Министерство высшего и среднего специального образования РСФСР
Горьковский ордена Трудового Красного Знамени
научно-исследовательский радиофизический институт (НИРФИ)

Препринт № 179

О ПРОДОЛЖЕНИИ ЭРМИТОВО-ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

А.И.Нотик
В.И.Турчин
В.А.Угриновский

Горький 1984

УДК 543.42:51

Рассматривается задача о продолжении эрмитово-положительной функции многих переменных с ограниченного множества во всё пространство с сохранением свойств положительной определённости. Предлагается эффективный алгоритм продолжения, основанный на решении уравнения Винера-Хопфа. Доказана сходимость продолженной функции к истинной, но неизвестной эрмитово-положительной функции.

В различных областях физики и техники широко применяется спектральный анализ стационарных процессов, содержащий процедуру определения спектральной плотности мощности $P(\omega)$ по значениям корреляционной функции $\Phi(\tau)$, известной на ограниченном множестве $\tau \in T \subset R^n$, $n \geq 1$. Сюда относятся, в частности, задачи восстановления распределения радиояркости в радиоастрономических системах апертурного синтеза, восстановления спектральной плотности мощности шума в Фурье-спектрометрах и радиотехнических корреляторах. В математической постановке процедура определения $P(\omega)$ эквивалентна задаче продолжения эрмитово-положительной функции Φ с множества T во все пространство R^n и заключается в определении неотрицательной функции $\tilde{P}(\omega)$, $\omega \in R^n$ такой, что

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{R^n} \tilde{P}(\omega) \exp\left\{i < \omega, \tau >\right\} d\omega = \Phi(\tau), \tau \in T. \qquad (1)$$

В этой постановке задача рассматривалась в [1] для процессов с дискретным временем в случае $n = 1$, а также в работе [2], где описано множество всех $\tilde{P}$, удовлетворяющих (1), в случае $n = 1$. В частности, там показано, что это множество всегда не пусто и состоит либо из одного, либо из бесконечного числа элементов. Однако результирующая конструкция для $\tilde{P}$, указанная в [2], имеет сложный вид. В случае $n > 1$ подобные конструкции авторам неизвестны.

В настоящей работе предлагается эффективный алгоритм построения $\tilde{P}(\omega)$, пригодный для любого $n \geq 1$, если только исходная функция Φ допускает продолжение [3].

1. Постановка задачи и формулировка основных результатов

Дана эрмитово-положительная функция $\Phi(\tau)$ [3] при значениях аргумента $\tau = \mathrm{col}(\tau_1, \ldots, \tau_n)$, $\tau_j \in [-r, r]$, т.е. внутри куба

$\Pi_r \subset R^n$ с центром в начале координат и длиной ребер $2r$. Будем предполагать, что Φ является "срезкой" ограниченной абсолютно интегрируемой эрмитово-положительной во всем R^n функции, так что существует, по крайней мере, одно продолжение Φ с Π_r на все R^n +). Кроме того, предположим, что внутри Π_r $\Phi(\tau)$ непрерывна и имеет ограниченную вариацию.

Задача заключается в том, чтобы для заданной в Π_r $\Phi(\tau)$, обладающей указанными свойствами, найти некоторый способ построения функции $\rho_r(\omega)$, удовлетворяющей (I) для $T = \Pi_r$, т.е. найти способ продолжения $\Phi(\tau)$ с Π_r на R^n. В большинстве, однако, задачи экстраполяции (продолжения) оказываются некорректно поставленными, поэтому с самого начала будем рассматривать регуляризованную задачу: найти способ построения функции $\rho_{r\mu}(\omega) \geqslant 0$ такой, чтобы преобразование Фурье функции $\rho_{r\mu} - \mu$ ($\mu \geq 0$ – числовой параметр) совпадало с $\Phi(\tau)$ в кубе Π_r (физически такая регуляризация эквивалентна добавлению к исследуемому стационарному процессу "белого" шума со спектральной плотностью мощности μ).

Решение поставленной задачи дает

Т е о р е м а I. Для того, чтобы функция $\rho_{r\mu}(\omega)$ вида

$$\rho_{r\mu}(\omega) = \mu |1-g(\omega)|^{-2}, \tag{2}$$

$$g(\omega) = \int_{\Pi_r^+} x(t) \exp\{-i \langle \omega, t \rangle\} dt, \tag{3}$$

где Π_r^+ – открытый куб $\{t : t_j \in (0, r),\ j = 1, \dots, n\}$, $x(t)$ – функция, непрерывная на Π_r^+ и обращающаяся в нуль вне Π_r^+, имеющая ограниченную вариацию в Π_r^+ и конечную норму $\|x\|_{L_1(\Pi_r^+)} \leq q < 1$, удовлетворяла условию

$$\lim_{\Omega \to \infty} \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\Pi_\Omega} (\rho_{r\mu}(\omega) - \mu) \exp\{i \langle \omega, t \rangle\} d\omega = \Phi(t), \quad t \in \Pi_r \tag{4}$$

для всех $\mu \geq \mu_0$, необходимо и достаточно, чтобы $x(t)$ была решени-

---

+) Такая подстановка отвечает физической сути задачи, так как обычно результатом эксперимента являются наблюдаемые в Π_r значения некоторой реально существующей во всем R^n корреляционной функции.

ем уравнения

$$\mu x(t) + \int\limits_{\Pi_r^+} \varphi(t-\tau)x(\tau)d\tau = \varphi(t), \quad t \in \Pi_r^+, \tag{5}$$

причём для нижней границы μ_0 можно указать оценку

$$\mu_0 \geqslant \left(1 + \frac{1}{2q}\right) \|\varphi\|_{L_1(R^n)} . \tag{6}$$

Легко видеть, что задача построения $P_{r\mu}$ по формулам (2) - (6) поставлена корректно, так как оператор в левой части уравнения (5) линеен, непрерывен, положительно определен при любом $\mu > 0$ и, следовательно, обратим [4].

Предложенная оценка $P_{r\mu}$ должна, естественно, удовлетворять предельному соотношению: $P_{r\mu}(\omega) - \mu \to P(\omega)$ при $r \to +\infty$ в каком-либо смысле (здесь $P(\omega)$ – преобразование Фурье эрмитово-положительной во всем R^n функции, "срезкой" которой является φ). В [5] при $n = 1$ показано, что имеет место равномерная сходимость $P_{r\mu}(z)$ к $P(z) + \mu$ на любом компактном множестве точек z полуплоскости $\mathrm{Im}\, z > 0$. При $n \geqslant 1$ справедлива

Т е о р е м а 2. При наложенных на функцию $\varphi(\tau)$ ограничениях, для функции (2) справедливо равенство:

$$\lim_{r \to +\infty} \int\limits_{R^n} |(P_{r\mu}(\omega) - \mu) - P(\omega)|^2 d\omega = 0.$$

2. Доказательство теорем I и 2

Доказательству теоремы I предпошлем две леммы.

Л е м м а I. При наложенных на $\varphi(\tau)$ ограничениях решение уравнения (5) $x(t)$ существует, единственно, абсолютно интегрируемо и интегрируемо с квадратом на Π_r^+, равномерно непрерывно и имеет ограниченную вариацию на Π_r^+; $\|x\|_{L_1(\Pi_r^+)} \leqslant q < 1$ при $\mu \geqslant \mu_0$, удовлетворяющих неравенству (6).

Доказательство. Существование, единственность и свойства интегрируемости $x(t)$ следуют из положительной определенности линейного ограниченного оператора в левой части (5) [4].

Из оценок

$$\mu \int\limits_{\Pi_r^+} |x(t)|\,dt \leqslant \int\limits_{\Pi_r^+} |\varphi(t)|\,dt + \int\limits_{\Pi_r^+}\int\limits_{\Pi_r^+} |x(\tau)|\,|\varphi(t-\tau)|\,d\tau\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\|\varphi\|_{L_1(R^n)} + \int\limits_{\Pi_r^+} |x(t)|\,dt\,\|\varphi\|_{L_1(R^n)}$$

и неравенства (6) следует, что $\|x\|_{L_1(\Pi_r^+)} \leqslant q < 1$.

Поскольку φ равномерно непрерывна, то

$$|x(t_1) - x(t_2)| \leqslant |\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| + \int\limits_{\Pi_r^+} |\varphi(t_1-\tau) -$$

$$- \varphi(t_2-\tau)|\,|x(\tau)|\,d\tau \leqslant (1+q)\varepsilon,$$

если $|\varphi(t_1)-\varphi(t_2)| < \varepsilon$, что влечёт равномерную непрерывность $x(t)$ на Π_r^+. Из аналогичной оценки следует также ограниченность вариации $x(t)$. Абсолютная интегрируемость и интегрируемость с квадратом $x(t)$ вытекают из её непрерывности на Π_r^+.

Л е м м а 2. Пусть $x(t)$ непрерывна на Π_r^+ и равна нулю вне Π_r^+, имеет ограниченную вариацию в Π_r^+, $\|x\|_{L_1(\Pi_r^+)} \leqslant q < 1$, и такова, что при $t \in \Pi_r^+$

$$\lim_{\Omega\to\infty} \int\limits_{\Pi_\Omega} (|1-g(\omega)|^{-2}-1)\exp\{i<\omega,t>\}\,d\omega < \infty,$$

где g определяется по формуле (3). Тогда при $t \in \Pi_r^+$

$$\lim_{\Omega\to\infty} \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{\Pi_\Omega} (|1-g(\omega)|^{-2}-1)\exp\{i<\omega,t>\}\,d\omega = \lim_{\Omega\to\infty}\frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{\Pi_r^+} x(\tau) \int\limits_{\Pi_\Omega^+} \frac{e^{i<\omega,t-\tau>}}{|1-g(\omega)|^2}\,d\omega\,d\tau.$$

Доказательство. Заметим, что из свойств функции $x(t)$ и континуального аналога теоремы Жордана [6] следует представление

$$x(t) = \lim_{\Omega\to\infty} \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{\Pi_\Omega} g(\omega)\exp\{i<\omega,t>\}\,d\omega \qquad (7)$$

в каждой точке $t \in R^n$, за исключением границ куба Π_r^+.

Покажем, что при $t \in R_+^n$

$$\lim_{\Omega\to\infty}\frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{\Pi_\Omega}\frac{\bar g(\omega)}{1-\bar g(\omega)}\exp\{i<\omega,t>\}\,d\omega=0, \qquad (8)$$

где $R^n_+=\{t\in R^n: t_j>0,\ j=1,\dots,n\}$.

Обозначим

$$x_m(t)=\lim_{\Omega\to\infty}\frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{\Pi_\Omega}(\bar g(\omega))^m\exp\{i<\omega,t>\}\,d\omega,\quad m=1,2,\dots \qquad (9)$$

Для $m=1$ имеем $x_1(t)=\overline{x(-t)}=0$ при $t\in R^n_+$. Методом математической индукции, на основании теорем о свертках функций из L_2 [7] убеждаемся в том, что интегралы (9) сходятся и имеет место рекуррентное соотношение

$$x_{m+1}(t)=\int\limits_{R^n}x_m(t-\tau)\,x_1(\tau)\,d\tau,\quad t\in R^n,\ m=1,2,\dots,$$

из которого получаем $x_m(t)=0$, $t\in R^n_+$, $m=1,2,\dots$ (в силу равенства нулю подынтегрального выражения при $t\in R^n_+$). Далее, из оценки

$$\left|\lim_{\Omega\to\infty}\frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{\Pi_\Omega}\frac{\bar g^{N+1}(\omega)}{1-\bar g(\omega)}\exp\{i<\omega,t>\}\,d\omega\right|\le q^{N-1}\int\limits_{R^n}|g(\omega)|^2d\omega\to0,\ N\to+\infty$$

и очевидного равенства

$$0=\lim_{\Omega\to\infty}\frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{\Pi_\Omega}\frac{\bar g(\omega)}{1-\bar g(\omega)}\exp\{i<\omega,t>\}d\omega-\lim_{\Omega\to\infty}\frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{\Pi_\Omega}\frac{\bar g(\omega)^{N+1}}{1-\bar g(\omega)}\exp\{i<\omega,t>\}\,d\omega,$$
$$t\in R^n_+,$$

получаем справедливость равенства (8).

Тогда

$$\lim_{\Omega\to\infty}\frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{\Pi_\Omega}(|1-g(\omega)|^{-2}-1)\exp\{i<\omega,t>\}\,d\omega=$$

$$=\lim_{\Omega\to\infty}\frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{\Pi_\Omega}\frac{g(\omega)}{|1-g(\omega)|^2}\exp\{i<\omega,t>\}\,d\omega=$$

$$=\lim_{\Omega\to\infty}\frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{\Pi_\Omega}\frac{\exp\{i<\omega,t>\}}{|1-g(\omega)|^2}\int\limits_{\Pi_\Omega^+}x(\tau)\exp\{-i<\omega,\tau>\}\,d\tau\,d\omega\,.$$

Применив к полученному равенству теорему Фубини, получаем утверждение леммы.

Перейдём к доказательству теоремы I.

Доказательство необходимости. Пусть функция $x(t)$, $t\in\Pi_r^+$ удовлетворяет условию теоремы, $P_{r\mu}(\omega)$ имеет вид (2) и удовлетворяет равенству (4). Ввиду ограниченности $\Phi(t)$,

$$\lim_{\Omega\to\infty}\frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{\Pi_\Omega}(\mu|1-g(\omega)|^{-2}-\mu)\exp\{i<\omega,t>\}\,d\omega<\infty$$

и поэтому, в силу леммы 2,

$$\Phi(t)=\lim_{\Omega\to\infty}\frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{\Pi_r^+}x(\tau)\int\limits_{\Pi_\Omega}\mu|1-g(\omega)|^{-2}\exp\{i<\omega,t-\tau>\}\,d\omega=$$

$$=\lim_{\Omega\to\infty}\int\limits_{\Pi_r^+}x(\tau)\frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{\Pi_\Omega}(\mu|1-g(\omega)|^{-2}-\mu)\exp\{i<\omega,t-\tau>\}\,d\omega+$$

$$+\lim_{\Omega\to\infty}\mu\int\limits_{\Pi_r^+}x(\tau)\prod_{j=1}^{n}\frac{\sin\Omega(t_j-\tau_j)}{t_j-\tau_j}\,d\tau_1\ldots d\tau_n\,. \tag{I0}$$

По теореме Планшереля $\int\limits_{\Pi_\Omega}(\mu|1-g(\omega)|^{-2}-\mu)\exp\{i<\omega,t-\tau>\}\,d\omega$ сходится к $\Phi(t-\tau)$ по норме $L_2(R^n)$. Следовательно, первое слагаемое в (I0) равно

$$\int\limits_{\Pi_r^+} x(\tau)\,\varphi(t-\tau)\,d\tau,$$

второе слагаемое в (I0) равно $\mu x(t)$ [7]. Отсюда следует уравнение (5).

Достаточность. Заметим, что из леммы I следуют свойства функции x из теоремы I. Введем функцию

$$x_r(t) = \begin{cases} x(t), & t \in \Pi_r^+ \\ 0, & t \notin \Pi_r^+ \end{cases}.$$

Так как φ, по условию, продолжаема, то имеет место представление

$$\lim_{\Omega\to+\infty} \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{\Pi_\Omega} G(\omega)\exp\{i<\omega,t>\}\,d\omega = \varphi(t),\ t\in\Pi_r^+ \tag{II}$$

(хотя бы одна такая G существует). Подставим (II) и (7) в уравнение (5), получим

$$\lim_{\Omega\to+\infty} \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{\Pi_\Omega} [\mu + G(\omega)]\,g(\omega)\exp\{i<\omega,t>\}\,d\omega = \varphi(t),\ t\in\Pi_r^+ . \tag{I2}$$

(II) и (I2) не противоречат друг другу, если

$$g(\omega)\,[\mu + G(\omega)] = G(\omega) + \Psi(\omega), \tag{I3}$$

где Ψ - произвольная функция, обладающая свойством

$$\lim_{\Omega\to+\infty} \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{\Pi_\Omega} \Psi(\omega)\exp\{i<\omega,t>\}\,d\omega = 0,\ t\in\Pi_r^+ .$$

Выбирая с учетом (8) $\Psi = -\mu\bar{g}\,(1-\bar{g})^{-1}$, из (I3) получаем

$$G = \mu\,|1-g(\omega)|^{-2} - \mu,$$

что доказывает теорему I.

Доказательство теоремы 2. Легко видеть, что справедлива оценка

$$\left|\,|1-g(\omega)|^{-2} - 1\,\right|^2 \le (1-q^2)^{-1}\,|2\operatorname{Re} g + q\,|g|^2| \le \mathrm{const}\,|g|^2,$$

из которой вытекает, что $P_{r\mu}-\mu$ принадлежит $L_2(R^n)$. По теореме Планшереля функция

$$\Phi_{r\mu}(t)=\lim_{\Omega\to\infty}\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\Pi_\Omega}(P_{r\mu}-\mu)\exp\{i<\omega,t>\}\,dt \tag{I4}$$

также принадлежит $L_2(R^n)$ и, на основании (4), при $t\in\Pi_r$

$$\Phi_{r\mu}=\Phi(t).$$

Заметим, что

$$\|\Phi_{r\mu}\|^2_{L_2(R^n)}=\|P_{r\mu}-\mu\|^2_{L_2(R^n)}\le \mathrm{const}\int_{\Pi_r^+}|x_r|^2\,dt$$

На основании теоремы о проекционном методе решения операторных уравнений [8, стр. 9I] x_r сходится в $L_2(R^n_+)$ к решению уравнения

$$\mu x+\int_{R^n_+}\Phi(t-\tau)\,x(\tau)\,d\tau=\Phi(t),\ \mu>0.$$

Это влечет равномерную ограниченность $\int_{\Pi_r^+}|x_r(t)|^2\,dt$ и $\|\Phi_{r\mu}\|^2_{L_2(R^n)}$ и фундаментальность семейств $\{x_r,\ r>0\}$ и $\{g_r,\ r>0\}$, $g_r=\int_{\Pi_r^+}x_r(t)\exp\{i<\omega,t>\}dt$.

С помощью оценки

$$\int_{R^n}\left|\frac{\mu}{|1-g_r(\omega)|^2}-\frac{\mu}{|1-g_{r+\Delta r}(\omega)|^2}\right|^2d\omega\le\mathrm{const}\int_{R^n}|g_r(\omega)-g_{r+\Delta r}(\omega)|^2\,d\omega.$$

и равенства Парсеваля получаем фундаментальность семейства $\{\Phi_{r\mu},\ r>0\}$.

Множество функций $\varphi(t)=\prod_{j=1}^{k}t_j^{m_j}\exp\{-t_j^2/2\}$, $m_1+m_2+\ldots+m_k=m$, $m=0,\ 1,\ 2,\ldots$ образуют полную систему функций в $L_2(R^n)$ (ортогонализация этой системы приводит к функциям Эрмита) [9], причем

$$\left|\int_{R^n}(\Phi_{r\mu}(t)-\Phi(t))\varphi(t)\,dt\right|=\left|\int_{R^n\setminus\Pi_r}(\Phi_{r\mu}-\Phi)\varphi\,dt\right|\le$$

$$\le\Big(\int_{R^n\setminus\Pi_r}|\Phi_{r\mu}-\Phi|^2\,dt\Big)^{1/2}\Big(\int_{R^n\setminus\Pi_r}|\varphi(t)|^2\,dt\Big)^{1/2}\le$$

$$\le \mathrm{const}\left(\prod_{j=1}^{k}\left(\int_{-\infty}^{-r}\left(t_j^{m_j}e^{-t_j^2/2}\right)^2 dt_j+\int_{r}^{+\infty}\left(t_j^{m_j}e^{-t_j^2/2}\right)^2 dt_j\right)\right)^{1/2}\to 0$$

при $r\to+\infty$.

Следовательно, $\Phi_{r\mu}$ сходится к Φ слабо [9]. Этот факт вместе с фундаментальностью $\{\Phi_{r\mu}, r>0\}$ означает сильную сходимость в $L_2(R^n)$ $\Phi_{r\mu}$ к Φ. По равенству Парсеваля

$$\int_{R^n}\left|(\rho_{r\mu}(\omega)-\mu)-\rho(\omega)\right|^2 d\omega\to 0 \quad \text{при} \quad r\to+\infty.$$

Авторы благодарны Г.М.Жислину, В.Н.Гольдбергу, М.А.Антонцу и А.И. Кнафелю за внимание к работе и ценные замечания.

Литература

1. Антонец М.А., Кнафель А.И., Нотик А.И., Турчин В.И. Об использовании результатов решения проблемы моментов в задаче спектрального анализа.-Изв.вузов,Радиофизика, 1983, т.26, № 11, с.1457-1462.
2. Аров Д.З., Крейн М.Г. Задача об отыскании минимума энтропии в неопределенных проблемах продолжения. - Функциональный анализ и его приложения. 1981, т. 15, в. 2, с. 61 - 64.
3. Сахнович Л.А. Эффективное построение непродолжаемых эрмитово-положительных функций нескольких переменных. - Функциональный анализ и его приложения. 1980, т. 14, в. 4, с. 55 - 60.
4. Канторович Л.В., Акилов Г.Г. Функциональный анализ в нормированных пространствах. - М.: Физматгиз, 1959.
5. Крейн М.Г. Континуальные аналоги предложений о многочленах, ортогональных на единичной окружности. - ДАН СССР, 1955, т. 105, с. 637 - 640.
6. Ахиезер Н.И. Лекции по теории аппроксимации. - М.: Наука, 1965.
7. Титчмарш Е. Введение в теорию интегралов Фурье. - М.-Л.: Огиз,1948.
8. Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. Уравнения в свертках и проекционные методы их решения. - М.: Наука, 1971.
9. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. - М.: Наука, 1976.

Дата поступления статьи
2 апреля 1984 г.

Александр Израилевич Нотик

Виктор Игоревич Турчин

Валерий Аронович Угриновский

О ПРОДОЛЖЕНИИ ЭРМИТОВО-ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Подписано в печать 04.05.84 г. МЦ 04408. Формат 60х84 1/16.

Бумага множительная. Печать офсетная. Объем 0,77 усл.п.л.

Тираж 120. Заказ 4043. Бесплатно.

Отпечатано на ротапринте НИРФИ.