Министерство высшего и среднего специального образования РСФСР.

Горьковский ордена Трудового Красного Знамени
научно-исследовательский радиофизический институт (НИРФИ)

Препринт № 184

О РАСПРОСТРАНЕНИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В СРЕДЕ С ХАОТИЧЕСКИМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ

Л.М.Ерухимов

П.И.Шпиро

Горький 1984

УДК 621.371.25

В работе рассмотрена задача о распространении электромагнитных волн в среде с хаотически неоднородным гравитационным полем, когда эффективный показатель преломления имеет случайную компоненту, обусловленную флуктуирующей частью плотности масс.

Для случая статистически однородных флуктуаций получены выражения для структурной функции геометрооптической фазы волны, функций когерентности и частотной корреляции комплексно-сопряженных полей, приведены оценки для дисперсии флуктуаций угла прихода сигнала и радиуса частотной корреляции.

Получены выражения для максимального коэффициента усиления шероховатой гравитационной линзы.

Среди задач, связанных с анализом влияния гравитационного поля на распространение электромагнитных волн в галактической и метагалактической плазме, задачи распространения в хаотически неоднородном поле занимают особое место [I]. Последнее обусловлено прежде всего тем, что такие неоднородности поля гравитации накладывают ограничение на предельное угловое разрешение космических источников, а изучение гравитационных эффектов является одним из способов диагностики "невидимых" масс во Вселенной. Такого рода задачи представляют и методический интерес, поскольку в этом случае разделение регулярных и статистических эффектов часто носит условный характер. Примером может служить классический эффект гравитационной фокусировки при прохождении электромагнитной волны вблизи какой-либо фокусирующей системы, например, Галактики, распределение масс в которой имеет хаотическую компоненту. Здесь возникают статистические эффекты, подобные эффектам шероховатой линзы, то есть имеет место распространение волн в среде с сугубо неоднородными в статистическом смысле флуктуациями показателя преломления. Другой случай, когда волна не встречает ясно выраженных отклоняющих лучи систем, аналогичен случаю распространения волны в статистически однородной среде.

В настоящей работе проведено сравнительно простое описание эффектов дифракции электромагнитных волн в указанных приближениях.

Как известно, в нерелятивистском приближении потенциал произвольного распределения масс определяется известным соотношением [2]

$$U(\vec{r}) = \gamma \int \frac{\mu(\vec{r}\,')\, d\vec{r}\,'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}, \qquad (I)$$

где γ – гравитационная постоянная, μ – плотность масс. Выполнение условия $U \ll c^2$, c – скорость света, дает возможность рассматривать распространение излучения в среде, имеющей эффективный показатель преломления $n = 1 + 2U/c^2$, - оптически более плотной вблизи гравитирующих масс [3].

Очевидно, что если плотность масс является хаотической функцией координат $\mu = \langle\mu\rangle + \tilde{\mu}$ ($\langle\mu\rangle$ - средняя, $\tilde{\mu}$ - флуктуирующая части плотности), то и n будет иметь случайную компоненту -

$$\tilde{n}(\vec{r}) = \frac{2\gamma}{c^2}\int \frac{\tilde{\mu}(\vec{r}\,')\, d\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}. \tag{2}$$

I. Рассмотрим случай, когда гравитирующие массы расположены в слое конечной толщины $2L$ в направлении z распространения луча и бесконечном - поперек него. Тогда выражение (2) можно записать в виде

$$\tilde{n}(\vec{r}) = \frac{2\gamma}{c^2}\int_{-\infty}^{\infty} dz' \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{\rho}_\perp{}' \frac{\mu(z', \vec{\rho}_\perp{}')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} M(z'), \tag{3}$$

где для простоты $M(z) = e^{-z^2/L^2}$, L - полутолщина слоя, $\vec{r} = \vec{r}(z, \vec{\rho}_\perp)$.

Воспользовавшись известным представлением [4]

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = \frac{1}{2\pi^2}\int \frac{e^{i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}\,')}}{k^2}\, d\vec{k}, \quad \vec{k} = \vec{k}(k_z, \vec{k}_\perp), \quad k^2 = k_z^2 + k_\perp^2,$$

получим корреляционную функцию случайного показателя преломления такой среды:

$$\Gamma_n(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \frac{\gamma^2}{(\pi c)^4}\iint_{-\infty}^{\infty} dz'\, dz'' \iint_{-\infty}^{\infty} d\vec{\rho}_\perp{}'\, d\vec{\rho}_\perp{}''\, d\vec{k}_1\, d\vec{k}_2 \times$$
$$\times \frac{M(z')\, M(z'')}{k_1^2\, k_2^2}\, \Gamma_\mu(\vec{r}\,', \vec{r}\,'') \exp\left[i\vec{k}_1(\vec{r}_1 - \vec{r}\,') - i\vec{k}_2(\vec{r}_2 - \vec{r}\,'')\right], \tag{4}$$

где $\Gamma_\mu(\vec{r}',\vec{r}'')=\langle\tilde{\mu}(\vec{r}')\tilde{\mu}(\vec{r}'')\rangle$ – корреляционная функция флуктуаций плотности масс. В рассматриваемом случае эту функцию можно считать зависящей только от разностных координат $\vec{r}'-\vec{r}''$, и, следовательно, записать

$$\Gamma_\mu(\vec{r}',\vec{r}'')=\Gamma_\mu(\vec{r}'-\vec{r}'')=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\Phi_\mu(\vec{æ})e^{i\vec{æ}(\vec{r}'-\vec{r}'')}d\vec{æ}, \qquad (5)$$

$\Phi_\mu(\vec{æ})$ – трехмерный спектр флуктуаций плотности масс, $\vec{æ}=\vec{æ}(æ_z,\vec{æ}_\perp)$.

Подставив (5) в (4) и проинтегрировав получившееся выражение по координатам $\vec{R}=(\vec{\rho}_\perp'+\vec{\rho}_\perp'')/2$ и $\vec{\rho}_\perp=\vec{\rho}_\perp'-\vec{\rho}_\perp''$, а затем по $\vec{K}_{1\perp}$ и $\vec{æ}_\perp$, получим

$$\Gamma_n(z_1,z_2,\vec{\rho}_1,\vec{\rho}_2)=\frac{4\gamma^2}{c^4(2\pi)^{3/2}}\int\!\!\int_{-\infty}^{\infty}dz'dz''\int dæ_z\,dK_{1z}\,dK_{2z}\,d\vec{K}_\perp\,e^{i\vec{K}_\perp\vec{\rho}}\times$$

$$\times e^{i(K_{1z}z_1-K_{2z}z_2)}\frac{\Phi_\mu(æ_z,\vec{K}_\perp)M(z')M(z'')}{(K_\perp^2+K_{z_1}^2)(K_\perp^2+K_{z_2}^2)}\exp\left\{i\left[(æ_z-K_{1z})z'-(æ_z-K_{2z})z''\right]\right\} \qquad (6)$$

Дальнейшее упрощение интеграла (6) можно провести, перейдя к координатам $z=(z'+z'')/2$ и $\zeta=z'-z''$ и считая, что L много больше l_z –характерного масштаба изменения функции корреляции $\Gamma_\mu(\zeta_{-1},\vec{\rho})$ вдоль направления распространения луча. (В свою очередь $l_z\sim æ_{z\,эф}^{-1}$, $æ_{z\,эф}$ – характерный масштаб изменения спектра $\Phi_\mu(æ_z,\vec{K}_\perp)$ вдоль этого направления). Тогда, интегрируя (6) по z, ζ и $æ_z$, имеем

$$\Gamma_n(z_1,z_2,\vec{\rho})=\frac{2\pi\gamma^2L}{c^4}\int\!\!\int d\vec{K}_\perp dK_{1z}dK_{2z}\exp\left[i(K_{1z}z_1-K_{2z}z_2)\right]\times$$

$$\times e^{i\vec{K}_\perp\vec{\rho}}\frac{\Phi_\mu((K_{1z}+K_{2z})/2,\vec{K}_\perp)}{(K_\perp^2+K_{1z}^2)(K_\perp^2+K_{2z}^2)}\exp\left[-\frac{(K_{1z}-K_{2z})^2L^2}{8}\right],\quad \vec{\rho}=\vec{\rho}_1-\vec{\rho}_2 \qquad (7)$$

Случайная компонента фазы волны, прошедшей слой с такими неоднородностями, $\tilde{S}(z,\vec{\rho}_\perp)$, определяется соотношением

$$\tilde{S}(z,\vec{\rho}_\perp) = k_0 \int\limits_0^z n(\zeta,\vec{\rho}_\perp)\,d\zeta, \tag{8}$$

где $K_0 = \omega/c$, ω – частота волны. Отсюда выражение для структурной функции фазы $D_S(z,\vec{\rho}_1,\vec{\rho}_2)=\langle[\tilde{S}(z,\vec{\rho}_1)-\tilde{S}(z,\vec{\rho}_2)]^2\rangle$ можно представить в виде

$$D_S(z,\vec{\rho}_1\vec{\rho}_2)=k_0^2\int\limits_0^z d\zeta_1\int\limits_0^z d\zeta_2\,\big[\Gamma_n(\zeta_1,\vec{\rho}_1;\zeta_2,\vec{\rho}_1)-$$
$$-\Gamma_n(\zeta_1,\vec{\rho}_2;\zeta_2,\vec{\rho}_1)-\Gamma_n(\zeta_1,\vec{\rho}_1;\zeta_2,\vec{\rho}_2)+\Gamma_n(\zeta_1,\vec{\rho}_2;\zeta_2,\vec{\rho}_2)\big]. \tag{9}$$

С учётом (7) в переменных $\bar{z}=\dfrac{\zeta_1+\zeta_2}{2}$, $\zeta=\zeta_1-\zeta_2$, $k_z=\dfrac{K_{1z}+K_{2z}}{2}$, $\Delta k_z=K_{z_1}-K_{z_2}$ вместо (9) имеем

$$D_S(z,\vec{\rho})=\frac{4\pi k_0^2\gamma^2 L}{c^4}\int\limits_0^z d\zeta\int\limits_{\zeta/2}^{z-\zeta/2} d\bar{z}\int dk_z\,d\Delta k_z\,d\vec{k}_\perp\, e^{i\Delta k_z\bar{z}}e^{ik_z\zeta}\times$$
$$\times\left[1-\cos(\vec{k}_\perp\vec{\rho})\right]\frac{\Phi_\mu(k_z,\vec{k}_\perp)}{(k_\perp^2+k_z^2)^2}\,e^{-\frac{(\Delta k_z)^2L^2}{8}} \tag{10}$$

В знаменателе мы пренебрегли разницей K_{1z} и K_{2z}, что вполне можно сделать при $l_z \ll L$.

После интегрирования в бесконечных пределах, что справедливо для точек наблюдения $z \gg L$, получим следующее выражение:

$$D_S(\vec{\rho})=\frac{(2\pi)^2k_0^2\gamma^2L}{c^4}\int d\vec{k}_\perp\left[1-\cos(\vec{k}_\perp\vec{\rho})\right]\frac{\Phi_\mu(0,\vec{k}_\perp)}{k_\perp^4}. \tag{11}$$

Примем, что флуктуации $\tilde{\mu}$ изотропны. Тогда $\Phi_\mu(0,\vec{k}_\perp)=\Phi_\mu(|k_\perp|)$ и в (11) удобно перейти к полярным координатам. При этом после интегрирования по угловой переменной имеем

$$D_S(\rho)=\frac{(2\pi)^3k_0^2\gamma^2L}{c^4}\int dk_\perp k_\perp^{-3}\left[1-J_0(k_\perp\rho)\right]\Phi_\mu(k_\perp), \tag{12}$$

где $J_0(x)$ - функция Бесселя нулевого индекса, $\rho = |\vec{\rho}|$. Проинтегрируем это выражение для случая, когда спектральная плотность флуктуаций гравитирующих масс может быть представлена в виде

$$\Phi_\mu(\vec{æ}) = C_\mu^2 æ^{-p} e^{-\frac{æ^2}{æ_{max}^2}} e^{-\frac{æ_{min}^2}{æ^2}}, \tag{13}$$

$æ = |\vec{æ}|$, $æ_{min}$, $æ_{max}$ - характерные масштабы обрезания спектра, C_μ^2 - нормировочный коэффициент, определяемый из условия $\langle\tilde{\mu}^2\rangle = \int \Phi_\mu(\vec{æ})\, d\vec{æ}$ +).

Тогда, используя известное соотношение [5]

$$1 - J_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} (n!)^{-2},$$

будем иметь

$$D_S(\rho) = 2S_0^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n!)^2} \left(\frac{æ_{max}æ_{min}}{4}\right)^n \frac{K_{n-1-p/2}\left(2\frac{æ_{min}}{æ_{max}}\right)}{K_{-1-p/2}\left(2\frac{æ_{min}}{æ_{max}}\right)} \rho^{2n}, \tag{14}$$

где

$$S_0^2 \equiv \langle\tilde{S}^2\rangle = \frac{4\pi^3 K_0^2 \gamma^2}{c^4} L C_\mu^2 (æ_{max}æ_{min})^{-p/2-1} K_{-p/2-1}\left(2\frac{æ_{min}}{æ_{max}}\right), \tag{15}$$

$K_\nu(x)$ - функция Макдональда.

+) Для спектра (13) имеем

$$C_\mu^2 = \begin{cases} \dfrac{\langle\tilde{\mu}^2\rangle}{2\pi\, \Gamma\left(\frac{3-p}{2}\right) æ_{max}^{-p+3}}, & p<3 \\[2ex] \dfrac{\langle\tilde{\mu}^2\rangle}{2\pi\, \Gamma\left(\frac{3-p}{2}\right) æ_{min}^{-p+3}}, & p>3 \end{cases}$$

Подставляя в (I5) выражения для C_μ^2 и учитывая, что $K_\nu(x) = \frac{\Gamma(|\nu|)}{2}\left(\frac{2}{x}\right)^{|\nu|}$ для значений $x = 2\frac{æ_{min}}{æ_{max}} \ll 1$, $\nu \neq 0$, получим

$$S_0^2 = \begin{cases} \pi^2\langle\tilde{\mu}^2\rangle \dfrac{K_0^2\gamma^2 L}{c^4} \dfrac{\Gamma\left(\frac{2+p}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3-p}{2}\right)} \dfrac{(æ_{min})^{-p-2}}{(æ_{max})^{-p+3}}, & p<3 \\ \pi^2\langle\tilde{\mu}^2\rangle \dfrac{K_0^2\gamma^2 L}{c^4} \dfrac{\Gamma\left(\frac{2+p}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3-p}{2}\right)} æ_{min}^{-5}, & p>3 \end{cases} \tag{I6}$$

Для нахождения поля волны в точке наблюдения $P(z,\vec{\rho})$, достаточно удаленной от слоя случайно гравитирующих масс, воспользуемся приближением фазового экрана, поместив экран в плоскости $z = 0$ [6]. Комплексную амплитуду E_{ω_1} поля волны с частотой ω_1, распространяющуюся от бесконечно удаленного точечного источника, можно в таком случае определить как [7]

$$E_{\omega_1}(z,\vec{\rho}_1) = \frac{iK_1}{2\pi z}\int E_{0\omega_1} e^{\frac{iK_1(\vec{\rho}-\vec{\rho}_1)^2}{2z}} e^{i\tilde{S}_{\omega_1}(\vec{\rho})} d\vec{\rho}, \tag{I7}$$

где $K_1 = \omega_1/c$, $E_{0\omega_1}$ – амплитуда падающей волны, $\tilde{S}_{\omega_1}(\vec{\rho})$ – случайный набег фазы на экране.

Подобное выражение можно записать и для комплексной амплитуды E_{ω_2} поля волны с частотой ω_2, пришедшей в точку наблюдения $P_2(z,\vec{\rho}_2)$. Тогда выражение для функции частотной корреляции комплексно-сопряжённых полей $\Gamma_\omega(z,\vec{\rho}_1,\vec{\rho}_2) = \langle E_{\omega_1}(z,\vec{\rho}_1) E_{\omega_2}(z,\vec{\rho}_2)\rangle$ будет иметь вид

$$\Gamma_\omega(z,\vec{\rho}_1,\vec{\rho}_2) = \frac{K_1 K_2}{4\pi^2 z^2}\iint d\vec{\rho}' d\vec{\rho}'' E_{0\omega_1} E_{0\omega_2}^* e^{\frac{i}{2z}[K_1(\vec{\rho}'-\vec{\rho}_1)^2 - K_2(\vec{\rho}''-\vec{\rho}_2)^2]} \times \tag{I8}$$

$$\times \left\langle \exp\left\{ i\left[\tilde{S}_{\omega_1}(\vec{\rho}') - \tilde{S}_{\omega_2}(\vec{\rho}'')\right]^2 \right\} \right\rangle$$

Выше отмечалось, что слой случайно гравитирующих масс содержит достаточно большое количество неоднородностей, следовательно, в силу центральной предельной теоремы теории вероятностей случайные величины $\tilde{n}$ и $\tilde{S}$ можно считать распределенными по нормальному закону. Тогда

$$\left\langle \exp\left\{ i\left[\tilde{S}_{\omega_1}(\vec{\rho}\,')-\tilde{S}_{\omega_2}(\vec{\rho}\,'')\right]\right\}\right\rangle=\exp\left\{-\frac{1}{2}\left\langle\left[\tilde{S}_{\omega_1}(\vec{\rho}\,')-\tilde{S}_{\omega_2}(\vec{\rho}\,'')\right]^2\right\rangle\right\}=e^{-\frac{1}{2}D_S^{\omega}(\vec{\rho}\,',\vec{\rho}\,'')},$$

где

$$D_S^{\omega}=(1-\delta^2)D_S+4\delta^2 S_0^2,\quad \delta=\frac{\omega_1-\omega_2}{\omega_1+\omega_2}=\frac{\Omega}{2\omega_0}, \tag{19}$$

D_S определяется соотношением (9). И переходя в (18) к переменным $\vec{R}=(\vec{\rho}\,'+\vec{\rho}\,'')/2$, $\vec{\rho}=\vec{\rho}\,'-\vec{\rho}\,''$, $\vec{R}_0=(\vec{\rho}_1+\vec{\rho}_2)/2$, $\rho_0=\vec{\rho}_1-\vec{\rho}_2$, получим

$$\Gamma_\omega(z,\vec{R}_0,\vec{\rho}_0)=-\frac{K_0^2(1-\delta^2)}{4\pi^2 z^2}e^{i\frac{K_0}{z}\left[\vec{R}_0\vec{\rho}_0+\delta\left(R_0^2+\frac{\rho_0^2}{4}\right)\right]}\times$$
$$\times\int\Gamma_{0\omega}e^{i\frac{K_0}{z}\left[\vec{R}\vec{\rho}-\vec{R}_0\vec{\rho}-\vec{R}\vec{\rho}_0+\delta\left(R^2+\frac{\rho^2}{4}-2\vec{R}\vec{R}_0-\frac{\vec{\rho}\vec{\rho}_0}{2}\right)\right]}\times \tag{20}$$
$$\times\exp\left[-\frac{1}{2}D_S^{\omega}(\vec{\rho})\right]d\vec{R}\,d\vec{\rho},$$

$K_0=\frac{\omega_0}{c}$, $\Gamma_{0\omega}=E_{0\omega_1}E^*_{0\omega_2}$ не зависит от координат ($\vec{R}$, $\vec{\rho}$) в рассматриваемом случае распространения плоской волны.

Проинтегрировав (20) при $\delta=0$, можно показать, что функция когерентности $\Gamma_2(z,\vec{\rho}_1,\vec{\rho}_2)=\langle E(z,\vec{\rho}_1)E^*(z,\vec{\rho}_2)\rangle$ и интенсивность волны $I=\langle E(z,\vec{\rho})E^*(z,\vec{\rho})\rangle$ остаются постоянными при распространении за слоем с неоднородной плотностью вещества:

$$\Gamma_2(z,\vec{\rho}_1,\vec{\rho}_2)=I_0\exp\left[-\frac{1}{2}D_S(\vec{\rho}_1-\vec{\rho}_2)\right],\quad I=I_0, \tag{21}$$

где I_0 – интенсивность падающей волны.

Из (21) следует очевидный результат: бесконечно вытянутый слой случайно гравитирующих масс не вызывает фокусировки электромагнитных волн. При интегрировании (20) для значений $\delta\neq 0$ в случае сильных флуктуаций фазы ($S_0^2 >> 1$) в выражении $\exp\left[-\frac{1}{2} D_S^{\omega}(\vec{\rho})\right]$ можно воспользоваться квадратичной аппроксимацией структурной функции, в частности, для степенного спектра неоднородностей (I3) ограничиться первым членом ряда (I4), тогда

$$D_S^{\omega} = 2(1-\delta^2) S_0^2 \rho^2 / l^2 + 4\delta^2 S_0^2 . \tag{22}$$

Здесь $l \sim æ_{min}^{-1}$ - характерный масштаб корреляции неоднородностей, S_0^2 определяется соотношением (I5). Окончательно, из (20) и (22) имеем

$$\Gamma_{\omega}(z,\vec{\rho}) = e^{-2\delta^2 S_0^2} \frac{1+i\delta D S_0^2}{1+\delta^2 D^2 S_0^4} \exp\left[-\frac{\rho^2 S_0^2 (1-\delta^2)}{l^2(1+\delta^2 D^2 S_0^4)}\right] \times$$
$$\times \exp\left[-i \frac{\delta D S_0^2 (1-\delta^2)}{1+\delta^2 D^2 S_0^4} \frac{\rho^2}{l^2}\right], \quad D = \frac{4z}{k_0 l^2} . \tag{23}$$

Выражения для Γ_{ω} и S_0^2 позволяют оценить радиус частотной корреляции Ω , а следовательно, и характерное время расплывания импульса в такой среде $\tau \sim \Omega^{-1}$: $\Omega = c / z\theta_S^2 \sim 10^{-7} c^{-1}$. Здесь $z = 10^{27}$ см, эффективный угол рассеяния $\theta_S \sim S_0 \lambda / 2\pi l \sim 10^{-6}$ при $\lambda \sim 10^2$ см, $l = 10^{19}$ см - характерный радиус корреляции неоднородностей, $S_0 \sim 10^6$ - согласно (I5).

2. Коэффициент усиления и частотная корреляции "шероховатой " гравитационной линзы.

Рассмотрим случай, когда поле тяготения создается сферически-симметричным телом конечного объема V , плотность масс внутри которого имеет случайную компоненту $\tilde{\mu}$.

Корреляционная функция $\tilde{\mu}$ в данном случае зависит как от разностных $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$, так и средних координат $\vec{R} = (\vec{r}_1 + \vec{r}_2)/2$, поэтому её можно задать в виде

$$\Gamma_{\mu}(\vec{R},\vec{r}) = \langle \tilde{\mu}^2 \rangle e^{-R^2/R_0^2} \gamma_{\mu}(\vec{r}) , \tag{24}$$

где $\langle \tilde{\mu}^2 \rangle$ - средний квадрат флуктуаций плотности, R_0 - радиус фокусирующего объема.

По аналогии с гравитационным радиусом линзы $r_g = 2\gamma M/c^2$., M – масса гравитирующего объема, введем "средний" и "случайный" гравитационный радиусы :

$$\langle r_g\rangle = \frac{2\gamma}{c^2}\int\langle\mu\rangle d\vec{r}', \qquad (25)$$

$$\tilde{r}_g = \frac{2\gamma}{c^2}\int\tilde{\mu}(\vec{r}')d\vec{r}',$$

откуда имеем

$$\langle\tilde{r}_g^2\rangle = \frac{4\gamma^2}{c^4}\iint d\vec{R}\, d\vec{r}\, \Gamma_\mu(\vec{R},\vec{r}) - \qquad (26)$$

средний квадрат случайного гравитационного радиуса линзы. Пользуясь соотношениями (3), (8), (9), (26), можно получить выражение для структурной функции фазы $D_S(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$, справедливое на расстояниях $|\vec{r}_1|, |\vec{r}_2| \gg R_0$, $R_0 \gg l$ – характерного масштаба измерения функций $\gamma_\mu(\vec{r})$:

$$D_S(\vec{r}_1,\vec{r}_2) \approx \kappa_0^2\langle\tilde{r}_g^2\rangle\int_0^z d\zeta_1\int_0^z d\zeta_2\Big\{\left[(\zeta_1^2+\rho_{\perp1}^2)(\zeta_2+\rho_{\perp1}^2)\right]^{-1/2} -$$

$$-\left[(\zeta_1^2+\rho_{\perp2}^2)(\zeta_2^2+\rho_{\perp1}^2)\right]^{-1/2} - \left[(\zeta_1^2+\rho_{\perp1}^2)(\zeta_2^2+\rho_{\perp2}^2)\right]^{-1/2} + \qquad (27)$$

$$+\left[(\zeta_1^2+\rho_{\perp2}^2)(\zeta_2^2+\rho_{\perp2}^2)\right]^{-1/2}\Big\}, \qquad \vec{r}_{1,2} = \vec{r}_{1,2}(z, \vec{\rho}_{\perp1,\perp2}).$$

В полученном после интегрирования (27) выражении положим

$\ln\dfrac{z+(z^2+\rho_{\perp1,\perp2}^2)^{1/2}}{\rho_{1\perp,2\perp}} \approx \ln\dfrac{2z}{\rho_{\perp1,\perp2}}$ +) и в результате имеем

$$D_S(\rho_{\perp1},\rho_{\perp2}) = \kappa_0^2\langle\tilde{r}_g^2\rangle\ln^2\frac{|\rho_{\perp1}|}{|\rho_{\perp2}|}. \qquad (28)$$

+) Ошибка такого приближения $\sim l/z$.

Введя координаты $\vec{R}_\perp = \dfrac{\vec{\rho}_{\perp 1}+\vec{\rho}_{\perp 2}}{2}$, $\vec{\rho}_\perp = \vec{\rho}_{\perp 1}-\vec{\rho}_{\perp 2}$, легко показать, что эффективный угол рассеяния "шероховатой" гравитационной линзы $D_s^2 = \dfrac{1}{2K_0^2}\,\Delta_{\perp\vec{\rho}_\perp} D_s(\vec{R}_\perp,\vec{\rho}_\perp)$ зависит от средней координаты $R_\perp$:

$$\theta_s^2 = \langle \tilde{r}_g^2\rangle / R_\perp^2 . \tag{29}$$

Поле волны с частотой ω_1 в точке наблюдения $P(z_p, \rho_p)$ определяется, согласно принципа Гюйгенса, следующим интегральным соотношением [8]:

$$E_{\omega_1}(z_p,\vec{\rho}_p) = \frac{iK_1}{2\pi}\int E_{0\omega_1} e^{i\tilde{S}_{\omega_1}} \frac{e^{i\vec{K}_1\vec{R}}}{R}\, df, \tag{30}$$

где R – расстояние от элемента df волновой поверхности до точки наблюдения, $E_{0\omega_1}$ – поле на волновой поверхности, S_{ω_1} – случайный набег фазы на линзе.

Тогда, считая интенсивность падающей волны I_0 постоянной величиной, можно получить функцию частотной кореляции комплексно-сопряженных полей:

$$\begin{gathered}\Gamma_\omega\left(z_p,\vec{t}_p=\frac{\vec{\rho}_p}{L}\right) \doteq \frac{\chi_0^2(1-\delta^2)}{4\pi^2} I_0 e^{i2K_0\delta z_p} e^{i\chi_0\delta t_p^2} \times \\ \times\int d\vec{t}_1 d\vec{t}_2 \exp\left\{ i\chi_0\left[\frac{t_1^2-t_2^2}{2}+\frac{\delta(t_1^2+t_2^2)}{2}-\ln\frac{|\vec{t}_1|}{|\vec{t}_2|}-\right.\right. \\ \left.\left. -\delta\ln(|\vec{t}_1||\vec{t}_2|)-\vec{t}_p(\vec{t}_1-\vec{t}_2)-\delta\vec{t}_p(\vec{t}_1+\vec{t}_2)\right]\right\}\times \\ \times\exp\left[-\frac{1}{2}D_s^\omega(\vec{t}_1\vec{t}_2)\right],\end{gathered} \tag{31}$$

здесь $\chi_0 = 2K_0\langle r_g\rangle$, $L = \sqrt{2\langle r_g\rangle z_p}$,

$$D_s^\omega = \frac{\chi_s^2}{4}\left[\ln\frac{|\vec{t}_2|}{|\vec{t}_1|}+\delta\ln\frac{4}{|\vec{t}_1||\vec{t}_2|}\right]^2, \qquad \chi_s = 2K_0\sqrt{\langle\tilde{r}_g^2\rangle} .$$

При $\delta = 0$ переход к полярным координатам и интегрирование по угловым переменным даёт следующее выражение для коэффициента усиления "шероховатой" гравитационной линзы:

$$q(z_p,\vec{t}_p) \equiv \frac{\Gamma_2(z_p,\vec{t}_p)}{I_0} = \chi_0^2 \int dt_1\, dt_2\, t_1 t_2 \times$$

$$\times \exp\left\{ i\chi_0 \left[\frac{t_1^2 - t_2^2}{2} + \ln\frac{t_1}{t_2} \right] - \frac{i\chi_s^2}{8} \ln^2\frac{t_1}{t_2} \right\} \times \tag{32}$$

$$\times J_0(\chi_0 t_p t_1) J_0(\chi_0 t_p t_2).$$

В предельном случае достаточно слабого рассеяния $\chi_s^2 \ll \chi_0$ при $\chi_0 \gg 1$ (32) можно проинтегрировать методом стационарной фазы, в частности, получить известное выражение для максимального коэффициента усиления [8, 9]:

$$q(z_p,0) \approx \pi\chi_0. \tag{33}$$

В обратном предельном случае $\chi_s \ll \chi_0 \ll \chi_s^2$ +) интегрирование (32) даёт

$$q(z_p,0) \approx \chi_s^{-1} \chi_0^{3/2} \tag{34}$$

+) Это эквивалентно условию $\theta_s^2/\theta_d^2 \ll \chi_0$, либо $\theta_s^2 \ll \theta_r \theta_d$ ($\theta_d = I/KL$ – угол дифракции на апертуре, $\theta_r = 2\langle r_g \rangle / L$ – угол отклонения луча в невозмущённом гравитационном поле, $\theta_s^2 = \langle \tilde{r}_g^2 \rangle / L^2$).

Литература

1. Зельдович Я.Б. – Астроном. ж., 1964, т. 41, № 1, с. 19.
2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. – М.: Наука, 1967.
3. Фок В.А. Теория пространства, времени и тяготения. – М.: Физматгиз, 1961.
4. Джексон Дж. Классическая электродинамика. – М.: Мир, 1965.
5. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Наука, 1971.
6. Блиох П.В., Минаков А.А. – Изв. вузов – Радиофизика, 1978, т.21, № 6, с. 802.
7. Рытов С.М., Кравцов Ю.А., Татарский В.И. Введение в статистическую радиофизику. Ч.2. – М.: Наука, 1978.
8. Минаков А.А. – Астрон.ж., 1978, т. 55, № 5, с. 966.
9. Bliokh P.V., Minakov A.A. – Astroph. & Space Sci., 1975, 34, p.L7.

Дата поступления статьи
11 июля 1984 г.

Лев Михайлович Ерухимов
Полина Ильинична Шпиро

О РАСПРОСТРАНЕНИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН
В СРЕДЕ С ХАОТИЧЕСКИМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ
ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ

Подписано в печать 24.10.84 г. МЦ21638. Формат 60 x 84 / 16
Бумага множительная. Печать офсетная. Объем 0.87 усл.п.л
Тираж 120. Заказ 4089. Бесплатно.

Отпечатано на ротапринте НИРФИ