Министерство высшего и среднего специального образования РСФСР

Горьковский ордена Трудового Красного Знамени
научно-исследовательский радиофизический институт (НИРФИ)

Препринт № 170

ГЕОМЕТРИЯ БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВ И ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

Я.И.Альбер

А.И.Нотик

Горький 1983

УДК 517.988

Рассматриваются итерационные методы решения уравнения $Ax = 0$, вида

$$Ux^{n+1} = Ux^n - \alpha_{n+\varepsilon}\, y^n,\ y^n \in Ax^n,\ n = 1,2\ldots,\ A: B \to B^*; \quad (1)$$

$$x^{n+1} = x^n - \alpha_{n+\varepsilon}\, y^n,\ y^n \in Ax^n,\ n = 1,2\ldots,\ A: B \to B, \quad (2)$$

где $A: B \to B^*$ – равномерно (суб-)монотонный, $A: B \to B$ – равномерно (суб-)аккретивный оператор, B – вещественное банахово пространство, B^* – его сопряженное, $\alpha_{n+\varepsilon}$ – последовательность неотрицательных чисел, $\varepsilon \geq 0$ – постоянное число, $U: B \to B^*$ – нормализованное дуальное отображение. Никаких условий гладкости на оператор A не налагается. Он может быть многозначным и даже разрывным и иметь произвольный порядок роста на бесконечности : $\|y\| \leq \varphi(\|x - x^*\|)$, $y \in Ax$ $\varphi(t)$ – непрерывная, неубывающая функция, $0 \leq \varphi(0) < \infty$, x^* – решение уравнения $Ax = 0$.

Устанавливается сильная сходимость методов (1), (2), их устойчивость, а также неасимптотические оценки скорости сходимости "по x ". Для решения этих вопросов строятся эффективные оценки сверху и снизу дуального произведения $(Ux - Uy,\ x - y)$. Показывается, что оценки скорости сходимости методов (1), (2) зависят не только от структуры и гладкости оператора A, но и от геометрических свойств банаховых пространств.

I. ВВЕДЕНИЕ И ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ

Построение и исследование итерационных методов решения нелинейных операторных уравнений в банаховых пространствах - важная проблема функционального анализа и вычислительной математики. И, тем не менее, к настоящему времени здесь получены весьма скромные результаты (особенно в сравнении со случаем гильбертовых пространств). Причин такого положения дел не мало, и мы постараемся обратить на них внимание читателя на примерах решения уравнений с монотонными и аккретивными операторами.

Мы рассматриваем операторное уравнение

$$Ax = 0, \tag{I}$$

где $A: B \to B^*$ или $A: B \to B$, B -(вещественное) банахово пространство, B^* - его сопряженное.

Сразу же отметим, что нас будут интересовать только "прямые" итерационные процессы, т.е. такие методы, в которых для получения очередного приближения $x^n \in B$ к решению $x^* \in B$ используется лишь значение оператора в предыдущей точке $x^{n-1} \in B$ и не используются никакие его функциональные производные. Например, для оператора

$A: B \to B^*$

$$Ux^{n+1} = Ux^n - \alpha_{n+\sigma} Ax^n, \; n = 1,2\ldots \quad IUx^n = x^n; \tag{2}$$

для оператора $A: B \to B$

$$x^{n+1} = x^n - \alpha_{n+\sigma} Ax^n, \; n = 1,2\ldots \tag{3}$$

Здесь $\alpha_{n+\sigma}$ - последовательность неотрицательных чисел (шаговые множители), $\sigma \geq 0$ - постоянное число, $U: B \to B^*$ $(I: B^* \to B)$ - нормализованное дуальное отображение в B (B^*) (определение см. ниже).

Далее мы будем вводить такие предположения относительно оператора A и шаговых множителей α_n, которые позволяют не только доказать сходимость итерационных процессов (2), (3) в банаховом пространстве, но и установить неасимптотические оценки скорости сходимости. Здесь уместно подчеркнуть, что существенную роль в решении этих вопросов играет априорный выбор функционала Ляпунова $V(x)$ – меры уклонения приближенного решения от точного. В гильбертовых пространствах наибольшее предпочтение отдается функционалу $V(x)=\|x-x^*\|^2$, который позволяет установить сильную сходимость (сходимость по норме) и оценки скорости сходимости "по аргументу x^*". Мы покажем ниже, что в случае произвольных банаховых пространств такой (и не только такой!) функционал Ляпунова приводит к необходимости построения эффективных оценок гладкости дуального отображения и монотонности дуального произведения $(Ux-Uy,\ x-y)$, а это может быть достигнуто, по-видимому, только путем привлечение геометрических характеристик банаховых пространств.

Методы вида (2), (3) предоставляют возможность включить в рассмотрение отображения A с произвольной гладкостью, в том числе многозначные и разрывные операторы:

$$Ux^{n+1}=Ux^n-\alpha_{n+3}\,y^n;\ y^n\in Ax^n,\ n=1,2\ldots\ A:B\to B^*; \tag{4}$$

$$x^{n+1}=x^n-\alpha_{n+\varepsilon}\,y^n,\ y^n\in Ax^n.\ n=1,2.\ A:B\to B. \tag{5}$$

В этом случае решение уравнения (I) понимается либо в смысле включения $0\in Ax^*$, либо в смысле обобщенного решения [I] : $(y.x-x^*)\geq 0$, $y\in Ax$, $A:B\to B^*$ $((y,U(x-x^*))\geq 0,\ y\in Ax,\ A:B\to B)$.
В основных теоремах разд. 4 и 5 банахово пространство B мы будем предполагать либо равномерно выпуклым, либо равномерно гладким. Равномерная выпуклость пространства B означает, что $\delta_B(\varepsilon)>0$ при всех $\varepsilon>0$, где

$$\delta_B(\varepsilon)=\inf(1-\|x+y\|/2,\ \|x\|=1,\|y\|=1,\ \|x-y\|=\varepsilon)$$

– модуль выпуклости пространства B [2].

Равномерная гладкость пространства B означает, что $\lim\limits_{\tau\to 0}\rho_B(\tau)/\tau=$ $=0$, где $\rho_B(\tau)=\sup(\|x+y\|/2+\|x-y\|/2-1,\ \|x\|=1,\|y\|=\tau)$ –

– модуль гладкости пространства B [2]. Требуется подчеркнуть, что $\rho_B(\tau)$ – выпуклая возрастающая функция и $\rho_B(\tau) \le \tau$ при всех $\tau \ge 0$.

Установлена полная двойственность равномерной выпуклости и равномерной гладкости.

I. Если B – равномерно выпуклое пространство, то B^* равномерно-гладкое пространство.

2. Если B – равномерно гладкое пространство, то B^* – равномерно-выпуклое пространство.

3. Каждое равномерно выпуклое (равномерно гладкое) пространство рефлексивно.

Напомним, что оператор $U: B \to B^*$ называется (нормализованным) дуальным отображением, если $\|Ux\|_{B^*} = \|x\|_B$, $(Ux, x) = \|x^*\|^2$

Здесь и далее скобки (z, x) есть дуальное произведение в B, то есть значение линейного функционала $z \in B^*$ на элементе $x \in B$. Дуальное отображение в B^* обозначим $I: B^* \to B$. Известно, что $IU = UI = E$ (E – тождественный оператор), по крайней мере, если B – рефлексивное и строго выпуклое пространство вместе со своим сопряженным [3]. Дуальное отображение существует в любом банаховом пространстве – это следует из теоремы Хана-Банаха. Наиболее просто оно записывается в пространствах l^p, L^p, W^p_m $(1 < p < \infty)$ [4] и в пространствах Орлича [5]. В пространствах с дифференцируемой по Гато нормой (гладких пространствах) дуальное отображение однозначно и $Ux = \operatorname{grad}(\|x\|^2/2)$

Оператор $A: B \to B^*$ называется монотонным, если для любых

$$x_1, x_2 \in D(A) \quad y_1 \in Ax_1, \; y_2 \in Ax_2 \quad (y_1 - y_2, x_1 - x_2) \ge 0,$$

и равномерно монотонным, если

$$(y_1 - y_2, x_1 - x_2) \ge \Psi(\|x_1 - x_2\|). \tag{6}$$

Здесь $D(A)$ – область определения оператора A, $\Psi(t)$ – непрерывная строго возрастающая функция и $\Psi(0) = 0$. На самом деле нам потребуется более слабое по сравнению с (6) свойство равномерной субмонотонности

$$(y, x - x^*) \ge \Psi(\|x - x^*\|) \tag{7}$$

с теми же самыми свойствами функции $\Psi(t)$. Аналогично, оператор $A: B \to B$ называется соответственно аккретивным, равномерно аккретивным и равномерно субаккретивным, если для любых $x_1, x_2 \in D(A)$, $y_1 \in Ax_1$, $y_2 \in Ax_2$,

$$(y_1 - y_2, U(x_1 - x_2)) \geq 0, \tag{8}$$

$$(y_1 - y_2, U(x_1 - x_2)) \geq \Psi(\|x_1 - x_2\|), (y_1 U(x_1 - x^*)) \geq$$
$$\geq \Psi(\|x_1 - x^*\|).$$

Эти неравенства определяют структуру оператора A, обнозначность и непрерывность которого, вообще говоря, не предполагается.

Полезно, на наш взгляд, отметить здесь прогресс, достигнутый за последние годы в исследовании итерационных процессов вида (4), (5). Еще десять лет назад такие методы рассматривались только в гильбертовых пространствах и только для уравнений с гладкими сильно монотонными операторами; постоянные $\alpha_n = \alpha > 0$ гарантировали сильную сходимость x^n к решению x^* уравнения (I) со скоростью геометрической прогрессии. Переход к негладким операторам потребовал нового подхода к выбору шаговых множителей: пришлось предположить, что

$$\alpha_n \geq 0, \ \alpha_n \to 0, \sum_1^\infty \alpha_n = \infty. \tag{9}$$

В 1974 году Брук [6] опять-таки для уравнения с сильно монотонным оператором в гильбертовом пространстве при $\alpha_{n+\sigma} = (n+\sigma)^{-1}, \sigma = const \geq 0$, получил асимптотическую оценку скорости сходимости

$$\|x^n - x^*\| = O(n^{-1/2}). \tag{10}$$

Позднее в [7] изучались уравнения с максимальными монотонными операторами и для произвольных α_n, удовлетворяющих условию

$$\alpha_n \geq 0, \alpha_n \to 0, \sum \alpha_n^{1+\varepsilon} = \infty, \ \varepsilon > 0,$$

были установлены неасимптотические оценки скорости сходимости. Однако использованный там метод исследования не позволил получить предельно точные, не улучшаемые по порядку оценки (это было достигнуто позднее).

В работе Браудера [8], по-видимому впервые, в произвольном равномерно гладком банаховом пространстве построен один вариант итерационного процесса (5) с аккретивным оператором, для которого была доказана сходимость и найдены оценки скорости сходимости, зависящие от модуля непрерывности дуального отображения. Работа [8] предполагает оператор A непрерывным, однако не требует от него сильной аккретизности.

В работе [9] общие итерационные процессы (5) изучались для уравнений с негладкими равномерно субаккретивными операторами так же в равномерно гладких пространствах. Так, в частности, приведены неасимптотические оценки скорости сходимости процесса (5) в пространствах типа l^p, L^p, W^p_m, $1 < p < \infty$, которые в асимптотике для сильно аккретивных операторов при $\alpha_{n+\sigma} = (n+\sigma)^{-1}$ и $p = 2$ совпадают с (10).

Сейчас хорошо известно, что в гильбертовых пространствах оценки скорости сходимости методов (4), (5) по норме (в сильном смысле) определяются гладкостью оператора A (например, его липшиц- или гёльдер-непрерывностью, ограниченностью и т.д.), его структурой (например, сильной или равномерной монотонностью, субмонотонностью и т.д.), а так же законом изменения параметров α_n. Основная цель настоящей работы - показать, что в банаховых пространствах такие оценки определяются, помимо отмеченных характеристик, так же и геометрическими характеристиками банаховых пространств, основными носителями которых являются их модули выпуклости и гладкости.

Резюмируя, подчеркнём, что в настоящей работе

1) для методов (4), (5) устанавливается сильная сходимость и неасимптотические оценки скорости сходимости к решению уравнения (1),

2) закон изменения шаговых множителей подчиняется соотношениям (9),

3) оператор A действует в произвольном равномерно выпуклом или равномерно гладком банаховом пространстве,

4) оператор A является равномерно субмонотонным (субаккретивным),

5) на оператор A не налагается никаких условий гладкости - он может быть многозначным и даже разрывным,

6) доказывается устойчивость методов (4), (5).

2. ОЦЕНКИ МОДУЛЯ НЕПРЕРЫВНОСТИ ДУАЛЬНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ И ДУАЛЬНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ $(Ux - Uy, x - y)$

Обратимся теперь к методу (5). Из выпуклости функционала $\|x^n - x^*\|^2$ в пространстве B следует

$$\|x^{n+1}-x^*\|^2 \le \|x^n-x^*\|^2+2(U(x^{n+1}-x^*),\ x^{n+1}-x^n) =$$
$$(II)$$
$$= \|x^n-x^*\|^2+2(U(x^n-x^*),x^{n+1}-x^n)+2(Ux^{n+1}-x^*)-U(x^n-x^*),x^{n+1}-x^n).$$

Для дальнейшей оценки авторы работ [6, 7] заменяют разность $x^{n+1}-x^n$ из соотношения (5) и усиливают (10) с помощью неравенства

$$(U(x^{n+1}-x^*)-U(x^n-x^*),x^{n+1}-x^n) \le \|U(x^{n+1}-x^*)-U(x^n-x^*)\|\,\|x^{n+1}-x^n\|. \quad (12)$$

Затем применяют фундаментальное свойство равномерно гладких пространств: дуальное отображение равномерно непрерывно на всяком ограниченном множестве пространства B, т.е. существует действительная непрерывная неотрицательная функция $\omega_R(t)$, $t \ge 0$, $\omega_R(0)=0$, что для любого $R > 0$

$$\|Ux-Uy\| \le \omega_R(\|x-y\|),$$

как только
$$\|x\| \le R,\ \|y\| \le R.$$

Вместе с условием субаккретивности и ограниченности $\{x^n\}$ (ограниченность должна быть доказана!) это дает возможность вместо (12) получить следующее выражение:

$$\|x^{n+1}-x^*\|^2 \le \|x^n-x^*\|^2-2\lambda_{n+\varepsilon}\,\Psi(\|x^n-x^*\|)+2\lambda_{n+\varepsilon}\,\omega(\lambda_{n+\varepsilon}\|y^n\|)\,\|y^n\|.$$

Отсюда, пользуясь аппаратом рекурентных числовых неравенств [10], можно доказать сходимость и получить оценки скорости сходимости x^n к x^*, которые будут выражаться через $\omega_R(t)$. Однако явный вид функции $\omega_R(t)$ до последнего времени был известен лишь для тривиального случая гильбертовых пространств $\omega_R \equiv t$, и только совсем недавно функция $\omega_R(t)$ была найдена для пространств L^p, l^p при $1 < p < \infty$.

В [11] приведены следующие значения $\omega_R(t)$:

$$\omega_R(t)=(p-1)2^{\frac{3p-2}{p}}t,\ p \ge 2,\ 0 \le R < \infty,$$

$$\omega_R(t)=C\,2^{\frac{p-1}{p}}t^{p-1},\ 1 < p \le 2,$$

C – константа, зависящая от R. В работе [I2] для $P \geq 2$ получена более точная константа, а именно:

$$\omega_R(t) = (P-1)t, \quad t \geq 0, \quad 0 \leq R < \infty.$$

Другой подход для общего случая равномерно гладких пространств заключается в том, что-бы не усиливать неравенство (II) способом (I2), а непосредственно оценить дуальное произведение

$$(U(x^{n+1} - x^*) - U(x^n - x^*), x^{n+1} - x^n)$$

или, в более общей постановке, определить мажоранту $\widetilde{\omega}(t)$ из соотношения

$$(Ux - Uy, x - y) \leq \widetilde{\omega}(\|x - y\|).$$

Основную роль будут играть следующие две теоремы.

Теорема I. Для произвольного банахова пространства B и любых x, $y \in B$

$$2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 - \|x+y\|^2 \leq 4\|x-y\|^2 + C_1(\|x\|, \|y\|)\rho_B(\|x-y\|), \tag{I3}$$

$$C_1(\|x\|, \|y\|) = 2\max(L, (\|x\| + \|y\|)/2), \quad 0 < L < 3{,}18.$$

Наметим кратко схему доказательств теоремы I. Обозначим

$$D = 2^{-1}(\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x+y\|^2/2).$$

При $\|x+y\| \leq \|x-y\|$ $D \leq 2\|x-y\|^2$, а при $\|x+y\| > \|x-y\|$

$$D \leq 4^{-1}(\|x-y\|^2 + 2^{-1}(\|x\| + \|y\|)\|x+y\| \rho_B(\|x-y\|/\|x+y\|).$$

Далее, пользуясь свойствами $\rho_B(\tau)$ и неравенством Фигеля [I3] для функции $\rho_B(\tau)$,

$$\rho_B(\sigma)\sigma^{-2} \leq L\rho_B(\tau)\tau^{-2}, \qquad 0 < \tau \leq \sigma, \quad 0 < L < 3{,}18,$$

получаем окончательное утверждение.

Замечание I. Для любых $\|x\| \leq R$, $\|y\| \leq R$

$$2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 - \|x+y\|^2 \leq 4\|x-y\|^2 + C_1(R)\rho_B(\|x-y\|),$$

$$C_1(R) = 2\max(L, R),$$

Следствие I. Пусть $U: B \to B^*$ и $\rho_B(\cdot)$ и $\rho_{B^*}(\cdot)$ модули гладкости гладких пространств B и B^*. Тогда для произвольных $x, y \in B$

$$(Ux - Uy, x - y) \le 4\|x - y\|^2 + C_1(\|x\|, \|y\|)\, \rho_B(\|x - y\|)$$

и, если B рефлексивное пространство, то

$$(Ux - Uy, x - y) \le 4\|Ux - Uy\|^2 + C_1(\|x\|, \|y\|)\, \rho_{B^*}(\|Ux - Uy\|).$$

Если же $\|x\| \le R, \|y\| \le R$, то соответственно

$$(Ux - Uy, x - y) \le 4\|x - y\|^2 + C_1(R)\, \rho_B(\|x - y\|),$$

$$(Ux - Uy, x - y) \le 4\|Ux - Uy\|^2 + C_1(R)\, \rho_{B^*}(\|Ux - Uy\|).$$

Теорема 2. Для произвольного банахова пространства B и любых $x, y \in B$

$$2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 - \|x + y\|^2 \ge L^{-1}\delta_B(\|x - y\|/C_2(\|x\|, \|y\|)), \tag{I4}$$

$$C_2(\|x\|, \|y\|) = 2\max\left(1, \sqrt{2^{-1}(\|x\|^2 + \|y\|^2)}\right), \quad 0 < L < 3{,}18.$$

Доказательство теоремы 2 проводится с помощью неравенства Линденштрауса $\|2^{-1}(x + y)\|^2 \le 1 - \delta_B(\|x - y\|/2)$, справедливого [I4] для любых $x, y \in B$, таких, что $\|x\|^2 + \|y\|^2 = 2$ и неравенства Фигеля для $\delta_B(\varepsilon)$ [I3]

$$\delta_B(\eta)/\eta^{-2} \ge (4L)^{-1}\delta_B(\varepsilon)/\varepsilon^{-2}., \text{ если } \eta \ge \varepsilon > 0, 0 < L < 3{,}18.$$

Замечание 2. Для любых $\|x\| \le R, \|y\| \le R$

$$2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 - \|x + y\|^2 \ge L^{-1}\delta_B(\|x - y\|/C_2(R)),$$

$$C_2(R) = 2\max(1, R).$$

Следствие 2. Для произвольного банахова пространства B и любых $x, y \in B$

$$(Ux - Uy, x - y) \ge L^{-1}\delta_B(\|x - y\|/C_2(\|x\|, \|y\|)).$$

Если B - рефлексивное и строго выпуклое пространство, то

$$(Ux - Uy, x-y) \geq L^{-1}\delta_{B^*}(\|Ux - Uy\|/C_2(\|x\|,\|y\|)).$$

Если же $\|x\| \leq R$ и $\|y\| \leq R$, то соответственно

$$(Ux - Uy, x-y) \geq L^{-1}\delta_B(\|x-y\|/C_2(R)),$$

$$(Ux - Uy, x-y) \geq L^{-1}\delta_{B^*}(\|Ux-Uy\|/C_2(R)).$$

Введем функцию $g_B(\varepsilon) = \delta_B(\varepsilon)/\varepsilon$. Известно [13], что $g_B(\varepsilon)$ непрерывная неубывающая функция в любом банаховом пространстве и $g_B(0) = 0$.

Следствие 3. Пусть пространство B строго выпукло и функция $g_{B^*}(\varepsilon)$ – монотонно возрастает, тогда для любых $\|x\| \leq R, \|y\| \leq R$

$$\|Ux - Uy\| \leq C_2(R)\, g^{-1}_{B^*}(L C_2(R)\|x-y\|).$$

Если же B^* строго выпуклое и $g_B(\varepsilon)$ монотонно возрастает, то

$$\|x-y\| \leq C_2(R)\, g_B^{-1}(L C_2(R)\|Ux - Uy\|).$$

Таким образом, заменяя в неравенстве (II) дуальное произведение $(U(x^{n+1}-x^*) - U(x^n-x^*), x^{n+1}-x^n)$ его оценкой сверху из теоремы I или $\|U(x^{n+1}-x^*) - U(x^n-x^*)\|$ её оценкой сверху из следствия 3 теоремы 2, мы, тем самым, вносим геометрические характеристики банаховых пространств $\rho_B(\varepsilon)$ и $\delta_B(\varepsilon)$ в рекуррентные соотношения для оценки меры уклонения приближенного решения x^n уравнения (I) от точного решения.

В гильбертовом пространстве геометрия учитывается автоматически путем возведения $\|x^{n+1}-x^*\|$ в квадрат. Действительно, выражение

$$\|x^{n+1}-x^*\|^2 = \|x^n - x^*\|^2 - 2\alpha_n(y^n, x^n-x^*) + \alpha_n^2\|y_n\|^2$$

эквивалентно равенству параллелограмма $2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 = \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2$, если в нем положить $x = x^n - x^*$ и $y = \alpha_n y^n$.

Основные геометрические свойства гильбертова пространства H полностью определяются равенством параллелограмма, тривиальным следствием которого является сильная выпуклость функционала $\|x\|^2$ и липшиц-непрерывность его градиента. Из этого же соотношения легко получаются аналитические выражения для $\rho_H(\tau)$ и $\delta_H(\varepsilon)$. В случае не гильбертовых пространств, как это видно из теорем I и 2, дело обстоит много сложнее.

Сделаем еще несколько замечаний относительно пространств типа L^p. В работе [I5] доказаны следующие "неравенства параллелограмма":

$$2\|x\|^2+2\|y\|^2-\|x+y\|^2\geq(p-1)\|x-y\|^2 \quad \text{при } 1<p\leq 2,$$

$$2\|x\|^2+2\|y\|^2-\|x+y\|^2\leq(p-1)\|x-y\|^2 \quad \text{при } p>2. \tag{I5}$$

Из (I5) вытекают оценки

$$(Ux-Uy,x-y)\geq(p-1)\|x-y\|^2 \quad \text{при } p\leq 2,$$

$$\|Ux-Uy\|\leq(p-1)\|x-y\| \quad \text{при } p\geq 2,$$

здесь $Ux=\operatorname{grad}(\|x\|^2/2)$.

Другим хорошо известным свойством пространств типа L^p являются неравенства Кларксона [I6]

$$2^{-1}(\|x\|^p+\|y\|^p)-\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^p\leq\left\|\frac{x-y}{2}\right\|^p \quad \text{при } p\leq 2,$$

$$2^{-1}(\|x\|^p+\|y\|^p)-\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^p\geq\left\|\frac{x-y}{2}\right\|^p \quad \text{при } p\geq 2;$$

откуда соответственно получается

$$(U_px-U_py,x-y)\leq 2^{2-p}\|x-y\|^p \quad \text{при } p\leq 2,$$

$$(U_px-U_py,x-y)\geq 2^{2-p}\|x-y\|^p \quad \text{при } p\geq 2,$$

$$U_px=\operatorname{grad}(\|x\|^p).$$

Неравенства Байнима (Bynim) и неравенства Кларксона взаимно дополняют друг друга. Так при $p\leq 2$ (I5) указывает на явный вид монотонности нормализованного дуального отображения, а неравенство Кларксона - на явный вид модуля непрерывности дуального отображения с масштабной функцией $\mu(t)=t^{p-1}$; при $p \geq 2$ эти неравенства имеют противоположный смысл. Однако в отличие от наших теорем I и 2 (если последние применять в пространствах типа L^p) неравенства Байнума и Кларксона имеют только односторонний смысл. По аналогии с (I5) неравенства (I3) и (I4) можно трактовать как верхнее и нижнее неравенства параллелограмма в банаховом пространстве.

3. ОБ ОЦЕНКАХ МОДУЛЯ ВЫПУКЛОСТИ И ГЛАДКОСТИ

Таким образом, оценки сверху и снизу дуального произведения сводятся к вычислению модуля выпуклости и гладкости банаховых пространств. Для пространств B^p типа l^p, L^p, W_m^p модуль гладкости $\rho_{B^p}(\tau)$ может быть вычислены из общей формулы Линденштрауса:

$$\rho_B(\tau) = \sup_{0\le\varepsilon\le 2} \left(\tau\varepsilon/2 - \delta_{B^*}(\varepsilon)\right). \tag{I6}$$

Для этого необходимо воспользоваться результатом Ханнера [I7], который показал, что

$$\delta_{B^q}(\varepsilon) = 1-\left(1-\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^q\right)^{\frac{1}{q}}, \quad \text{если} \quad B^q = l^q, L^q, \ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1, q\ge 2.$$

Несложный подсчет приводит к равенству

$$\rho_{B^p}(\tau) = (1+\tau^p)^{\frac{1}{p}} - 1 \qquad \text{или} \qquad \rho_{B^p}(\tau) \le p^{-1}\tau^p .$$

Обратимся теперь к вычислению модуля выпуклости пространств B^p, $1 < p \le 2$. Справедливо функциональное тождество [I7]

$$\varphi(\varepsilon, \delta_{B^q}(\varepsilon)) \equiv (1-\delta_{B^q}(\varepsilon)+\varepsilon/2)^q + (1-\delta_{B^q}(\varepsilon)-\varepsilon/2)^q = 2,$$

откуда

$$\delta'_{B^q}(\varepsilon) = -\frac{\partial\varphi}{\partial\varepsilon} \Big/ \frac{\partial\varphi}{\partial\delta_{B^q}} \ge \frac{q-1}{8}\,\varepsilon.$$

Интегрируя это неравенство, получим

$$\delta_{B^q}(\varepsilon) \geq \frac{q-1}{16}\varepsilon^2, \; 0<\varepsilon\leq 2, \; 1<q\leq 2. \qquad (17)$$

Заметим, что асимптотический результат Ханкера $\delta_{B^q}(\varepsilon) \geq \frac{q-1}{8}\varepsilon^2 + \ldots$ с точностью до константы совпадает с (17). Снова, используя (16), получим $\rho_{B^p}(\tau) \leq (p-1)\tau^2, \; p\geq 2$.

Итак, в пространствах B^p

$$\begin{cases} \rho_{B^p}(\tau) = (1+\tau^p)^{\frac{1}{p}} - 1 \\ \delta_{B^p}(\varepsilon) \geq 16^{-1}(p-1)\varepsilon^2 \end{cases} \quad 1<p\leq 2, \qquad \begin{cases} \rho_{B^p}(\tau) \leq (p-1)\tau^2 \\ \delta_{B^p}(\varepsilon) = 1-\left(1-\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} \geq p^{-1}(\varepsilon/2)^p. \end{cases} \; p\geq 2. \quad (18)$$

Таким образом, из (18) при $p \geq 2$ следует, что

$$(Ux-Uy, x-y) \leq C(R)\|x-y\|^2, \quad C(R) = 4\left(1+\frac{p-1}{2}\max\{L,R\}\right).$$

Отсюда, подобно [12], вытекает липшиц-непрерывность дуального отображения при $p \geq 2$. Аналогично можно показать, что при $2\geq p>1$.

$$\|Ux-Uy\| \leq C_1(R)\|x-y\|^{p-1}, \; C_1(R) = p2^{2p-1}C^pL^{p-1}, \; C=\max(2,2R),$$

$$\|x\| \leq R, \; \|y\| \leq R.$$

4. СХОДИМОСТЬ И ОЦЕНКИ СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ ИТЕРАЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ (4) С МОНОТОННЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

Пусть теперь оператор A действует из равномерно выпуклого пространства B в сопряженное пространство B^*. Трудности применения итерационных процессов к уравнениям с такими операторами заключаются, во-первых, в том, что последовательности x^n и Ax^n принадлежат разным пространствам, поэтому сами методы приходится надлежащим образом "исправлять", и во-вторых, оставаясь в рамках исследования сильной сходимости процесса и применяя функционал Ляпунова $V_1(x) = \|x-x^*\|_B^2$ или $V_2(x) = \|Ux-Ux^*\|_{B^*}^2$ в форме квадрата ошибки в исходном или сопряженном пространстве, при описании структуры оператора A мы не можем обойтись только предположением равномерной (суб-)монотонности. Рассмотрим две модификации.

I. Применение дуального отображения $U: B \to B^*$ позволяет построить итерационный процесс в равномерно гладком пространстве B^*:

$$Ux^{n+1} = Ux^n - \alpha_{n+\sigma} y^n, \; y^n \in Ax^n, \; n = 1,2.$$

Представили его в эквивалентной форме:

$$Ux^{n+1} = Ux^n - \alpha_{n+\sigma} y^n, \; y^n \in AIUx^n.$$

Мы сводим, тем самым, метод (4) к методу (5) и условие субаккретивности для оператора AI записывается в виде (по отношению к функционалу $V_2(x)$)

$$(I(Ux - Ux^*), y) \geq \Psi(\|Ux - Ux^*\|), \; y \in Ax. \qquad (19)$$

2. Применение дуального отображения $I: B^* \to B$ позволяет построить процесс в равномерно гладком банаховом пространстве B:

$$x^{n+1} = x^n - \alpha_{n+\sigma} y^n, \; y^n \in IAx^n.$$

Здесь необходимо положить, что оператор IA равномерно (суб-)аккретивен, т.е.

$$(U(x - x^*), y) \geq \Psi(\|x - x^*\|), \; y \in IAx, \qquad (20)$$

и исследованию здесь подвергается функционал Ляпунова $V_1(x) = \|x - x^*\|^2$.

Таким образом, непосредственное применение функционала Ляпунова $V(x) = \|x - x^*\|^2$ или $V(x) = \|Ux - Ux^*\|^2$ приводит к необходимости усиления требования на структуру оператора A до уровня (19) (20). Однако можно привести пример функционала Ляпунова $V(x)$ [II], для которой сходимость $V(x) \to V(x^*)$ и оценки скорости сходимости получаются в класссе монотонных операторов. Результаты разд. 2 позволяют затем, использовав эту функцию Ляпунова, доказать сильную сходимость метода (4) в банаховом пространстве B и получить соответствующие неасимптотические оценки скорости сходимости.

Пусть $\alpha(x+\sigma)$ и $\omega(x+\sigma)$ неотрицательные непрерывные и невозрастающие функции, принимающие при $x = n$ значения $\alpha(n+\sigma) = \alpha_{n+\sigma}$

и $\omega(n+\sigma)=\omega_{n+\sigma}$. Обозначим через $F(x+\sigma)$ и $\Phi(\lambda)$ какие-либо первообразные от функций $\delta(x+\sigma)$ и $1/\tilde\Psi(\lambda)$ соответственно ($\tilde\Psi(\lambda)$ обладает теми же свойствами, что и $\Psi(\lambda)$. Предположим, что при всех $x \geq 1$ и некотором $\sigma \geq 0$ эти функции определены, $\Phi^{-1}(z)$ существует и однозначна на некотором множестве Z и $F(x+\sigma) > 0$.

Введем следующие обозначения:

$$1.\ v(x)=\tilde\Psi^{-1}\left(\frac{C_0\,\omega(x+\sigma-1)}{\delta(x+\sigma-1)}\right)+\omega(x+\sigma-1),$$

$C_0 > 1$ – произвольный параметр, $C_1 = v(2)$,

$$2.\ u(x,c)=\Phi^{-1}\left[\Phi(C)-a\left(F(x+\sigma)-F(2+\sigma)\right)\right],\ a=C_0-1/C_0,\ C\geq 0,$$

$$3.\ W(x,v(z))=\Phi^{-1}\left[\Phi(v(z))-a\left(F(x+\sigma)-F(2+\sigma)\right)\right],$$

$2 \leq z < \infty$ – произвольное, но фиксированное число, $2 \leq x < \infty$,

$$4.\ Q=\Phi^{-1}\left[\Phi(\eta)-a\left(F(2+\sigma)-F(1+\sigma)\right)\right],$$

$$5.\ V(Ux)=\frac{\|Ux\|^2}{2}-(Ux,x^*)+\frac{\|x^*\|^2}{2}.$$

Сформулируем далее основное свойство (P): на интервале $(2, \infty)$ функции $W(x,v(z))$ и $v(x)$ либо совпадают полностью, либо пересекаются не более чем в двух точках (точки касания мы не относим к точкам пересечения, за исключением, быть может, $x = 2$).

Теорема 3. Предположим, что

1. B – равномерно выпуклое пространство,

2. x^* (единственное) – решение уравнения (1) и $\|x^*\| \leq K$,

3. $A: B \to B^*$ является равномерно субмонотонным, т.е. выполняется неравенство (7),

4. $\|y\| \leq \varphi(\|x-x^*\|)$, $y \in Ax$, где $\varphi(t)$ – непрерывная, неубывающая функция и $0 \leq \varphi(0) < \infty$

5. Начальное приближение x' таково, что $\eta = V(Ux') \leq R_0$,

6. $$\sigma \geq \bar\sigma=\min\left\{k:\gamma\left[\gamma^{-1}\left(4\delta_k\varphi^2(M_k)+C_2\rho_{B^*}(\delta_k\varphi(M_k)/\delta_k)\right)\right]\leq R_0\right\},$$

$$C_2 = \max\left\{2L, 2(K+\sqrt{2r_K}) + \alpha_K\, \varphi(M_K)\right\},\ M_K = 2K + \sqrt{2r_K}\ ,$$

$$r_K = R_0 + \alpha_K\, \varphi(K_1)\left[K_1 + 2^{-1}\alpha_K\, \varphi(K_1)\right],\ K_1 = 2K + \sqrt{2R_0}\ ,$$

$$\gamma(t) = 4t^2 + \max\left\{2L, \sqrt{2r_1} + 2K\right\} \rho_8(t),$$

7. $u(x, C_1) \geq v(x)$ при $x \to \infty$, где $\widetilde{\Psi}(t) = \Psi(\gamma^{-1}(t))$ и

$$\omega(x) = 4\alpha^2(x)\, \varphi^2(M_\sigma - K) + 2\max\left\{M_\sigma - K, L\right\} \rho_8*(\alpha(x)\,\varphi(M_\sigma - K)),$$

$$0 < L < 3{,}18,$$

8. C_0 выбрано так, что $u(x, C_1) > v(x)$ при $x = 2$.

Тогда итерационный процесс (4), (9) сильно сходится к x^* и при всех $n \geq 1$ справедлива оценка

$$\|x^n - x^*\| \leq C_3\, \delta_8^{-1}(2L\, u(n, c)),\ c = \max\left\{Q, C_1\right\},$$

$$C_3 = 2\max\left\{1, K + \sqrt{r_\sigma}\right\}.$$

Т е о р е м а 4. Предположим, что выполнены условия I–6 теоремы 3 и в условии 7 неравенство $u(x, C_1) \geq v(x)$ заменяется на противоположное:

$$u(x, C_1) \leq v(x). \tag{21}$$

Тогда итерационный процесс (4), (9) сильно сходится к x^* и, кроме того,

а) если $Q \leq C_1$, а C_0 выбрано так, что при $x \to 2$ имеет место (21), то при всех $n \geq 2$ справедлива оценка

$$\|x^n - x^*\| \leq C_3\, \delta_8^{-1}(2L\, v(n)),\ C_3 = 2\max\left\{1, K + \sqrt{r_\sigma}\right\},$$

б) во всех остальных случаях

$$\|x^n - x^*\| \leq C_3\, \delta_8^{-1}(2L\, u(n, C)),\ C = \max\left\{Q, C_1\right\},\ 1 < n \leq \bar{x},$$

$$\|x^n - x^*\| \leq C_3\, \delta_8^{-1}(2L\, v(n)),\ n > \bar{x},$$

где $\bar{x}$ – единственный на интервале $(2, \infty)$ корень уравнения

$u(x,C) = v(x)$.

Доказательство теорем 3. 4 проводится по следующей схеме: вводится функционал Ляпунова

$$V(U_x) = \frac{\|U_x\|^2}{2} - (U_x, x^*) + \frac{\|U_x^*\|^2}{2};$$

устанавливается, что $V(U_x)$ обладает следующими свойствами: I. $V(U_x) > 0$ при всех $x \neq x^*$; 2. $V(U_x^*) = 0$; 3. $V(U_x) \geq L^{-1}\delta_B(\|x-x^*\|/C_1)$,

4. $V(U_x) \leq 4\|U_x - U_x^*\|^2 + C_2\rho_{B^*}(\|U_x - U_x^*\|)$.

Пользуясь этими свойствами, можно показать, что

$$V(U_x^n) \leq R < \infty \text{ при всех } n \geq 1. \qquad (22)$$

Из (22) следует равномерная ограниченность последовательностей $|x^n - x^*|$ и $\|U_x^n - U_n^*\|$, $n \geq$ I. Это позволяет получить рекуррентное соотношение на функционал $V(U_x)$ вида

$$V(U_x^{n+1}) \leq V(U_x^n) - \lambda_{n+\sigma}\tilde{\Psi}(V(U_x^n)) + \gamma_n .$$

Применяя затем результаты работы [I8], мы можем доказать сходимость $V(U_x^n)$ к нулю и установить оценки скорости сходимости. Свойство 3 функционала V позволяет получить окончательные утверждения теорем.

Замечание 3. $\bar{\sigma}$ в условии 6 всегда существует и, конечно, поскольку $\lambda_n \to 0$, M_n и r_n уменьшаются при $n \to \infty$; а $\rho_{B^*}(t)/t \to 0$, $\gamma[\tilde{\Psi}(t)] \to 0$ при $t \to 0$.

Замечание 4. Примеры выполнения условия 8 приведены в [I8], а условие 7 проверяется без особого труда.

5. СХОДИМОСТЬ И ОЦЕНКИ СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ ИТЕРАЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ (5) С АККРЕТИВНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

Теперь сформулируем соответствующие результаты для аккретивных операторов.

Т е о р е м а 5. Предположим, что B – равномерно гладкое пространство и выполнены следующие условия:

I. x^* – единственное решение уравнения (I),

2. оператор A является равномерно субаккретивным, т.е. выполнено неравенство (8),

3. $\|y\| \leq \varphi(\|x - x^*\|)$, $y \in A_x$, где $\varphi(t)$ – непрерывная, не-

убывающая функция и $0 \le \varphi(0) < \infty$,

4. начальное приближение x^1 таково, что $\eta = \| x^1 - x^* \|^2 \le R_0^2$,

5. $\sigma \ge \bar{\sigma} = \min\left\{K: 4\lambda_K \varphi^2(r_K) + 2\max\left\{L, \lambda_K \varphi(r_K) + 2r_K\right\} \lambda_K^{-1} \times\right.$

$$\left.\times \rho_B(\lambda_K \varphi(r_K) \le \bar{\Psi}(R_0^2)\right\},\ \bar{\Psi}(\lambda) = \Psi(t),\ \lambda = t^2,\ r_K = R_0 + \lambda_K \varphi(r_0);$$

6. $u(x, c_1) \ge v(x)$ при $x \to \infty$ в $v(x)$ $\tilde{\Psi}(t) = \bar{\Psi}(\lambda),\ \bar{\Psi}^{-1}(t) =$

$$= \left[\Psi^{-1}(t)\right]^2,\ \omega(x) = 4\lambda^2(x)\ \varphi^2(r_\sigma) + 2\max\left\{L, r_\sigma\right\} \rho_B(\lambda(x)\varphi(r_\sigma)),$$

7. C_0 выбрано так, что $u(x, C_1) \ge v(x)$ при $x \to 2$.

Тогда итерационный процесс (5), (9) сильно сходится к x^* и при всех $n \ge 2$ справедлива оценка

$$\| x^n - x^* \|^2 \le u(n, C),\ C = \max\left\{Q, C_1\right\}.$$

Т е о р е м а 6. Пусть выполнены условия I–5 теоремы 5 и в условии 6 неравенство $u(x, C_1) \ge v(x)$ при $x \to \infty$ заменено на (2I). Тогда итерационный процесс (5), (9) сильно сходится к x^* и, кроме того,

а) если $Q \le C_1$, а C_0 выбрано так, что при $x \to 2$ имеет место (2I), то при всех $n \ge 2$ справедлива оценка $\| x^n - x^* \|^2 \le v(n)$,

б) во всех остальных случаях

$$\| x^n - x^* \|^2 \le u(n, c),\ c = \max\left\{Q, C_1\right\},\ 1 < n \le \bar{x},$$

$$\| x^n - x^* \| \le v(n),\ n > \bar{x},$$

где $\bar{x}$ – единственный на интервале $(2, \infty)$ корень уравнения $u(x, C) = v(x)$.

Схема доказательства теорем 5–6 та же, что и у теорем 3–4, только рекуррентное неравенство получается относительно функциоанла Ляпунова $V(x) = \| x - x^* \|^2$.

Замечание 5. Вопросы об устойчивости методов (4), (5) решаются аналогично [I8].

Из теорем 3–6 следует, что сходимость, устойчивость и оценки скорости сходимости методов (4), (5) зависят не только от структуры и гладкости оператора A, но и от геометрических характеристик банаховых пространств.

Литература

1. Альбер Я.И., Рязанцева И.П. - ДАН СССР, 1978, т. 239, № 5, с. 1017 - 1020.
2. Дистель Д. Геометрия банаховых пространств. - Киев: Вища Школа, 1980.
3. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач.- М.: Мир, 1972.
4. Вайнберг М.М. Вариационный метод и метод монотонных операторов.- М.: Наука, 1972.
5. Красносельский М.А., Рутицкий Я.Б. Выпуклые функции и пространства Орлича. М.: Физматгиз, 1958.
6. Bruck R.E.,Jr. - Bull.Am.Math.Soc., 1973, v.79, N6, p.1285.
7. Альбер Я.И. - ДАН СССР, 1979, т. 247, № 6, с. 1292 - 1296.
8. Browder F.E. - J.Functional Analysis, 1977, v.25, p.345-355.
9. Альбер Я.И. - Сборник докладов и сообщений II симпозиума по методам решений нелинейных уравнений и задач оптимизации, т. 1, 1981, Таллин, с. 6 - 11.
10. Альбер Я.И. - Препринт НИРФИ № 116, 1978, с. 1-32.
11. Юдин Д.Б., Немировский А.С. Сложность задач и эффективность методов оптимизации. - М.: Наука, 1979.
12. Юргелас В.В. - ДЕП ВИНИТИ, 9Б 911, 1980.
13. Figiel T. - Studia Math., 1976, v.56, N2, p.121-155.
14. Lindenstrauss J., Tzafriri L. Classical Banach spaces V.II. Berlin-Heidelberg-New York: Springer Verlag, 1979.
15. Bynum W.L. - Can.Math.Bull., 1976, v.19, N3, p.295-275.
16. Соболев С.Л. Введение в теорию кубатурных формул. - М.: Наука, 1974.
17. Hanner O. - Ark.f.Math., 1956, v.3, N3, p.239-244.
18. Альбер Я.И. - ДАН СССР, 1983, т. 270, № 1, с. 11-17.

Дата поступления статьи
4 мая 1983 года

Альбер Яков Иосифович
Нотик Александр Израилевич

ГЕОМЕТРИЯ БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВ И ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

Подписано в печать 21.09.83г. МЦ 24491 Формат 60 x 84 / 16
Бумага множительная. Печать офсетная. Объем 1,16 усл. печ. л.
Тираж 120. Заказ 2982. Бесплатно.

Отпечатано на ротапринте Горьковского научно-исследовательского радиофизического института 603600 Горький ГСП-51, ул. Лядова 25/14, т. 38-09-91, д. 5-09