$

В данном случае движущаяся сила приводит к переносу энергии вдоль системы, т.е. является источником излучения, энергия которого отводится посредством бегущих волн.

Значение скорости $V = V_*$,

$$V_* = \left\{ -\omega_*^2 (2\alpha^2 c_s^4 - \omega_*^2 c_p^2 + \alpha^2 c_s^2 c_p^2) + \left[\omega_*^4 (2\alpha^2 c_s^4 - \omega_*^2 c_p^2 + \alpha^2 c_s^2 c_p^2)^2 - \right. \right. \\ \left. \left. - \omega_*^2 c_p^2 (\omega_*^2 c_p^2 - 4\alpha^2 c_s^4) (\omega_*^2 - c_s^2 \alpha^2)^2 \right]^{1/2} (\omega_*^2 - c_s^2 \alpha^2)^{-1} \right\}^{1/2}$$

разделяющее качественно-различные случаи, совпадает с наименьшей фазовой скоростью волн, распространяющихся в системе, и его следует понимать как критическое, поскольку движение нагрузки с такой скоростью приводит к неограниченному росту амплитуд решений $W(x, t)$. Применительно к электродинамическим системам, подобное значение скорости ($V_* = \text{in}_1(\omega/\kappa)$) для движущегося в среде заряда является пороговым, начиная с которого имеет место эффект Вавилова-Черенкова [6].

Рассмотрим случай движущейся периодической силы $\Omega \neq 0$. На плоскости (ω, κ) выражение (2.6) представляет собой симметричную относительно координатных осей кривую 4-го порядка, ветви которой имеют наклонные асимптоты $\omega = \pm c_s \kappa$ и $\omega = \pm c_p \kappa$. Кинематический инвариант соответствует прямой, проходящей через точку $(0, \Omega)$ с тангенсом угла наклона, равным модулю скорости движения границы V (см. рис. 2).

Волны, частоты и волновые числа которых расположены во II и IV квадрантах, бегут в одну сторону с границей (в направлении $+x$), в I и III - в противоположном направлении ($-x$). Координаты общих точек дисперсионной кривой и кинематического инварианта определяют действительные значения частот и волновых чисел волн (2.5), максимальное число которых не превышает четырёх. Амплитуды волн определяются из граничных условий (2.4) и в общем случае имеют вид

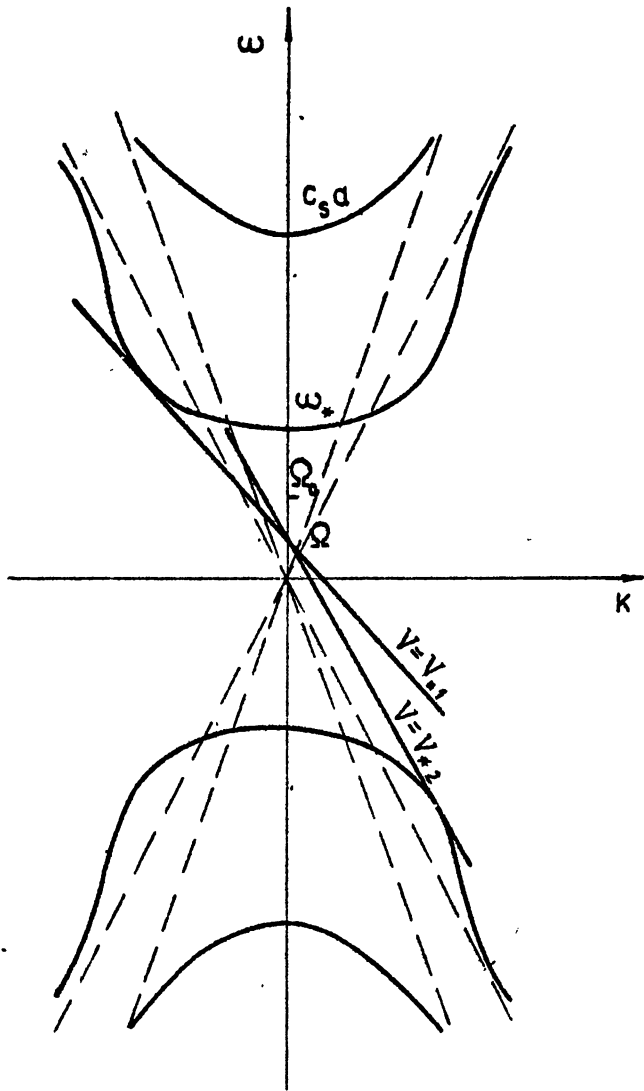


Рис. 2

$${}^I A_1 = {}^I \Delta_1 \Delta^{-1}, A_2 = {}^I \Delta_2 \Delta^{-1}, {}^II A_1 = {}^II \Delta_1 \Delta^{-1}, {}^II A_2 = {}^II \Delta_2 \Delta^{-1}$$

где

$$\Delta = ({}^I \kappa_2 - {}^II \kappa_1) \chi_{{}^I \kappa_2 - {}^I \kappa_1} \chi_{{}^II \kappa_1 - {}^I \kappa_1} \chi_{{}^II \kappa_1 - {}^II \kappa_2} \chi_{{}^I \kappa_1 - {}^I \kappa_2} \chi_{{}^I \kappa_2 - {}^I \kappa_1}$$

$${}^I \Delta_1 = \left[\alpha ({}^I \kappa_1 \kappa_1 \kappa_2 + \beta ({}^I \kappa_2 + {}^II \kappa_1 + {}^II \kappa_2)) \right] \chi_{{}^I \kappa_1 - {}^I \kappa_2} \chi_{{}^II \kappa_2 - {}^I \kappa_2} \chi_{{}^II \kappa_2 - {}^II \kappa_1}$$

$${}^I \Delta_2 = \left[\alpha \kappa_1 \kappa_1 \kappa_2 + \beta (\kappa_1 + {}^II \kappa_1 + {}^II \kappa_2) \right] \chi_{{}^II \kappa_1 - {}^I \kappa_1} \chi_{{}^II \kappa_2 - {}^I \kappa_2} \chi_{{}^II \kappa_2 - {}^II \kappa_1}$$

$${}^II \Delta_1 = \left[\alpha \kappa_1 \kappa_1 \kappa_2 + \beta ({}^I \kappa_1 + {}^II \kappa_2 + {}^I \kappa_2) \right] \chi_{{}^I \kappa_2 - {}^I \kappa_1} \chi_{{}^II \kappa_1 - {}^I \kappa_1} \chi_{{}^II \kappa_2 - {}^I \kappa_2}$$

$${}^II \Delta_2 = \left[\alpha \kappa_1 \kappa_2 \kappa_1 + \beta (\kappa_1 + {}^I \kappa_2 + {}^II \kappa_1) \right] \chi_{{}^I \kappa_2 - {}^I \kappa_1} \chi_{{}^II \kappa_1 - {}^I \kappa_1} \chi_{{}^II \kappa_1 - {}^II \kappa_2}$$

Из рис. 2 следует, что в зависимости от значений V и Ω возможно несколько качественно различных случаев. Так при малых V и Ω ($\Omega < \Omega_0$) над действительных значений ω и k , а следовательно решение будет представлять собой суперпозицию четырёх волн с неоднородными амплитудами. Выбирая из них для каждой области I и II физически реализуемые, получаем слева и справа по две экспоненциально спадающие по амплитуде волны (см. случай I.1, табл. I).

Таблица I

Ω	1.1 $0 < V < V_{1*}$	1.2 $V_{1*} < V < V_{2*}$	1.3 $V_{2*} < V < c_s$
$\Omega < \Omega_0$			
$\Omega_0 < \Omega$			

Увеличение V приводит к появлению двух равных между собой действительных пар ω и κ . Из (2.8) следует, что амплитуды этих волн неограничены. Этот случай соответствует движению нагрузки с критической скоростью $V = V_{*1}$.

Дальнейшее увеличение V даёт две различных между собой пары действительных значений ω и κ , т.е. наряду с двумя неоднородными волнами в системе появляются две бегущие волны с постоянными амплитудами. Причём, волна с большими ω , κ имеет групповую скорость (на рис. 2 это тангенс угла наклона касательной в точке с координатами ω и κ), превышающую V , т.е. отводит энергию от границы в направлении $+x$. Вторая волна также в абсолютном движении переносит энергию в направлении $+x$, но её групповая скорость меньше V и поэтому, отставая от границы, она отводит энергию от неё в противоположную сторону $-x$ (см. случай I.2, табл. I).

Последующее увеличение V приводит к достижению второго критического значения скорости движения нагрузки $V = V_{*2}$, т.е. к неограниченным решениям.

Для значений V из интервала $[V_{*2}, c_5]$ существуют четыре пары различных действительных значений ω и κ . Выбирая из них для каждой области физически реализуемые, получаем, что по обе стороны от границы $x = Vt$ бегут по две волны (см. случай I.3, табл. I).

При частотах колебаний силы $\Omega_0 < \Omega < \omega_*$ возможные случаи аналогичны, за исключением последнего, который для $\Omega_0 < \Omega$ невозможен в силу ранее наложенных ограничений на скорость движения источника $V < c_5$.

Заметим, что наличие периодической силы приводит к уменьшению значения критической скорости, которая при $\Omega = \omega_*$ равна нулю.

3. Вынужденные колебания экипажа, движущегося по упругой направляющей

Рассмотрим явление излучения волн при условии, что движущийся источник обладает собственной степенью свободы. Для этого ограничимся простейшей моделью экипажа, движущегося вдоль подпружиненной струны, (см. рис. 3). Колебания экипажа $y(t)$ и направляющей $u(x, t)$ описываются системой связанных уравнений

$$M\ddot{y} + R(y - u) = P_0 e^{i\Omega t} \quad (3.1)$$

$$u_{tt} - c_0^2 u_{xx} + h^2 u = 0 \quad (3.2)$$

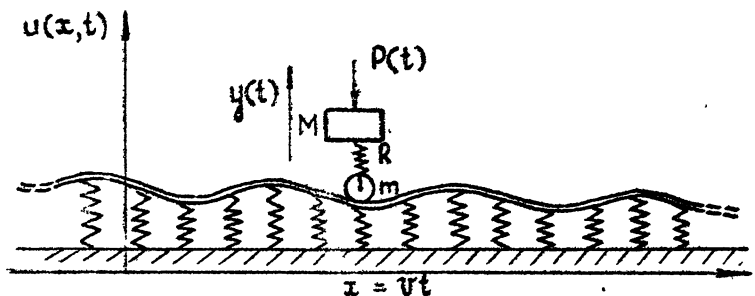


Рис. 3

со следующими условиями согласования при $x = Vt$ $V > 0$ [I]:

$$I_u = II_u \quad (3.3)$$

$$\rho F [c_0^2 (I_{u_x} - II_{u_x}) + V(I_{u_t} - II_{u_t})] = m \ddot{u} - R(y - u), \quad (3.4)$$

где

$$u(x,t) = \begin{cases} I u(x,t), & -\infty < x < Vt \\ u(t), & x = Vt \\ II u(x,t), & Vt < x < \infty, \end{cases}$$

$c_0 = (T/\rho F)^{1/2}$, ρF - погонная плотность, T - продольное натяжение направляющей (струны), h - коэффициент жёсткости основания, R , M , m - коэффициенты, определяющие упругие и инерционные свойства экипажа, V - скорость движения, P_0 , Ω - соответственно амплитуда и частота вынуждающей силы.

Отыскивая решение задачи в виде

$$y = B e^{i\Omega t}; \quad u(x,t) = A e^{i(\omega t + kx)},$$

рассмотрим сначала характер колебаний направляющей. Волновые числа

κ и частоты ω волн удовлетворяют системе уравнений

$$\omega^2 + c_0^2 \kappa^2 + h^2 = 0$$

$$\omega + V\kappa = \Omega$$

Проводя анализ значений ω , κ в зависимости V и Ω , получаем, что в системе всегда возникает две волны. Это позволяет записать точное решение задачи (при $V < V_*$):

$$u(x,t) = I u + II u = D \omega_0^2 \left[\mu (V_*^2 - V^2)^{1/2} (\Omega_0^2 - \Omega^2) + \Omega^4 - \Omega^2 (\omega_0^2 + \Omega_0^2) \right]^{-1} \times \\ \times \exp \left[i \Omega (c_0^2 t - Vx) (c_0^2 - V^2)^{-1} \right] \left\{ \exp \left[h (V_*^2 - V^2)^{1/2} (x - Vt) (c_0^2 - V^2)^{-1} \right] + \right. \\ \left. + \exp \left[h (V_*^2 - V^2)^{1/2} (Vt - x) (c_0^2 - V^2)^{-1} \right] \right\}.$$

$$y(t) = D \left[\mu (V_*^2 - V^2)^{1/2} + \omega_0^2 - \Omega^2 \right] \left[\mu (V_*^2 - V^2)^{1/2} (\Omega_0^2 - \Omega^2) + \Omega^4 - \Omega^2 (\omega_0^2 + \Omega_0^2) \right]^{-1} \times \\ \times \exp \left[i \Omega t \right], \quad \mu = \frac{2\rho f h}{m}, \quad D = \frac{P_0}{M}, \quad \Omega_0^2 = \frac{R}{M}, \quad \omega_0^2 = \frac{R}{m}.$$

при $V > V_*$:

$$\varphi(x,t) = I u + II u = D \omega_0^2 \left[\mu (V^2 - V_*^2) (\Omega_0^2 - \Omega^2)^2 + \Omega^4 (\Omega^2 - \omega_0^2 - \Omega_0^2)^2 \right]^{-1/2} \cdot \left\{ \exp \left[i x \right. \right. \\ \left. \left. + (x(-V\Omega + h(V^2 - V_*^2)^{1/2}) + t(c_0^2 \Omega - hV^2 - V_*^2)^{1/2}) (c_0^2 - V^2)^{-1} + \varphi_1 \right] + \right. \\ \left. + \exp \left[i (x(-V\Omega - h(V^2 - V_*^2)^{1/2}) + t(c_0^2 \Omega + hV(V^2 - V_*^2)^{1/2})) (c_0^2 - V^2)^{-1} + \varphi_1 \right] \right\} \\ y(t) = \left[\mu^2 (V^2 - V_*^2) + (\omega_0^2 - \Omega^2)^2 \right]^{1/2} \left[\mu^2 (V^2 - V_*^2) (\Omega_0^2 - \Omega^2)^2 + \Omega^4 (\Omega^2 - \omega_0^2 - \Omega_0^2)^2 \right]^{-1/2} \times \\ \times \exp \left[i (\Omega t + \varphi_2) \right].$$

$$\varphi_1 = \arctg \left[\mu (V^2 - V_*^2)^{1/2} (\Omega_0^2 - \Omega^2) \Omega^{-2} (-\Omega^2 + \omega_0^2 + \Omega_0^2)^{-1} \right]$$

$$\varphi_2 = \arctg \left\{ \left[\mu (V^2 - V_*^2)^{1/2} \Omega_0^2 \omega_0^2 \right] \left[(\omega_0^2 - \Omega^2) (-\Omega^2 + \omega_0^2 + \Omega_0^2) + \mu (V^2 - V_*^2) \right. \right. \\ \left. \left. + (\Omega^2 - \Omega_0^2) \right]^{-1} \right\}; \quad \mu = 2Fph/m, \quad D = P_0/M^{-1}, \quad \omega_0^2 = Rm^{-1}, \quad \Omega_0^2 = RM^{-1}$$

Из решения следует, что упруго-инерционные свойства эскима, скорость его движения, характер возникающих колебаний существенно влияют на особенности и условия проявления возможного в системе резонанса. Покажем это на примере колебаний эскима.

Решение для $V < V_*$ показывает, что для колебаний эскима $y(t)$ возможны режимы как резонанса, так и антирезонанса. Причём в случае $V > V_*$ амплитуды колебаний всегда конечны. Последнее обусловлено тем, что в системе присутствуют потери энергии на излучения (за счёт волн, возбуждаемых в направляющей). Однако это не исключает возможности появления резонансных максимумов амплитудной характеристики и при $V > V_*$.

Неограниченные решения $y(t)$ достигаются при скоростях

$$V_{кр} = \sqrt{V_*^2 - \Omega^4 (\Omega^2 - \omega_0^2 - \Omega_0^2)^2 (\mu)^{-2} (\Omega_0^2 - \Omega^2)^{-2}},$$

которые следует понимать, как критические. Гашение же колебаний (антирезонанс) имеет место при скоростях

$$V_0 = \sqrt{V_*^2 - (\omega_0^2 - \Omega^2)^2 (\mu)^{-2}}.$$

Исследуем поведение амплитудной характеристики в зависимости от изменения значения наименьшей частоты колебаний направляющей. При достаточно больших значениях $h > (\Omega_0^2 + \omega_0^2)^{1/2}$ оба из резонансов имеют место прежде, чем в системе появляются потери энергии на излучение и $\beta(V, \Omega)$ имеет вид согласно рис. 4

Для $h < (\Omega_0^2 + \omega_0^2)^{1/2}$ условие излучения предшествует условию проявления одного из резонансов и амплитудная характеристика всегда имеет в области $V < V_*$ только один резонансный максимум. Появление второго в области $V > V_*$ возможно не всегда. Так, при $\Omega_0 < h$ потери энергии на излучение настолько велики, что колебания при $V > V_*$ носят аперриодический характер и второй максимум не возможен (рис. 5). При $\Omega_0 > h$ амплитудная характеристика в каждой из областей ($V_* > V$, $V_* < V$) имеет резонансный максимум (рис. 6).

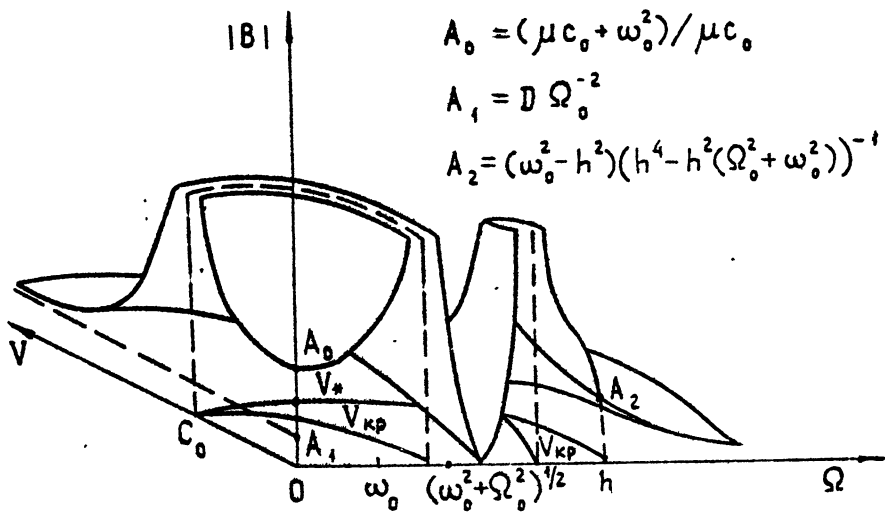


Рис. 4

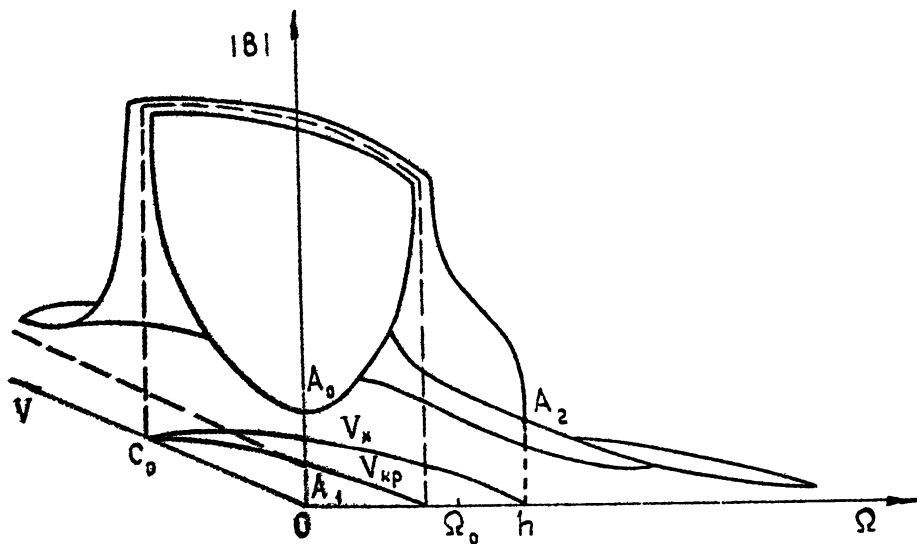


Рис. 5

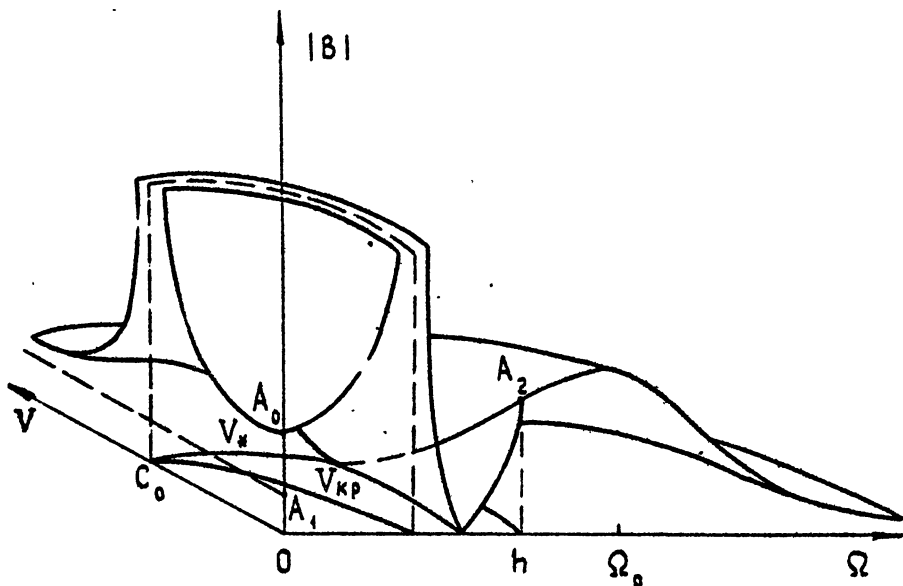


Рис. 6

Л и т е р а т у р а

1. Весницкий А.И., Каплан Л.Э., Крысов С.В., Уткин Г.А. Самосогласованные задачи динамики одномерных систем с движущимися нагрузками и закреплениями. Препринт № 159: НИРФИ, 1982.
2. Манделштам Л.П. Лекции по оптике, теории относительности и квантовой механике. Сб. трудов, т. 2. - М.: АН СССР, 1947.
3. Болотовский Б.М., Столяров С.Н. Современное состояние электродинамики движущихся сред. - В кн.: Эйнштейновский сб. - М.: Наука, 1976.
4. Вибрации в технике. Справочник, т. I. - Машиностроение, 1978.
5. Весницкий А.И., Мангова В.Н. Граничные условия для изгибных колебаний балки с движущимися упруго-инерциальными закреплениями. - ДАН УССР, 1982, т. 5.
6. Тамм И.Е. Общие свойства излучения, испускаемого системами, движущимися со сверхсветовыми скоростями и некоторые приложения к физике плазмы. Нобелевские лекции, - УЖН, 1959, т. 68, вып. 3

Восеницкий Александр Иванович
Сынов Сергей Александрович
Крысов Сергей Васильевич
Уткин Геннадий Александрович

**ИЗЛУЧЕНИЕ УПРУГИХ ВОЛН В ОДНОМЕРНЫХ СИСТЕМАХ
РАВНОМЕРНО-ДВИЖУЩИМИСЯ ИСТОЧНИКАМИ**

Подписано в печать 14.10.82. МЦ 00330. Формат 60 x 84/16.
Бумага писчая. Печать офсетная. Объем 0,99 усл.печ.л. Тираж 120.

Заказ 2888. Бесплатно.

Отпечатано на ротационной Горьковского научно-исследовательского радио-
физического института. 603600, Горький ГСП-61, ул. Лидова 25/14, т. 38-60-61,
доб. 5-09.