

**Министерство высшего и среднего специального образования РСФСР**  
**Горьковский ордена Трудового Красного Знамени**  
**научно-исследовательский радиофизический институт (НИРФИ)**

**Препринт № 180**

**РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПО УРОВНЯМ ЛАНДАУ ЭЛЕКТРОНОВ,  
ДВИЖУЩИХСЯ СО СВЕРХСВЕТОВОЙ СКОРОСТЬЮ В СРЕДЕ**

**Б.Е.Немцов**

**В.Я.Эйцман**

**Горький 1984**

УДК 539.183.4

На основе полученных в статье вероятностей перехода электрона по уровням Ландау за счет излучения им в области аномального и нормального доплер-эффектов исследуется временная эволюция пучка по орбитальным энергетическим уровням. Рассматривается вопрос об излучении с переворотом спина. Показано, что за счет аномального доплеровского излучения возможна инверсная заселенность спиновых энергетических уровней.



Уже относительно давно В.Л.Гинзбургом и И.М.Франком [1] было замечено, что при излучении аномальных доплеровских частот движущаяся в среде системой она переходит не на нижний энергетический уровень, как это имеет место для нормальных доплеровских частот, а на верхний. Таким образом, появляется надежда для указанной системы получить инверсную населенность энергетических уровней. Однако в этом процессе существенную роль играет конкуренция излучаемых аномальных и нормальных доплеровских частот. Если для классических систем этот вопрос был рассмотрен ранее в работе В.Л.Гинзбурга и одного из авторов [2], то для квантовых систем, насколько нам известно, в такой постановке задача ещё не решалась. В связи с этим следует заметить, что совсем недавно появились сообщения о том, что удалось, по-видимому, использовать аномальный доплеровский эффект для создания лазера (см. [3, 4]). В связи с вышесказанным представляется интерес рассмотреть конкретную квантовую систему, в которой могут излучаться аномальные доплеровские частоты, и на этом примере исследовать возникающие здесь особенности. В настоящей статье мы остановились на простой и имеющей несомненный практический интерес системе - электронов, движущихся в однородном постоянном магнитном поле в среде, характеризуемой диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ . Оказалось, что действительно в установившемся состоянии, благодаря излучению аномальных доплеровских частот (а.д.ч.), заселяются и высшие энергетические уровни рассматриваемой системы (уровни Ландау). При этом высшие уровни заселяются тем существеннее, чем меньше отношение вероятности излучения нормальных доплеровских частот (н.д.ч.) к вероятности излучения (а.д.ч.). Более того, в рассматриваемой системе удалось определить временную эволюцию распределения электронов по уровням Ландау. При этом разброс по поперечным импульсам связан не со столкновениями электронов друг с другом, а с излучением фотонов. Для установившихся распределений можно ввести понятие температуры и другие термодинамические величины. Весьма существенным моментом, обнаруженным при рассмотрении излучения спи-

нов электронов, оказалось, что возможны условия, когда, благодаря излучению, с изменением направления спина, большинство электронов за счет аномального доплеровского излучения окажется в состоянии с направлением спина, ориентированным против направления внешнего поля  $\vec{H}_0$  (инверсная населенность уровней спинов электронов). Ранее было известно, что для классических систем аналогичная ситуация для поперечных волн в изотропной среде невозможна (см. [2]).

### I. Орбитальные переходы при излучении движущихся электронов

Пусть заряженные частицы со спином  $I/2$  (электроны), помещенные в однородное и постоянное магнитное поле  $H_0$ , движутся в среде с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon > 1$ . Уровни энергии частицы в пренебрежении её взаимодействием с фотонами (уровни Ландау) хорошо известны:

$$E_k = \hbar \omega_H \left( k + \frac{1}{2} \right) + \frac{p_z^2}{2m} + S \frac{\hbar \omega_H}{2} \quad (1)$$

Здесь  $\omega_H = \frac{e\hbar H_0}{mc}$  - гирочастота электронов,  $p_z$  - импульс частицы

вдоль оси  $z$ , натуральное число  $k$  характеризует орбитальную энергию частицы в магнитном поле. Последний член в правой части уравнения (1) описывает энергию магнитного момента частицы, связанного со спином, помещенным в магнитное поле. Если магнитный момент ориентирован по полю, то  $S = -1$ , при противоположной ориентации  $S = +1$ . Предположим, что в начальном состоянии электрон находился на уровне  $k$ , магнитный момент ориентирован произвольно, а продольный импульс  $p_z = p_0$ . Кроме того, будем считать, что в начальном состоянии фотоны в среде отсутствуют. Таким образом, начальное состояние системы характеризуется  $\Psi$ -функцией вида

$$\Psi^{(0)} = \Psi_k(\vec{r}) \exp\left(-i \frac{E_k t}{\hbar}\right) \prod_{\lambda, i=1,2} \Psi_{n_{\lambda_i}=0}(q_{\lambda_i}) e^{-\frac{i\omega_{\lambda_i} t}{2}} \quad (2)$$

Здесь  $\Psi_k(\vec{r})$  - собственная функция частицы с энергией  $E_k$  [5],  $\Psi_{n_{\lambda_i}=0}(q_{\lambda_i})$  - собственные функции фотонов среды в начальном состоянии [6],  $q_{\lambda_i}$  - обобщенные координаты,  $\omega_{\lambda_i} = c\kappa_{\lambda_i}/\sqrt{\epsilon}$ ,  $\kappa_{\lambda_i}$  - вол-

новые числа фотонов. Гамильтониан взаимодействия частицы с полем имеет вид [6, 7]

$$\hat{H}_{int} = -\frac{e}{mc} \left( \left( \hat{\vec{p}} - \frac{e}{c} \vec{A}_0 \right) \hat{A} \right) - \frac{e}{mc} \left( \hat{\vec{\sigma}} \hat{H} \right); \quad (3)$$

$$\hat{A} = \sum_{\lambda, i} \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{\epsilon \omega_{\lambda_i} V}} \vec{e}_{\lambda_i} \left( \hat{a}_{\lambda_i}^+ \exp(-i\vec{x}_{\lambda_i} \vec{r}) + \hat{a}_{\lambda_i} \exp(i\vec{x}_{\lambda_i} \vec{r}) \right), \quad (4)$$

$\hat{A}$  - оператор векторного потенциала,  $\vec{A}_0$  - векторный потенциал однородного поля,  $\vec{e}_{\lambda_i}$  - единичный вектор поляризации фотонов,  $\hat{\vec{\sigma}}$  - матрицы Паули,  $\hat{H} = \text{rot } \hat{A}$  - оператор магнитного поля,  $V$  - объем системы,  $\hat{a}^+$ ,  $\hat{a}$  - операторы рождения и уничтожения фотонов.

В первом порядке теории возмущений оператор взаимодействия (3) действует на спинор вида  $\begin{pmatrix} \Psi^{(0)} \\ 0 \end{pmatrix}$ , где  $\Psi^{(0)}$  дается формулой (2). Нетрудно показать, что часть гамильтониана взаимодействия, изменяющая орбитальную энергию частиц при неизменной ориентации спина, есть

$$\hat{H}_1 = -\frac{e}{mc} \left( \left( \hat{\vec{p}} - \frac{e}{c} \vec{A}_0 \right) \hat{A} \right) - \frac{e}{mc} \hat{\sigma}_z \hat{H}_z. \quad (5)$$

Гамильтониан взаимодействия, изменяющий ориентацию спина,

$$\hat{H}_2 = -\frac{e}{mc} \left( \hat{\sigma}_x \hat{H}_x + \hat{\sigma}_y \hat{H}_y \right). \quad (6)$$

Подсчитаем вначале вероятность процесса, при котором электрон, излучая фотон, переходит с уровня  $k$  на уровень  $k+1$ .

Вероятность излучения фотона энергии  $\hbar\omega$  под углом  $\theta$  к полю  $\vec{H}_0$  определяется  $|C_{k, k+1}|^2$ , причем для поляризации фотона  $\vec{e}_{\lambda_i}$  в плоскости  $y, z$ ,  $\vec{x} = x(0, \sin\theta, \cos\theta)$ ,  $\vec{e}_{\lambda_i} = (0, -\cos\theta, \sin\theta)$  имеем

$$i\hbar \frac{dC_{k, k+1}^{(1)}}{dt} = -i \frac{e\hbar}{m} \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{\omega\epsilon V}} \exp \left[ i \left( \frac{E_{k+1} - E_k}{\hbar} + \omega \right) t \right] \times$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \chi_{k+1}(y) e^{-i\vec{x}y} \left( -i \frac{p_y}{\hbar} \sin\theta + \cos\theta \frac{\partial}{\partial y} \right) \chi_k(y) dy,$$

где  $E_{k+1}$  - энергия электрона в состоянии  $k+1$ ,  $\chi_{k+1}$  - волновая функция электрона в магнитном поле, отвечающая уровням Ландау [5]. Для поляризации фотона  $\vec{e}_{\lambda_i} = (1, 0, 0)$ ,

$$i\hbar \frac{dC_{k, k+1}^{(2)}}{dt} = \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{\omega\epsilon}} e\omega_H \exp\left[i\left(\frac{E_{k+1} - E_k}{\hbar} + \omega\right)t\right] \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{k+1}(y) e^{-izy} \chi_k(y) dy.$$

Используя две последние формулы после суммирования по всевозможным состояниям фотонов, найдем в дипольном приближении вероятность перехода электрона с уровня  $k$  на уровень  $k+1$ :

$$\frac{dW_{k, k+1}}{dt} = \frac{e^2 (k+1)}{2m\omega_H c^2 v} \int_{\frac{\omega + \omega_H}{\beta n\omega} < 1} \left( \frac{(\beta^2 n^2 \omega - \omega - \omega_H)^2}{\beta^2 n^2} + \omega_H^2 \right) d\omega \equiv \nu(k+1), \quad (7)$$

$$\beta = \frac{v}{c}, \quad n = \sqrt{\epsilon}.$$

Конечная вероятность перехода системы на уровень  $k+1$  связана с возможностью излучения волн на аномальных доплеровских частотах [1, 2].

Аналогичные вычисления для перехода системы на уровень  $k-1$  приводят к следующему выражению для вероятности перехода:

$$\frac{dW_{k, k-1}}{dt} = \frac{e^2 k}{2m\omega_H c^2 v} \int_{\frac{|\omega - \omega_H|}{\beta n\omega} < 1} \left( \frac{(\beta^2 n^2 \omega - \omega + \omega_H)^2}{\beta^2 n^2} + \omega_H^2 \right) d\omega \equiv \mu k. \quad (8)$$

Первый член подынтегральных выражений (7), (8) соответствует излучению фотона с поляризацией в плоскости  $\vec{H}_0, \vec{x}$ , а второй отвечает поляризации фотона перпендикулярной магнитному полю. Заметим, что (8) при  $v \rightarrow 0$ ,  $\epsilon = 1$  переходит в хорошо известное выражение для вероятности излучения электрона в магнитном поле:

$$\frac{dW_{k, k-1}}{dt} = \frac{4e^2 k \omega_H^2}{3mc^3}. \quad (9)$$

Из формулы (9) в квазиклассическом приближении ( $\hbar\omega_{n,k} = m v_1^2 / 2$ ) следует выражение для интенсивности магнитно-тормозного излучения в вакууме:

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{2}{3} \frac{e^2 \omega_n^3 v_1^2}{c^3} \quad (10)$$

Чтобы получить классические величины, например, энергию излучения в единицу времени и работу поля излучения на изменение поперечного импульса электрона, необходимо домножить соответственно на  $\hbar\omega$ ,  $\hbar\omega_n$  подынтегральные выражения в формулах (7) и (8). Получающиеся при этом выражения для случая  $k \gg 1$  переходят в соответствующие формулы для полной и колебательной части работы поля излучения для электрона, движущегося по винтовой линии [2].

## 2. Эволюция пучка

Указания на возможность сложной динамики многоуровневой системы при учете а.э.д. были даны в [8]. В настоящей работе мы покажем, используя (7), (8), что можно полностью исследовать динамику и стационарное распределение электронов пучка по уровням Ландау при учете а.э.д. и н.э.д.

Уравнения, определяющие изменение населенности частиц по орбитальным уровням, имеют вид

$$\frac{dn_k}{dt} = \mu(k+1)n_{k+1} + \nu_k n_{k-1} - \nu(k+1)n_k - \mu_k n_k, \quad (11)$$

$n_k$  - число частиц на уровне  $k$ . Первый член связан с переходом  $k+1 \rightarrow k$  за счет излучения на нормальном эффекте Доплера, второй член - с возможностью перехода с  $k-1$  на  $k$ -уровень за счет аномального эффекта Доплера. Два последних слагаемых в правой части уравнения (11) определяют уменьшение населенности уровня  $k$  за счет аномального и нормального доплер-эффектов соответственно. При выводе уравнений (11) учтено, что в дипольном приближении, когда длина волны излучения существенно превосходит ларморовский радиус электронов, отличными от нуля оказываются вероятности переходов лишь на соседние уровни. Система (11) представляет собой бесконечную систему сцепляющихся уравнений. Стационарное решение (11) легко находится:

$$n_k = \alpha \left( \frac{\nu}{\mu} \right)^k \quad (12)$$

Это распределение нормируется, если  $\nu < \mu$ , т.е. переходы за счет нормального эффекта Доплера являются преобладающим по сравнению с переходами вверх. В этом случае нормировочная постоянная  $\alpha = N_0 \left(1 - \frac{\nu}{\mu}\right)$ , где  $N_0$  - полное число частиц пучка.

Стационарное распределение соответствует "поперечной температуре" пучка  $T = \hbar \omega_n / \ln(\mu/\nu)$ .

Оказывается возможным исследовать эволюцию пучка во времени по орбитальным энергетическим уровням. Ищем решения уравнений (II) в виде

$$n_k = \oint_C W(\rho, \tau) \rho^k d\rho \quad (13)$$

Здесь  $\tau = \mu t$ ,  $C$  - замкнутый контур интегрирования. (Из условия  $\sum n_k < \infty$  следует  $|\rho| < 1$ ). Считая  $\tilde{W}(\rho, \tau)$  однозначной функцией  $\rho^k$  для  $W(\rho, \tau)$ , получим из (II) следующее уравнение:

$$\frac{\partial W(\rho, \tau)}{\partial \tau} = (1-\rho) \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho-x) W(\rho, \tau), \quad x \equiv \frac{\nu}{\mu} \quad (14)$$

Уравнение (14) следует дополнить начальными условиями. Пусть при  $t = 0$  на нулевом уровне ( $k = 0$ ) было  $n_0$  частиц на первом  $n_1$ , на втором  $n_2$  и т.д. Этим начальными условиями соответствует

$$W(\rho, 0) = \frac{1}{2\pi i} \left( \frac{n_0}{\rho} + \frac{n_1}{\rho^2} + \frac{n_2}{\rho^3} + \dots \right) \quad (15)$$

Уравнение (14) можно решать методом характеристик. В результате получим

$$W(\rho, \tau) = \frac{\eta \left( \frac{\rho-x}{\rho-1} e^{-\tau(x-1)} \right)}{\rho-x} \quad (16)$$

$\eta$  - произвольная функция, которую следует определять из начальных условий. Рассмотрим конкретные примеры.

I. Пусть при  $t = 0$  все частицы находились на уровне  $k = 0$ . Ре-



нение уравнения (I4), удовлетворяющее этому начальному условию, имеет вид

$$W(\rho, \tau) = \frac{n_0(x-1)e^{-\tau(x-1)}}{2\pi i(x - e^{-\tau(x-1)})(\rho - \rho_0)}, \quad (I7)$$

$$\rho_0 = \frac{x(1 - e^{-\tau(x-1)})}{x - e^{-\tau(x-1)}}.$$

Из (I7) видно, что  $W(\rho, \tau)$  - однозначная аналитическая функция. Полюс  $\rho = \rho_0$  лежит в интервале от нуля до единицы при любых  $\tau$  и  $x$ . Зависимость  $n_k$  от  $\tau$  легко определить (см. (I7), (I3)):

$$n_k = \frac{n_0(x-1)e^{-\tau(x-1)}}{x - e^{-\tau(x-1)}} \left( \frac{x(1 - e^{-\tau(x-1)})}{x - e^{-\tau(x-1)}} \right)^k. \quad (I8)$$

При  $\lambda/\mu < 1$ ,  $\tau \rightarrow \infty$   $n_k$  выходит на стационарное значение (I2). При  $x > 1$  стационарное распределение не реализуется, а населенность уровня  $k$  падает по закону

$$n_k = \frac{n_0(x-1)}{x} e^{-\tau(x-1)}. \quad (I9)$$

2. Рассмотрим теперь случай, когда при  $t = 0$  частицы распределены по уровням Ландау по экспоненциальному закону, т.е.

$$W(\rho, 0) = \frac{1}{2\pi i} \frac{N_0(1-\gamma)}{\rho-\gamma} = \frac{N_0(1-\gamma)}{2\pi i \rho} \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{\gamma}{\rho} \right)^k, \quad \gamma < 1. \quad (20)$$

Изменение населенности во времени в этом случае имеет вид

$$n_k = \frac{N_0(x-1)e^{-\tau(x-1)}}{\xi - e^{-\tau(x-1)}} \left( \frac{\xi - x e^{-\tau(x-1)}}{\xi - e^{-\tau(x-1)}} \right)^k, \quad (21)$$

$$\xi \equiv \frac{x-\gamma}{1-\gamma}.$$

### 3. Изменение ориентации спинов за счет излучения

Выше была рассмотрена динамика пучка частиц по орбитальным уровням энергии. Между тем, возможность излучения волн в области аномального эффекта Дошлера приводит к тому, что первоначально ориентированные по полю магнитные моменты, вследствие излучения, могут изменить ориентацию на противоположную. Тем самым, аномальное доплеровское излучение является механизмом увеличения внутренней энергии магнитных моментов. Для нахождения вероятности излучения с изменением ориентации спина следует учитывать гамильтониан взаимодействия (6). Амплитуда вероятности процесса, при котором электрон, излучая фотон частоты  $\omega_{\lambda_i}$  и поляризации  $\vec{e}_{\lambda_i}$ , изменяет ориентацию спина и импульс:

$$i\hbar \frac{dC_{\lambda_i}}{dt} = - \frac{e\hbar}{2mc} \int \varphi^{*'} (\hat{H}_x + i\hat{H}_y) \Psi^{(0)} d\vec{q} d\vec{r}, \quad (22)$$

$\Psi^{(0)}$  дается формулой (2),  $\varphi^{(1)}$  - собственная функция системы электрон - один фотон в состоянии  $\lambda_i$ . Интегрирование ведется по всем обобщенным координатам фотонов и координатам частицы.

Пусть для определенности вектор поляризации фотона лежит в той же плоскости, что и  $\vec{x}_{\lambda_i}$  и  $\vec{H}_0$ . Учитывая также, что оператор уничтожения, действуя на  $\Psi^{(0)}$ , дает нуль, приходим к соотношению

$$\frac{dC_{\lambda_i}}{dt} = \frac{e}{2m} \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{\omega_{\lambda_i}\epsilon V}} \left[ x_{\lambda_i} \exp \left[ i \left( \omega_{\lambda_i} + \omega_H - x_z v + \frac{\hbar x_z^2}{2m} \right) t - \frac{\hbar x_z^2}{4m\omega_H} \right] \right], \quad x_z^2 = x_x^2 + x_y^2. \quad (23)$$

При получении (23) использовался закон сохранения импульса по оси  $z$ :  $p_0 = p_{1z} + \hbar x_z$ , который автоматически следует из вычисления интеграла по  $\vec{z}$  в формуле (22). Амплитуда вероятности рассматриваемого процесса  $|C_{\lambda_i}|^2$  легко определяется из (23):

$$\frac{d|C_{\lambda_i}|^2}{dt} = \frac{e^2 \hbar \pi^2 x^2}{Vm^2 \epsilon \omega_{\lambda_i}} e^{-\frac{\hbar x_z^2}{2m\omega_H}} \delta \left( \omega_{\lambda_i} + \omega_H - x_z v + \frac{\hbar x_z^2}{2m} \right). \quad (24)$$

При получении выражения (24) использовалась формула

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sin \zeta t}{\zeta} = \pi \delta(\zeta).$$

Равенство нулю аргумента  $\delta$ -функции выражает собой закон сохранения энергии в системе частица со спином фотон. Действительно, если в начальном состоянии магнитный момент электрона направлен по полю, то

$$E_0 = \hbar \omega_n k + \frac{p_0^2}{2m} \quad (25)$$

Энергия системы в конечном состоянии, т.е. после переворота спина,

$$E_1 = \hbar \omega_n (k+1) + \frac{p_{1z}^2}{2m}, \quad (26)$$

где  $p_{1z}$  - импульс частицы вдоль оси  $z$  после излучения. Используя закон сохранения импульса по оси  $z$ , из равенства  $E_0 = E_1 + \hbar \omega$  получаем

$$\omega \lambda_i + \omega_n - \alpha_z v + \frac{\hbar \alpha_z^2}{2m} = 0. \quad (27)$$

При  $\hbar \rightarrow 0$  из (27) следует обычное классическое условие для излучения на аномальных доплеровских частотах. Последний член левой части уравнения (27) описывает отдачу, которую испытывает электрон при излучении. Для исследования возможных эффектов, связанных с отдачей, будем вначале рассматривать среду без дисперсии. Такое приближение будет оправдано, если во всем диапазоне излучаемых спином волн диэлектрическая проницаемость меняется мало. Угли между первоначальной скоростью  $v$  и волновым вектором  $\vec{\alpha}$  легко определить:

$$\cos \theta_{1,2} = \frac{m \left( v \mp \sqrt{v^2 - 2 \frac{\hbar \alpha}{m} \left( \frac{c}{\sqrt{\epsilon}} + \frac{\omega_n}{\alpha} \right)} \right)}{\hbar \alpha} \quad (28)$$

В отличие от классического случая, учет отдачи может привести к тому, что излучение с поворотом спина на данной частоте может распространяться под двумя разными углами.

Простой анализ уравнения (28) показывает, что излучение возникает при

$$m v \left( \frac{v}{2} - \frac{c}{\sqrt{\epsilon}} \right) > \hbar \omega_H - \frac{m c^2}{2\epsilon}, \quad v > \frac{c}{\sqrt{\epsilon}},$$

причем если  $m v \left( \frac{v}{2} - \frac{c}{\sqrt{\epsilon}} \right) < \hbar \omega_H$ , то вклад в полную энергию излучения дает лишь корень  $\theta_1$ . При этом, полная излученная электрон энергия в единицу времени есть

$$\frac{dW_1}{dt} = \frac{\mu_0^2}{c^2} \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{\epsilon \omega^3 \exp\left(-\frac{\hbar \omega^2 \epsilon \sin^2 \theta_1}{2 m \omega_H c^2}\right)}{\sqrt{v^2 - 2 \frac{\hbar}{m} (\omega + \omega_H)}} d\omega \equiv \int_{\omega_1}^{\omega_2} f(\omega, \theta_1) d\omega;$$

$$\omega_{1,2} = \frac{c m}{\sqrt{\epsilon} \hbar} \left( v - \frac{c}{\sqrt{\epsilon}} \mp \sqrt{\left( v - \frac{c}{\sqrt{\epsilon}} \right)^2 - 2 \frac{\hbar \omega_H}{m}} \right), \quad \mu_0 = \frac{e | \hbar}{2 m c}, \quad (29)$$

$\theta_1$  определяется из (28), где следует положить  $\alpha = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon}$ . С ростом скорости, точнее при  $m v (v/2 - c/\sqrt{\epsilon}) > \hbar \omega_H$ , появляется вклад в поле излучения от корня  $\theta_2$ , а интенсивность излучения определяется суммой интегралов типа (29), но с другими пределами интегрирования:

$$\frac{dW_2}{dt} = \int_{\omega_1}^{\omega_0} f(\omega, \theta_1) d\omega + \int_{\omega_2}^{\omega_0} f(\omega, \theta_2) d\omega. \quad (30)$$

Здесь  $\omega_0$  - граничная частота излучения, следующая из соотношения

$$\hbar \omega_0 + \hbar \omega_H = \frac{m v^2}{2}. \quad (31)$$

Физический смысл граничной частоты  $\omega_0$  состоит в том, что частица в процессе испускания кванта этой частоты останавливается. Нетривиальным оказывается тот факт, что спектр мощности имеет интегрируемую особенность вблизи  $\omega_0$ . Как уже отмечалось, при учете отдачи в процессе излучения становится возможным и сложный эффект Доплера в среде без дисперсии. Из условия (28) следует, что под заданным углом  $\theta$  излучаются, вообще говоря, две частоты:

$$\omega^{1,2} = \frac{c m}{\sqrt{\epsilon} \hbar \cos^2 \theta} \left( \left( v \cos \theta - \frac{c}{\sqrt{\epsilon}} \right) \pm \sqrt{\left( v \cos \theta - \frac{c}{\sqrt{\epsilon}} \right)^2 - 2 \frac{\hbar \omega_H \cos^2 \theta}{m}} \right) \quad (32)$$

Рассмотрим теперь другой предельный случай, когда дисперсионные свойства среды сказываются раньше, чем эффекты отдачи.

В этом случае в (24), (27) можно пренебречь слагаемым  $\frac{\hbar \alpha^2}{2m}$  и выражение для интенсивности излучения приобретает вид

$$\frac{dW_3}{dt} = \frac{\mu_0^2}{c^2 v} \int_{\frac{\omega + \omega_H}{\beta n \omega} < 1} \varepsilon \omega^3 d\omega, \quad \vec{e}_{\lambda_i} = \{0, -\sin \theta, \cos \theta\}. \quad (33)$$

Далее нам потребуется выражение, аналогичное (33), для интенсивности излучения с поляризацией, перпендикулярной  $H_0$ .

$$\frac{dW_4}{dt} = \frac{\mu_0^2}{v^3} \int_{\frac{\omega + \omega_H}{\beta n \omega} < 1} \omega (\omega + \omega_H)^2 d\omega. \quad (34)$$

Обратный процесс излучения с поворотом магнитного момента по полю рассматривается аналогично предыдущему. Получающиеся при этом формулы отличаются от (29), (30), (33), (34) лишь заменой  $\omega_H \rightarrow -\omega_H$ .

Для исследования динамики спинов, движущихся в среде, необходимо знать вероятности излучения с поворотом спина. Соответствующие формулы легко получить, заметив, что они отличаются от выражений (33), (34), (29), (30) множителем  $1/\hbar \omega$  под знаком интеграла. В результате для полной вероятности излучения в единицу времени с поворотом спина против и по полю получаем

$$a = \frac{\mu_0^2}{\hbar v^3} \int_{\frac{\omega + \omega_H}{\beta n \omega} < 1} ((\omega + \omega_H)^2 + \beta^2 n^2 \omega^2) d\omega; \quad (35)$$

$$b = \frac{\mu_0^2}{\hbar v^3} \int_{\frac{|\omega - \omega_H|}{\beta n \omega} < 1} ((\omega - \omega_H)^2 + \beta^2 n^2 \omega^2) d\omega. \quad (36)$$

Пусть число электронов с магнитным моментом вдоль поля  $n_1$  против поля  $n_2$ . Уравнения, описывающие их динамику,

$$\frac{dn_1}{dt} = -an_1 + bn_2; \quad (37)$$

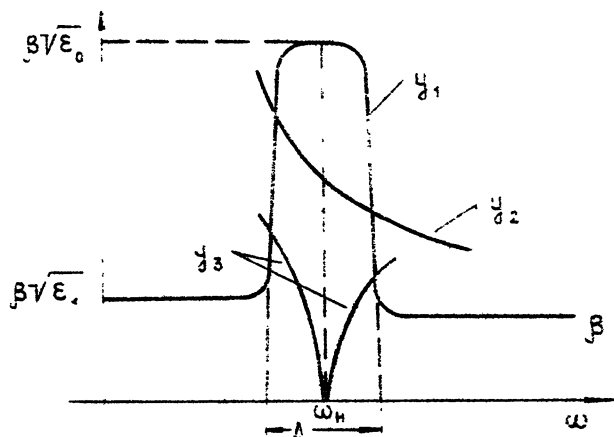
$$n_1 + n_2 = N_0. \quad (38)$$

Их решение:

$$n_1 = n_{10} e^{-(a+b)t} + \frac{N_0 b}{a+b} \left(1 - e^{-(a+b)t}\right). \quad (39)$$

Стационарное отношение населенностей:  $\frac{n_1}{n_2} = \frac{b}{a}$ . Если отношение  $\frac{b}{a} < 1$ , то возможно возникновение инверсной населенности системы спинов.

Опишем коротко простой случай, когда имеет место инверсная населенность энергетических уровней спина в магнитном поле. Предположим, что  $n(\omega)$  описывается кривой, изображенной на рис. I, т.е. величина



$$y_1 = \beta \sqrt{\epsilon(\omega)}, \quad y_2 = 1 + \frac{\omega_H}{\omega}, \quad y_3 = \left|1 - \frac{\omega_H}{\omega}\right|$$

Рис. I

$n(\omega)$  существенно больше единицы лишь в узком интервале около гирочастоты ( $\omega \gg \Delta$ ,  $\beta\sqrt{\epsilon_0} > 1$ ). Тогда, при  $\beta\sqrt{\epsilon_0} > 2 + \frac{\Delta}{2\omega_H} \approx 2$ ,  $\omega_H < \Delta/2\beta\sqrt{\epsilon_0}$ , пределы интегрирования в (35), (36) одинаковы

$$a = \frac{\mu_0^2 \omega_H^2 \Delta}{\hbar v^3} (4 + \beta^2 \epsilon_0), \quad b = \frac{\mu_0^2 \omega_H^2 \Delta}{\hbar v^3} \beta^2 \epsilon_0,$$

$$\frac{b}{a} = \frac{1}{1 + 4/\beta^2 \epsilon_0},$$

т.е. действительно в этом случае вероятность излучения аномальных доплеровских частот больше вероятности излучения нормальных доплеровских частот и имеет место инверсия уровней спина электрона. Интересно отметить, что, как следует из [2], в классической системе раскачка колебаний за счет аномального доплер-эффекта при излучении поперечных волн в изотропной среде невозможна. В то же время в рассматриваемой квантовой системе взаимодействия спина с излучением вполне возможна ситуация, когда действие аномального доплеровского излучения в изотропной среде превалирует над нормальным доплеровским излучением.

## Л и т е р а т у р а

1. Гинзбург В.Л., Франк И.М. Об эффекте Доплера при сверхсветовой скорости. - ДАН СССР, нов.серия 1947, т. 56, № 6, с. 583 - 586.
2. Гинзбург В.Л., Эйдман В.Я. О силе реакции излучения при движении заряда в среде. - ЖЭТФ, 1959, т. 36, в.6, с. 1823 - 1833.
3. Диденко А.Н., Борисов А.Р., Фоменко Г.А., Шанаковский А.С., Штейн Д.Т. Циклотронный мазер на аномальном эффекте Доплера.- Письма в ЖЭТФ, 1983, т. 9, № 21, с. 1331 - 1334.
4. Гадузо С.Д., Канавец В.И., Слепков А.И., Плетюшкин В.А. Релятивистский циклотронный генератор на аномальном эффекте Доплера. - ЖЭТФ, т. 52, № 8, 1982, с. 1681 - 1683.
5. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Квантовая механика. Нерелятивистская теория. - М.: Наука, 1974, 750 с.
6. Гинзбург В.Л. Теоретическая физика и астрофизика. Доп. главы изд. 2-е переработанное. - М.: Наука, 1981, с. 502.
7. Алексеев А.И., Никитин Д.П. Квантование электромагнитного поля в диспергирующей среде. - ЖЭТФ, 1966, т. 50, в. 4, с. 915 - 926.
8. Гинзбург В.Л., Файн В.М. Об излучении систем с многими уровнями, движущихся в среде со сверхсветовой скоростью. - ЖЭТФ, 1958, т. 35, в. 3(а), с. 817 - 818.

Дата поступления статьи  
26 апреля 1984 г.

Борис Ефимович Немцов  
Виктор Яковлевич Эйдман

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПО УРОВНЯМ ЛАНДАУ ЭЛЕКТРОНОВ,  
ДВИЖУЩИХСЯ СО СВЕРХСВЕТОВОЙ СКОРОСТЬЮ В СРЕДЕ

---

Подписано в печать 30.05.84 г. МЦ 01280. Формат 60 x 84 1/16  
Бумага множительная. Печать офсетная. Объем 0,98 усл. печ. л.  
Тираж 120. Заказ 4049. Бесплатно.

---

Отпечатано на ротационной НИРФИ