Министерство высшего и среднего специального образования РСФСР

Горьковский ордена Трудового Красного Знамени
научно-исследовательский радиофизический институт (НИРФИ)

Препринт № 177

О ГЛОБАЛЬНОЙ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СО СЛУЧАЙНЫМ ВЕКТОРНЫМ ВОЗМУЩЕНИЕМ

В.А.Брусин

В.А.Угриновский

Горький 1984

УДК 517.919 + 519.21

Изучается глобальная дихотомия и устойчивость нелинейных дифференциальных уравнений с векторным возмущением и произвольной матрицей линейной части. Для таких систем установлен принцип глобальной дихотомии. Условия, при которых он имеет место, даны в частотной форме. Введены стохастические уравнения Лурье и доказана их разрешимость. Формулируется теорема о структуре глобальной функции Ляпунова. Приведен пример.

Введение

Настоящая работа продолжает начатое в [I] исследование асимптотического поведения решений нелинейных стохастических дифференциальных уравнений Ито и развивает полученные в [I] результаты.

Наиболее распространенным аппаратом в такого рода исследованиях является аппарат стохастических функций Ляпунова [4, 5]. В детерминированной теории абсолютной устойчивости существование функций Ляпунова вида "квадратичная форма плюс интеграл от нелинейности" обеспечивается выполнением условий, выраженных непосредственно в терминах передаточных функций. Установлена также тесная связь между существованием функции Ляпунова указанного вида и разрешимостью уравнений А.И.Лурье [2, 3].

Стохастический вариант достаточных условий абсолютной устойчивости значительно менее развит. Существующие методы в основном опираются на идеи детерминированной теории [I2, I3]. Различные стохастические аналогии уравнений Лурье возникали в ряде работ, например [I3], однако достаточные условия их разрешимости не были указаны.

Последние результаты в теории глобальных функций Ляпунова [9, I0] и теории стохастического оптимального управления [II] позволяют по-другому подойти к исследованию глобальной асимптотики решений стохастических дифференциальных уравнений. Именно, в [I] вместо аппарата стохастических функций Ляпунова используется вспомогательная задача оптимального управления и принцип Беллмана.

В данной работе используется тот же подход. Результаты [I] распространяются на случай нескольких возмущений и произвольной матрицы линейной части уравнения. Формулируются новые результаты о структуре глобальной функции Ляпунова. Вводятся стохастические матричные уравнения Лурье, даются достаточные условия их разрешимости.

I. Вспомогательная задача стохастического оптимального управления

Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение в форме Ито:

$$dx=(Ax+bu)\,dt+\sum_{j=1}^{k}(c_j x+D_j u)\,dw_j(t), \tag{I.I}$$

где x n-мерный, u m-мерный, $w=\mathrm{col}(w_1,\dots,w_k)$ – винеровский k-мерный случайный процесс с ковариационной матрицей $(æ_{ij}(t-s))_{i,j=1,\dots,k}$; A, b, C_j, D_j – постоянные матрицы размера $n\times n$, $n\times m$, $n\times n$, $n\times m$.

Можно, не уменьшая при этом общности результатов, полагать, что Ω – координатное пространство действительных вектор-функций, являющихся реализациями приращений винеровского процесса: $w(t+\Delta t,\omega)-$ $-w(t,\omega)=g_{\Delta t}(t)$, если $\omega=g_{(\cdot)}(\cdot)$, $t\geq 0$, $\Delta t\geq 0$; Σ – наименьшая σ-алгебра, порожденная цилиндрическими разностными множествами $\Lambda=$ $=\{\omega: w(t+\Delta t,\omega)-w(t,\omega)\in\Lambda', t\geq 0, \Delta t\geq 0\}$ (Λ' – борелевское множество в R^k).

Мера $\mathcal{P}$ однозначно определяется совокупностью конечномерных распределений приращений винеровского процесса [6, 7].

Пусть $\{\mathcal{F}_t, t\geq 0\}$ – порождённая процессом $w(t,\omega)$ неубывающая последовательность σ-алгебр, состоящих из множеств, принадлежащих Σ [7].

Под носителем $\mathcal{F}_t$-измеримой случайной величины $z(\omega)$, принимающей значения в гильбертовом пространстве H, будем понимать любое $\mathcal{F}_t$-измеримое множество, которое совпадает с $\{\omega: z(\omega)\neq\theta\}$ с точностью до множеств нулевой меры (θ – нулевой элемент пространства H). Обозначение носителя – $\mathrm{supp}\,z$. В частности, если H – пространство функций, то z – случайный процесс и его носитель $\mathrm{supp}\,z$ – множество элементов $\omega\in\Omega$, которым соответствуют ненулевые реализации случайного процесса, а также все эквивалентные множества.

Пусть $\Delta\in\mathcal{F}_t$. Гильбертово пространство вещественных n-мерных случайных $\mathcal{F}_t$-измеримых векторов h, имеющих конечный второй момент $E|h|^2$, с носителем $\mathrm{supp}\,h\subseteq\Delta$, обозначим $L_2(\Delta,t)$. Скалярное произведение в этом пространстве определено по формуле

$$\langle\langle g,h\rangle\rangle\equiv E\langle g,h\rangle=\int_\Delta\langle g(\omega),h(\omega)\rangle\,d\mathcal{P}$$

(E – оператор математического ожидания, $|\cdot|$ – норма в R^n, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ – скалярное произведение в R^n).

Гильбертово пространство вещественных n-мерных случайных процессов $z(\tau, \omega)$, заданных при $\tau \geq t$ на $(\Omega, \Sigma, \mathcal{P})$, неупреждающих относительно семейства $\{\mathcal{F}_\tau, \tau \geq t\}$, с носителем $\operatorname{supp} z \subseteq \Delta$ и конечным интегралом $\int_\tau^\infty E|z|^2 dt$, обозначим $L_{22}^n(\Delta \times [t, +\infty))$, а скалярное произведение в нём введем по формуле

$$[x, y] = \int_t^\infty E\langle x(t), y(t)\rangle dt .$$

Естественным является доопределение $z(\tau) = 0$ при $\tau \leq t$, $t > 0$. Оно влечет при $t \geq s \geq 0$ вложение пространств

$$L_{22}^n(\Delta \times [t, +\infty)) \subseteq L_{22}^n(\Delta \times [s, +\infty)), \ \Delta \in \mathcal{F}_s. \qquad (I.2)$$

Из вложения σ-алгебр $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$ при $s \leq t$ также следует вложение пространств

$$L_2(\Delta, s) \subseteq L_2(\Delta, t) \quad \text{при} \quad \Delta \in \mathcal{F}_s .$$

Решение уравнения (I.I), отвечающее начальному условию $h \in L_2(\Omega, s)$ и управлению $u = u(t, \omega) \in L_{22}^m(\Omega \times [s, +\infty))$, обозначим $x_s(t, h, u)$, $x_s(s, h, u) = h$ [5].

Предположение I. Система (I.I) L_2-управляемая в среднем квадратическом, т.е. для любого $s \geq 0$, $h \in L_2(\Omega, s)$ существует управление $u(\cdot) \in L_{22}^m(\Omega \times [s, +\infty))$, при котором $x_s(\cdot, h, u) \in L_{22}^n(\Omega \times [s, +\infty))$. Такое управление u мы будем называть стабилизирующим (при данном h).

Множество стабилизирующих при данном $h \in L_2(\Omega, s)$ управлений u с носителем $\operatorname{supp} u \subseteq \Delta$ обозначим $U(h, s, \Delta)$.

Уравнение (I.I) порождает отображение $\Phi_s : (h, u) \to x_s(\cdot, h, u)$ линейного пространства $\{(h, u) : h \in L_2(\Omega, s),\ u \in U(h, s, \Omega)\}$ в пространство $L_{22}^n(\Omega \times [s, +\infty))$, которое является линейным и ограниченным. Это легко установить, опираясь на результаты [II]. При выполнении предположения I, аналогично лемме 2.2 [8], можно показать, что $U(h, s, \Omega)$ – непустое замкнутое множество при любом фиксированном $h \in L_2(\Omega, s)$ и существует линейный непрерывный оператор $T : L_2(\Omega, s) \to L_{22}^m(\Omega \times [s, +\infty))$, один и тот же для всех s – такой что при любом $h \in L_2(\Omega, s)$ $Th \in U(h, s, \Omega)$.

Пусть $F(x,u)$ – заданная на $R^n \times R^m$ квадратичная форма

$$F(x,u)=\langle Rx,x\rangle+2\langle x,Qu\rangle+\langle u,Gu\rangle, \tag{I.3}$$

$R=R^*$, Q, $G=G^*$ – матрицы размера $n\times n$, $n\times m$, $m\times m$. При фиксированном $h\in L_2(\Omega, S)$ зададим на $U(h,S,\Omega)$ функционал

$$J_h^S(u)=\int\limits_S^{\infty} EF(x_s(t,h,u),\ u(t))\,dt. \tag{I.4}$$

Методом леммы I.I работы [I], учитывая представление $u=Pu+Th$ для элементов $U(h,S,\Omega)$ (P – проектор $L_{22}^m(\Omega\times[0,+\infty))$ на подпространство $U(0,0,\Omega)$) и вложение пространств (I.2), можно установить непрерывность J_h^S на $U(h,S,\Omega)$ и тождество

$$J_h^S(u)=\pi_0(Pu,Pu)-2L_h^S(Pu)+J_h^S(Th);$$

здесь приняты следующие обозначения: $\pi_0(u,v)$ – билинейная симметричная непрерывная на $U(0,0,\Omega)\times U(0,0,\Omega)$ форма вида

$$\pi_0(u,v)=\int\limits_0^{\infty} E\{\langle R\Phi_0(0,u),\Phi_0(0,v)\rangle+\langle\Phi_0(0,u),Qv\rangle+$$

$$+\langle\Phi_0(0,v),Qu\rangle+\langle u,Gv\rangle\}\,dt,$$

$L_h^S(u)$ – линейный непрерывный на $U(0,S,\Omega)$ при каждом фиксированном $h\in L_2(\Omega,S)$ функционал вида

$$L_h^S(u)=-\int\limits_S^{\infty} E\{\langle R\Phi_S(0,u),\Phi_S(h,Th)\rangle+\langle\Phi_S(h,Th),Qu\rangle+$$

$$+\langle\Phi_S(0,u),QTh\rangle+\langle u,GTh\rangle\}\,dt.$$

Рассмотрим задачу минимизации функционала (I.4) на множестве стабилизирующих управлений. Основным результатом этого пункта является

Т е о р е м а I. Если предположение I справедливо и существует такое $\varepsilon>0$, что

$$\pi_0(u,u)\geq\varepsilon\int\limits_0^{\infty} E|u|^2\,dt,\ \forall u\in U(0,0,\Omega), \tag{I.5}$$

то задача минимизации $J_h^s(\cdot)$ на $U(h, s, \Omega)$ имеет единственное решение $u^s(\cdot, h)$ при любом фиксированном $h \in L_2(\Omega, s)$, $s \geq 0$. Соответствие $h \to (u^s(\cdot, h), x_s(\cdot, h, u^s(h)))$ является линейным ограниченным оператором $L_2(\Omega, s) \to L^m_{22}(\Omega \times [s, +\infty)) \times L^n_{22}(\Omega \times [s, +\infty))$. Кроме того, существует самосопряженный линейный ограниченный оператор $M_s : L_2(\Omega, s) \to L_2(\Omega, s)$, такой, что

$$\langle\langle M_s h, h \rangle\rangle = \inf J_h^s(u), \quad u \in U(h, s, \Omega).$$

Доказательство основано на общей теореме существования минимума квадратичного функционала с коэрцитивной формой π_0 [14].

Условие (I.5) в детерминированном случае эквивалентно частотному неравенству [8]. Далее мы покажем, что в ряде случаев и для стохастических систем условие (I.5) может быть представлено в эквивалентной частотной форме.

2. Дихотомия и устойчивость траекторий нелинейных стохастических систем

В этом параграфе мы рассматриваем нелинейное стохастической уравнение, соответствующее линейному уравнению (I.I),

$$dx = (Ax + b\varphi(t, \sigma)) + \sum_{j=1}^{k} (C_j x + D_j \varphi(t, \sigma))\, dw_j(t), \quad \sigma = \nu^* x, \quad (2.I)$$

ν – матрица $n \times m$, $\varphi = \mathrm{col}(\varphi_1, \dots, \varphi_m)$ – непрерывная вектор-функция. Мы предполагаем, что для (2.I) выполнены обычные условия существования и единственности решений с $\mathcal{F}_0$ -измеримым начальным условием [5]:

$$|\varphi(t, \sigma_1) - \varphi(t, \sigma_2)| \leq \mathrm{const} \cdot |\sigma_1 - \sigma_2|,$$

$$|\varphi(t, \sigma)| \leq \mathrm{const} \cdot (1 + |\sigma|), \quad \forall \sigma, \sigma_{1,2} \in R^m.$$

Как обычно, предполагаем, что класс нелинейностей допускает квадратичное описание

$$\langle r\sigma, \sigma \rangle + 2\langle \sigma, q\varphi \rangle + \langle g\varphi, \varphi \rangle - \langle \mathrm{diag}[\nu^*(Cx + \quad (2.2)$$

$$+D\varphi)]^2\beta,\varphi'\rangle \le -\delta|\varphi|^2 \quad \text{при} \quad \varphi=\varphi(t,\sigma) \quad (\exists\delta>0).$$

Здесь $\varphi' = \mathrm{col}\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial\sigma_i}\right)$, $\mathrm{diag}[a]=(a_i\delta_{ij})$, δ_{ij} – символ Кронекера, $i,j = 1,\dots,m$, $a = \mathrm{col}(a_i)$, $\beta = \mathrm{col}(\beta_1,\dots,\beta_m)$; $\beta_i = 0$, если φ_i зависит от t , либо от σ_j , $j \ne i$, либо φ_i не дифференцируема; $\rho = \rho^*$, q , $g = g^*$ – квадратные матрицы порядка m .

П р е д п о л о ж е н и е 2. Линейная часть системы (2.I) экспоненциально стабилизируема в среднем квадратическом, т.е. существует матрица μ размера $m\times m$ и числа $\alpha>0$, $\gamma>0$ такие, что решение $x(t)$ уравнения

$$dx = (A+b\mu\nu^*)x\,dt+\sum_{j=1}^{k}(C_j+D_j\mu\nu^*)x\,dw_j(t)$$

удовлетворяет неравенству

$$E|x(t)|^2 \le \gamma e^{-\alpha t}E|a|^2.$$

Это предположение обеспечивает выполнение предположения I для соответствующего линейного уравнения (I.I). Повторяя рассуждения работы [I] , можно доказать принцип глобальной дихотомии для уравнения (2.I) с негурвицевой матрицей A.

Обозначим

$$\Psi(x)=\sum_{i=1}^{m}\Psi_i(\sigma)=2\sum_{i=1}^{m}\int_0^{\sigma_i}\beta_i\varphi_i(\xi)\,d\xi,$$

$$V_s(t,h,\varphi)=\langle\langle M_t x_s(t,h,\varphi),\ x_s(t,h,\varphi)\rangle\rangle+E\Psi(x_s(t,h,\varphi)).$$

Т е о р е м а 2. Пусть

I) $\varphi(t,\sigma)$ удовлетворяет неравенству (2.2);

2) справедливо предположение 2;

3) для формы π_0 , в которой $R=\nu^*r\nu$, $Q=\nu q+A^*\nu\mathcal{B}$ $G=g+2\mathcal{B}\nu^*b$, $\mathcal{B}=\mathrm{diag}[\beta]$ справедливо условие (I.5);

4) $|\Psi_i(\sigma)|\le k_i|x|^2$, $\sigma=\nu^*x$ $(i=1,\dots,m)$.

Тогда для решений уравнения (2.I) возможны только два типа асимптотического поведения при $t\to+\infty$:

либо $E|x_s(t,h,\varphi)|^2 \to +\infty$ при $t\to+\infty$. (2.3) либо $\int\limits_{s}^{+\infty} E(|\varphi(t,\nu^* x_s(t,h,\varphi))|^2 + |x_s(t,h,\varphi)|^2)\,dt < +\infty$. (2.4)

Если вдоль решение $x_s(t,h,\varphi)$, $\varphi \not\equiv 0$ при всех $t > s$ $V_s(t,h,\varphi) \leq 0$, то имеет место (2.4).

Если при некотором $\tau > s$ $V_s(\tau,h,\varphi) > 0$, то имеет место (2.3).

Если предположение 2 справедливо при $\varphi = \mu\sigma$, принадлежащей рассматриваемому классу нелинейностей, то имеет место (2.4) и система (2.I) глобально асимптотически устойчива в среднем квадратическом.

Отметим, что в [I] глобальная дихотомия установлена при более жестких, чем экспоненциальная стабилизируемость линейной части, предположениях. Именно, требовалась экспоненциальная устойчивость в среднем квадратическом тривиального решения линейной однородной системы

$$dy = Ay\,dt + Cy\,dw(t)$$

(для случая скалярного винеровского процесса), что возможно только, если A – гурвицева [I, теорема 5].

При помощи теоремы 2 можно получить достаточные условия стохастической устойчивости в общепринятой форме.

Так для класса уравнений вида (2.I) с $C_j = 0$ $j = 1,\ldots,k$ можно дать следующее достаточное условие дихотомии и устойчивости.

Положим

$$\hat{f}(p) = (pI-A)^{-1}b, \quad \hat{g}_j(p) = (pI-A)^{-1}D_j, \quad j = 1,\ldots,k,$$

$$\Pi(p) = \hat{f}(p)^* R\hat{f}(p) + \hat{f}^*(p)Q + Q^*\hat{f}(p) + G +$$
$$+ \sum_{j,l=1}^{k} \varkappa_{jl} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \hat{g}_l^*(i\lambda)\, R\hat{g}_j(i\lambda)\,d\lambda \tag{2.5}$$

(* – символ эрмитового сопряжения).

Т е о р е м а 2'. Пусть система (2.I) с $C_j = 0$ удовлетворяет условиям I), 2), 4) теоремы 2 и выполняется условие 3'):

для любого $\lambda \in R^1$ $\Pi(i\lambda) \geq \varepsilon I$ $(\exists \varepsilon > 0)$. (2.6)

Тогда имеют место все утверждения теоремы 2.

Действительно, пусть $f(t)$, $g_j(t)$ – преобразования Фурье функций $\hat{f}(i\lambda)$, $\hat{g}_j(i\lambda)$. Решение (I.I) при $C_j = 0$, $j = 1,\ldots,k$,

$h=0$ имеет вид

$$x_0(t,0,u)=\int_0^t f(t-\tau)u(\tau)d\tau+\sum_{j=1}^{k}\int_0^t g_j(t-\tau)u(\tau)dw_j(\tau).$$

Отсюда, из равенства Парсеваля, свойств интеграла Ито и леммы приложения имеет место тождество

$$\pi_0(u,u)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} E\,\mathrm{Re}\langle\Pi(i\lambda)\hat u(\lambda),\hat u(\lambda)\rangle d\lambda\ ,$$

которое доказывает теорему 2′ ($\hat u(\lambda)=\int_{-\infty}^{+\infty}u(t)e^{-i\lambda t}dt$, [7]).

Пример. Рассмотрим уравнение (2.I) с одном нелинейностью, скалярным процессом w и $C=0$:

$$dx=(Ax+b\varphi_1(t,\sigma))dt+D\varphi_1(t,\sigma)dw(t),\ \sigma=\nu^*x. \tag{2.7}$$

Нелинейность φ_1 лежит в секторе $k_1\le\varphi_1/\sigma\le k_2$, $k_{1,2}>0$ $(\forall t>0)$ Предположим, что матрица $A+hb\nu^*$ при некотором $h\in[k_1,k_2]$ – гурвицова и что все полюса многочлена $\nu^*(pI-A)^{-1}b$ лежат вне мнимой оси. Положим $\varphi_2=\varphi_1(t,\sigma)-k_1\sigma$, $\varphi=\mathrm{col}(\varphi_1,\varphi_2)$. Тогда имеет место следующая квадратичная связь:

$$(\varphi_2-\varphi_1+k_1\sigma)(\alpha_1\varphi_1+\alpha_2\varphi_2+\alpha_3\sigma)+\left(\frac{1}{k_2}\varphi_1^2-\varphi_1\delta\right)-\delta|\varphi|^2\le-\delta|\varphi|^2$$

($\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ – произвольные числа, $|\varphi|^2=|\varphi_1|^2+|\varphi_2|^2$). Из теоремы 2′, (I.2) и (2.5) находим вид матрицы Π :

$$\Pi(p)=\begin{pmatrix} k_1\alpha_3(|\hat f(p)|^2+C^2)+\frac{1}{k_2}-\alpha_1+(k_1\alpha_1-1-\alpha_3)\mathrm{Re}\hat f(p), & \frac{(k_1\alpha_1+\alpha_3)\hat f(p)+\alpha_1-\alpha_3}{2} \\ \frac{(k_1\alpha_1+\alpha_3)f^*(p)+\alpha_1-\alpha_3}{2} & \alpha_2 \end{pmatrix}$$

$$\hat f(p)=\nu^*(pI-A)^{-1}b,\quad C^2=\int_{-\infty}^{+\infty}|\nu^*(i\lambda I-A)^{-1}D|^2d\lambda.$$

Достаточным для абсолютной устойчивости, ввиду гурвицевости $A+hb\nu^*$, является существование таких $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$, при которых $\Pi(i\lambda)\ge\varepsilon I$. В частности, при $\alpha_1=-2\varepsilon$, $\alpha_2=2\varepsilon$, $\alpha_3=2k_1\varepsilon$, $\varepsilon=\varepsilon_0/2$ для устойчивости достаточно, чтобы

$$\frac{1}{k_2} - \mathrm{Re}\,\hat{f}(i\lambda) \geq \varepsilon_0, \quad \forall \lambda \in R^1. \qquad (2.8)$$

Условие (2.8) обеспечивает устойчивость при произвольной интенсивности возмущения [5].

3. Эргодические свойства оператора M_S и матричные стохастические уравнения Дурье

Детальное рассмотрение уравнения (I.I) с начальным условием h, имеющим носитель $\mathrm{supp}\, h \subseteq \Delta \subseteq \Omega$, позволяет установить, что оператор M_s не расширяет носитель: $\mathrm{supp}\, M_s h \subseteq \mathrm{supp}\, h$ для любого $h \in L_2(\Delta, s)$, $\Delta \in \mathcal{F}_s$. Изучение отображения

$$\pi_{ij}(\Delta) = \int_\Delta \langle M_s e_i, e_j \rangle \, d\mathcal{P}, \quad i,j = 1,\dots,n$$

(элементы e_j (ω) при любом $\omega \in \Omega$ равны соответствующему вектору из ортонормированного базиса R^n) приводит к следующему выводу:

Т е о р е м а 3. Оператор M_s, $s \geq 0$, эквивалентен в $L_2(\Omega, s)$ оператору умножения на матрицу $m_s(\omega)$. Столбцы этой матрицы измеримы относительно σ-алгебры $\mathcal{F}_s$ и принадлежат $L_2(\Omega, s)$.

В дальнейшем мы будем обозначать эквивалентную M_s матрицу также через M_s. Из теоремы 3 семейство $\{M_s, s \geq 0\}$ образует неупреждающий относительно потока $\{\mathcal{F}_s, s \geq 0\}$ матричнозначный случайный процесс со стохастическим дифференциалом

$$dM_s = N_s ds + \sum_{j=1}^{k} H_j(s) dw_j(s);$$

$\{N_s, s \geq 0\}$ и $\{H_j(s), s \geq 0\}$ – также измеримые случайные процессы со значениями в пространстве матриц порядка n.

Т е о р е м а 4. Случайные процессы M_t, N_t и $H_j(t)$ метрически транзитивны относительно поля разностных множеств [7].

При доказательстве этой теоремы существенную роль играет однозначно определенное сохраняющее меру $\mathcal{P}$ преобразование сдвига Γ_t, для которого

$$\Gamma_t(w(t_2) - w(t_1)) = w(t_2 + t) - w(t_1 + t),$$

образующее полугруппу сохраняющих меру $\mathcal{P}$ точечных метрически транзитивных преобразований Ω в себя [7].

С помощью сформулированных теорем доказывается существование глобальной функции Ляпунова для класса нелинейных систем (2.I). Применяя формулу Ито, легко вывести уравнение Беллмана [I, 3, 5]:

$$\inf_u \Big\{ \langle\langle x, (N_t + A^* M_t + M_t A + \sum_{j=1}^{k} C_j^* M_t C_j + R) x \rangle\rangle +$$

$$+ 2 \langle\langle x, \Big(M_t b + \sum_{j=1}^{k} C_j^* M_t D_j + Q\Big) u \rangle\rangle + \langle\langle u, \Big(G + \sum_{j=1}^{k} D_j^* M_t D_j\Big) u \rangle\rangle = 0, \tag{3.I}$$

$$u = u(t,\omega), \quad u(\tau,\omega) \in L_{22}^{m}(\Omega \times [t,+\infty)), \; x \in L_2(\Omega,t).$$

Решение этого уравнения существует при выполнении условий теоремы I. Им является пара $(x, u^t(t, x))$. Используя свойства положительно-определенного самосопряженного оператора в гильбертовом пространстве, а также метрическую транзитивность процессов N_t и M_t, из (3.I) можно получить следующее утверждение.

Обозначим

$$L_u = \frac{\partial}{\partial t} + \langle Ax + bu, \frac{\partial}{\partial x} \rangle + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{k} \langle C_j x + D_j u, \frac{\partial}{\partial x} \rangle^2 -$$

производящий оператор системы (I.I) [5].

Т е о р е м а 5. Если выполнены условия теоремы I, то существуют такие случайные матрицы $M_0(\omega) = M_0^*(\omega)$, $L_0(\omega)$, $K_0(\omega)$ размеров $n \times n$, $n \times (n+m)$, $(n+m) \times m$, что процессы $M_0(\Gamma_t \omega)$, $L_0(\Gamma_t \omega)$, $K_0(\Gamma_t \omega)$ при любом $t \geq 0$ удовлетворяет системе уравнений

$$\begin{aligned} & N_t + M_t A + A^* M_t + \sum_{j=1}^{k} C_j^* M_t C_j + R = L_t L_t^*, \\ & M_t b + \sum_{j=1}^{k} C_j^* M_t D_j + Q = L_t K_t, \\ & \sum_{j=1}^{k} D_j^* M_t D_j + G = K_t^* K_t. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Кроме того, существуют числовые матрицы $M = M^*$, L, K таких же размеров, удовлетворяющие системе матричных уравнений

$$MA + A^{*}M + \sum_{j=1}^{k} C_j^{*} M C_j + R = LL^{*},$$

$$Mb + \sum_{j=1}^{k} C_j^{*} M D_j + Q = LK, \qquad (3.3)$$

$$\sum_{j=1}^{k} D_j^{*} M D_j + G = K^{*}K,$$

причем разрешимость (3.3) эквивалентна выполнению неравенства

$$L_u \langle x, Mx \rangle + F(x,u) \geq 0, \qquad \forall x \in R^n, \quad u \in R^m.$$

В частном случае, когда $C_j = 0$, $D_j = 0$, уравнения (3.3) аналогичны известным в теории абсолютной устойчивости матричным уравнениям Лурье. Поэтому, естественно систему (3.3) назвать стохастическими матричными уравнениями А.И.Лурье относительно тройки (M, L, K). Уравнения (3.2) обобщают стохастические матричные уравнения Риккати. Если в случае $R \geq 0$, $Q = 0$, $G > 0$ разрешимость (3.2) была доказана [II], то разрешимость различных вариантов стохастических уравнений Лурье ранее лишь предполагалась [I3].

Очевидно, что выполнения условия теоремы 2 достаточно для выполнения условий теоремы 5. Поэтому теорема 2 гарантирует существование функции $V(x) = \langle x, Mx \rangle$, $x \in R^n$, удовлетворяющей неравенству (3.4). Значит, с помощью $V(x)$ можно проводить исследования глобальной асимптотики решений класса нелинейных уравнений, определяемого формой F (или неравенством (2.2)) на основе известных теорем стохастической устойчивости (например, [4], теорема 7.I главы У), так же, как это уже проводилось в детерминированной теории устойчивости [I5].

Приложение

Ниже доказана Лемма, утверждение которой используется при получении условий дихотомии и устойчивости в п.2.

Пусть $g_{1,2}(t)$, $t \in R^1$ – суммируемые с квадратом непрерывные при $t > 0$ функции, равные нулю при $t \leq 0$; $u_{1,2}$ – произвольные случайные процессы из $L_{22}^{1}(\Omega \times [0, +\infty))$; w_1, w_2 – скалярные стандартные винеровские процессы, приращения которых имеют коэффициент корреляции

$$E(w_1(t)-w_1(s))(w_2(t)-w_2(s)) = \varkappa_{12}(t-s).$$

По теореме Планшереля существуют преобразования Фурье

$$\hat{g}_{1,2}(\lambda) = \int_0^\infty g_{1,2}(t)e^{-i\lambda t}dt.$$

Измеримость процессов $u_{1,2} \in L^1_{22}(\Omega \times [0,+\infty))$ обеспечивает для почти всех ω конечность интеграла $\int_0^\infty E|u_{1,2}|^2 dt$. По теореме 2.7 [7] для почти всех ω существует

$$\hat{u}_{1,2}(\lambda) = \int_0^\infty u_{1,2}(t,\omega)e^{-it\lambda}dt$$

и справедливо равенство

$$\frac{1}{2\pi} E\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{u}_{1,2}(\lambda)|^2 d\lambda = E\int_0^{+\infty} |u_{1,2}(t)|^2 dt < +\infty.$$

Л е м м а. При наложенных на $g_{1,2}$ и $u_{1,2}$ ограничениях справедливо тождество

$$\int_0^\infty E\left(\int_0^t g_1(t-\tau)u_1(\tau)\,dw_1(\tau)\int_0^t g_2(t-\tau)u_2(\tau)dw_2(\tau)\right)dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} C\varkappa_{12} \operatorname{Re}\int_{-\infty}^{+\infty} E\,\hat{u}_1(\lambda)\overline{\hat{u}_2(\lambda)}\,d\lambda,$$

где $C = \frac{1}{2\pi}\operatorname{Re}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{g}_1(\lambda)\,\overline{\hat{g}_2(\lambda)}\,d\lambda$, черта – символ комплексного сопряжения.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим левую часть доказываемого равенства через A. Полагая $\tilde{g}_{1,2}(\tau) = g_{1,2}(\tau)\chi_{[0,t]}(\tau)$, где $\chi_B(\tau)$ – индикатор множества B , получим

$$A = \int_0^\infty E\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{g}_1(t-\tau)u_1(\tau)\,dw_1(\tau)\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{g}_2(t-\tau)u_2(\tau)dw_2(\tau)\right\}dt.$$

Введем преобразования Фурье (существование следует из измеримости подынтегральной функции): .

$$H_j(\lambda,t)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \tilde{g}_j(t-\tau)\, u_j(\tau)\, e^{-i\lambda\tau}\, d\tau ,$$

$$F_j(\theta,t)=\int\limits_0^t g_j(\tau)\, e^{-i\theta\tau} dt \equiv \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \tilde{g}_i(\tau)\, e^{-i\theta\tau}\, d\tau , \qquad (\text{П.I})$$

$$(j=1,2).$$

По теореме о свертках [I6]

$$H_j(\lambda,t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F_j(\theta,t)\,\hat{u}_j(\theta+\lambda)\, e^{i\theta t}\, d\theta , \quad j=1,2 .$$

Через $\hat{w}_j(\lambda,\omega)$ обозначим процесс с ортогональными приращениями, который является преобразованием Фурье процесса $w_j(t,\omega)$ [7]. На основании свойств процессов $\hat{w}_j$ и свойств интеграла Ито получим (условия теоремы Фубини здесь и ниже выполняются)

$$A=\frac{1}{2\pi}\,\text{æ}_{1,2}\int\limits_0^{\infty} E\left\{ \operatorname{Re}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} H_1(\lambda,t)\,\overline{H_2(\lambda,t)}\, d\lambda \right\} dt =$$

$$=\frac{\text{æ}_{1,2}}{8\pi^3} E\int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\theta \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\vartheta\, \operatorname{Re}\left\{ \hat{u}_1(\theta+\lambda)\,\overline{\hat{u}_2(\vartheta+\lambda)}\, \times \right. \qquad (\text{П.2})$$

$$\left. \times \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F_1(\theta,t)\, e^{i\theta t}\, \overline{F_2(\vartheta,t)\, e^{i\vartheta t}}\, dt \right\} .$$

Вычислим

$$\hat{F}_j(\theta,\eta)=\int\limits_0^{\infty} F_j(\theta,t)\, e^{i\theta t}\, e^{-i\eta t}\, dt , \quad j=1,2$$

Из (П.I), т.к. $\dfrac{\partial}{\partial t} F_j(\theta,t)=g_j(t)\, e^{-i\theta t}$, то

$$\int\limits_0^{\infty} F_j(\theta,t)\, e^{-i\beta t} dt = -\frac{1}{i\beta}\int\limits_0^{\infty} g_j(t)\, e^{-i(\theta+\beta)t} dt = -\frac{1}{i\beta}\, G_j(\theta+\beta).$$

Отсюда

$$\hat{F}_j(\theta,\eta)=-\frac{1}{i(\eta-\theta)}\, G_j(\eta).$$

Подставив в (П.2) и применив дважды тождество Парсеваля, после соответствующих перестановок порядков интегрирования получим

$$A = æ_{1,2} C E \int_0^{\infty} u_1(t) u_2(t) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i(\eta-\theta)t}}{i(\eta-\theta)} d\theta \overline{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i(\eta-\vartheta)t}}{i(\eta-\vartheta)} d\vartheta} \right] dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} C æ_{1,2} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} E \hat{u}_1(\lambda) \overline{\hat{u}_2(\lambda)} \, d\lambda$$, что и требовалось.

Литература

1. Брусин В.А. - Сиб. мат. ж., 1981, т. 22, № 2, с. 57 - 73.
2. Айзерман М.А., Гантмахер Ф.Р. Абсолютная устойчивость регулирующих систем. - М.: Изд. АН СССР, 1963.
3. Попов В.М. Гиперустойчивость автоматических систем. - М.: Наука, 1970.
4. Кац И.Я., Красовский Н.Н. - ПММ, 1960, т. 27, в. 5, с. 809-823.
5. Хасьминский Р.З. Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. - М.: Наука, 1969.
6. Колмогоров А.Н. Основные понятия теории вероятностей. - М.: Наука, 1974.
7. Дуб Дж.Л. Вероятностные процессы. - М.: ИЛ, 1956.
8. Якубович В.А. - Сиб. мат. ж., 1975, т. 16, № 5, с. 1081 - 1102.
9. Брусин В.А. - ПММ, 1976, т. 40, в. 5.
10. Лихтарников А.Л., Якубович В.А. - Сиб. мат. ж., 1976, т. 17, № 5, с. 1069 - 1085.
11. Bismut J.M. - SIAM J.Contr.and Opt.,1976,v.14,N3, May.
12. Левит М.В. - УМН, 1972, т. 27, в. 4, с. 215 - 216.
13. Пакшин П.В. - Автоматика и телемеханика, 1977, № 4, с. 27 - 36.
14. Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. - М.: Наука, 1979.
15. Гелиг А.Х., Леонов Г.А., Якубович В.А. Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. - М.: Наука, 1978.
16. Титчмарш Е. Введение в теорию преобразований Фурье. - М.-Л.: Гостехиздат, 1948.

Дата поступления статьи
2 марта 1984 г.

Владимир Александрович БРУСИН
Валерий Аронович УГРИНОВСКИЙ

О ГЛОБАЛЬНОЙ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
СО СЛУЧАЙНЫМ ВЕКТОРНЫМ ВОЗМУЩЕНИЕМ

Подписано в печать 20.04.84 МЦ 01140. Формат 60х84/16
Бумага множительная. Печать офсетная. Объем 0,93 усл.п.л.
Тираж 120. Заказ 4041. Бесплатно.

Отпечатано на ротапринте НИРФИ.