Министерство высшего и среднего специального образования РСФСР
Горьковский ордена Трудового Красного Знамени
научно-исследовательский радиофизический институт (НИРФИ)

П р е п р и н т № 164

ИЗЛУЧЕНИЕ ВНУТРЕННИХ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН ИСТОЧНИКАМИ МАССЫ, ДВИЖУЩИМИСЯ С ПЕРЕМЕННЫМ УСКОРЕНИЕМ

Г.И.Григорьев

Г о р ь к и й   1983

Ниже обсуждается вопрос о взаимодействии мультиполей, образующих сложный излучатель, движущийся вертикально вверх с переменным ускорением в изотермической несжимаемой атмосфере. Аналогичная задача для однородной среды с источниками звуковых волн рассмотрена в [1].

Исходная система линейных уравнений гидродинамики при наличии поля тяжести и источников массы может быть представлена в виде [2]

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -\nabla p + \rho \vec{g}; \tag{1}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{u}\nabla)\rho_0 = 0, \qquad \rho_0 \operatorname{div} \vec{u} = q, \tag{2}$$

где p , ρ и $\vec{u}$ - соответственно возмущения давления, плотности и скорости среды, $\vec{g}$ - ускорение поля тяжести. Зависимость от высоты z равновесных значений давления p_0 и плотности ρ_0 определяется соотношением $p_0/p_{00} = \rho_0/\rho_{00} = e^{-z/H}$, в котором H - характерный масштаб однородной атмосферы. В дальнейшем используется цилиндрическая система координат r , φ , z , ось z которой направлена противоположно вектору $\vec{g}\,(0, 0, -g)$.

Из системы (1), (2) путем соответствующих преобразований можно получить уравнение для вспомогательной функции $\psi = p\,\exp(z/2H)$:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\Delta-\frac{1}{4H^2}\right)\psi+\omega_g^2\Delta_\perp\psi=-e^{\frac{z}{2H}}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\omega_g^2\right)\frac{\partial q}{\partial t} \qquad (3)$$

При записи (3) введены обозначения: $\Delta_\perp=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}$, $\Delta=\Delta_\perp+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$, $\omega_g^2=\frac{g}{H}$ и учтена аксиальная симметрия задачи. Излучение гравитационно-звуковых волн источниками, движущимися с постоянной скоростью, анализировалось в [3] . Теперь рассмотрим источник массы , движущийся по вертикали с переменным ускорением,

$$q=e^{-z/2H}\left[Q_0+Q\cos(\Omega t+\vartheta)\right]\frac{\delta(r)}{2\pi r}f(z-vt-a\sin\Omega t). \qquad (4)$$

Множитель $e^{-z/2H}$ в (4) выбран для упрощения вычислений. С этой же целью будем в дальнейшем считать амплитуду колебаний a положения источника малой величиной. При этом можно воспользоваться разложением функции $f(z-vt-a\sin\Omega t)$, описывающей распределение источников вдоль траектории движения, в ряд, ограничиваясь в нем членами первого порядка относительно a . Заметим, что, согласно (4), модуляция выброса массы (на частоте Ω) сдвинута по фазе на угол $\vartheta+\frac{\pi}{2}$ относительно колебаний центра масс источника. С учетом сделанных замечаний распределение (4) можно представить в форме

$$q\approx e^{-z/2H}(q_1+q_2+q_3)\frac{\delta(r)}{2\pi r},\quad q_1=Q_0 f(z-vt)+\frac{aQ_1}{2}f'(z-vt)\sin\vartheta,$$

$$q_2=Q_1 f(z-vt)\cos(\Omega t+\vartheta),\quad q_3=-aQ_0 f'(z-vt)\sin\Omega t, \qquad (5)$$

где $f'(z-vt)$ – производная функции f по её аргументу.

Воспользовавшись преобразованием Фурье-Бесселя

$$\psi = \int_0^\infty \iint_{-\infty}^{\infty} k\psi(k,æ,\omega) J_0(k,r) \exp(iæz - i\omega t)\, dk\, dæ\, d\omega\,, \qquad (6)$$

из (3), с учетом соотношений (5) и $p = \psi e^{-z/2H}$, имеем

$$p_1 = \frac{e^{-z/2H}}{2v} \int_0^\infty \left(Q_0 + \frac{ia\omega Q_1}{2v}\sin\vartheta\right) \omega f\left(\frac{\omega}{v}\right) H_0^{(1)}(r\gamma) \exp\left(i\frac{\omega}{v}\zeta\right) d\omega,\ \gamma^2 > 0; \qquad (7)$$

$$p_2 = \frac{Q_1 e^{-z/2H}}{4v} \left[e^{i\theta} \int_0^\infty \omega f_2(\omega) H_0^{(1)}(r\gamma_2) \exp\left(i\frac{\omega+\Omega}{v} z - i\omega t\right) d\omega + \right.$$

$$\left. + e^{-i\vartheta} \int_0^\infty \omega f_1(\omega) H_0^{(1)}(r\gamma_1) \exp\left(i\frac{\omega-\Omega}{v} z - i\omega t\right) d\omega \right],\ \gamma_2^2, \gamma_1^2 > 0; \qquad (8)$$

$$p_3 = \frac{aQ_0 e^{-z/2H}}{4v} \left[\int_0^\infty \omega(\omega-\Omega) f_1(\omega) H_0^{(1)}(r\gamma_1) \exp\left(i\frac{\omega-\Omega}{v} z - i\omega t\right) d\omega - \right.$$

$$\left. - \int_0^\infty \omega(\omega+\Omega) f_2(\omega) H_0^{(1)}(r\gamma_2) \exp\left(i\frac{\omega+\Omega}{v} z - i\omega t\right) d\omega \right],\ \gamma_1^2, \gamma_2^2 > 0. \qquad (9)$$

где $H_0^{(1)}$ – функция Ханкеля, $\zeta = z - vt$,

$$f_1 = \bar{f}\left(\frac{\omega-\Omega}{v}\right),\quad f_2 = \bar{f}\left(\frac{\omega+\Omega}{v}\right),\quad \bar{f}(æ) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(z) e^{-iæz}\, dz\,,$$

$$\gamma^2 = \frac{\omega^2}{\omega_g^2 - \omega^2}\left(\frac{\omega^2}{v^2} + \frac{1}{4H^2}\right),\quad \gamma_{1,2}^2 = \frac{\omega^2}{\omega_g^2 - \omega^2}\left[\frac{(\omega\mp\Omega)^2}{v^2} + \frac{1}{4H^2}\right]$$

Область интегрирования в (7) - (9), определяемая условиями $\gamma^2 > 0$, $\gamma_{1,2}^2 > 0$, содержит частоты в интервале $0 \leq \omega \leq \omega_g$.

При подсчете мощности излучения воспользуемся соотношением для работы сил давления над источником:

$$I = \frac{1}{2} \mathrm{Re} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_0^{2\pi} \frac{q p^*}{\rho_0} r\,dr\,dz\,d\varphi. \tag{10}$$

Символ Re означает действительную часть выражения, p^* - величина, комплексно сопряженная с p.

Рассмотрим работу сил реакции излучения над отдельными источниками, входящими в состав исходного излучателя $I_j = \frac{1}{2} \mathrm{Re} \int \frac{q_j p^*}{\rho_0} dV$, j = 1, 2, 3. После простых преобразований для средней за период $T = 2\pi/\Omega$ мощности излучения внутренних гравитационных волн получаем $I = I_1 + I_2 + I_3$,

$$I_1 = \frac{\pi Q_0^2}{2\rho_{00} v} \int_0^{\omega_g} \left(Q_0^2 + \frac{a^2 \omega^2 Q_1^2}{4 v^2} \sin^2 \vartheta \right) \omega \left| \bar{f}\left(\frac{\omega}{v}\right) \right|^2 d\omega ; \tag{11}$$

$$I_2 = \frac{\pi Q_1^2}{8\rho_{00} v} \left[\left(1 - \frac{a \Omega Q_0 \cos\vartheta}{v Q_1} \right) \int_0^{\omega_g} \omega (f_1^2 + f_2^2) d\omega + \right.$$

$$\left. + \frac{a Q_0 \cos\vartheta}{v Q_1} \int_0^{\omega_g} \omega^2 (f_1^2 - f_2^2) d\omega \right] ; \tag{12}$$

$$I_3 = \frac{\pi a^2 Q_0^2}{8\rho_{00} v^3}\left\{ \int_0^{\omega_g} \omega\left[(\omega-\Omega)^2 f_1^2 + (\omega+\Omega)^2 f_2^2\right] d\omega + \right.$$

$$\left. + \frac{v Q_1 \cos\vartheta}{a Q_0} \int_0^{\omega_g} \omega\left[(\omega-\Omega) f_1^2 - (\omega+\Omega) f_2^2\right] d\omega \right\} \qquad (13)$$

Из выражений (12), (13) следует, что отдельные источники, входящие в состав исходного излучателя, взаимодействуют друг и другом, если $a \neq 0$ и $\Omega \neq 0$. В качестве примера рассмотрим распределение в виде δ -функции: $f = \delta(z)$. Определяя $f(\varkappa)$ и подставляя полученное выражение в (11) - (13), имеем

$$I_1 = \frac{\omega_g^2 Q_0^2}{16\pi\rho_{00} v} + \frac{a^2 \omega_g^4 Q_1^2 \sin^2\vartheta}{128\pi v^3}; \qquad (14)$$

$$I_2 = \frac{\omega_g^2 Q_1^2}{32\pi\rho_{00} v}\left(1 - \frac{a\Omega Q_0 \cos\vartheta}{v Q_1}\right); \qquad (15)$$

$$I_3 = \frac{a^2 \omega_g^2 Q_0^2}{32\pi\rho_{00} v^3}\left(\Omega^2 + \frac{\omega_g^2}{2} - \frac{v \Omega Q_1 \cos\vartheta}{a Q_0}\right) \qquad (16)$$

Из (15) следует, что движущийся монополь q_2 поглощает часть энергии, испускаемой диполем q_3 ($I_2 < 0$), при выполнении условия

$$\frac{a\Omega Q_0}{v Q_1} \cos\vartheta > 1 . \qquad (17)$$

Полученные соотношения пригодны как при дозвуковых, так и при сверхзвуковых движениях источника. В силу принятого предположения о несжимаемости среды быстрые акустико-гравитационные волны исчезают, а область существования внутренних гравитационных волн ограничена частотным интервалом $0 \le \omega \le \omega_g = \sqrt{g/H}$ [3].

Литература

I. Григорьев Г.И., Докучаев В.П., Эйдман В.Я. - Акуст.журнал, 1974, т. 20, № 4, с. 537.

2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика сплошных сред. - М.: Наука, 1954.

3. Григорьев Г.И., Докучаев В.П. - Изв. АН СССР, ФАО, 1970, т. 9, № 7, с. 678.

Дата поступления статьи
I4 февраля 1983 г.

Геннадий Иванович ГРИГОРЬЕВ

ИЗЛУЧЕНИЕ ВНУТРЕННИХ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН ИСТОЧНИКАМИ МАССЫ, ДВИЖУЩИМИСЯ С ПЕРЕМЕННЫМ УСКОРЕНИЕМ

Подписано в печать 22.02.83 г. МЦ 00659 Формат 60 х 84/16
Бумага писчая. Печать офсетная. Объем 0,29 усл. печ. л.
Тираж 120 Заказ 2921. Бесплатно

Отпечатано на ротапринте Горьковского научно-исследовательского радиофизического института 603600 Горький ГСП-51, ул. Лядова, 25/14. Телефон 38-90-91 д. 5-09.