

Министерство высшего и среднего специального образования РСФСР

Горьковский ордена Трудового Красного Знамени
научно-исследовательский радиофизический институт (НИРФИ)

Препринт № 187

ДИНАМИКА МАЯТНИКА С КОЛЕБЛОЩЕЙСЯ ВЕРТИКАЛЬНОЙ
ОСЬЮ ВРАЩЕНИЯ

З.С. Баталова

Н.В. Бухалова

Горький 1984

УДК 517.957

С помощью целенаправленных численных экспериментов проводится изучение структуры фазового пространства нелинейного неавтономного дифференциального уравнения второго порядка, описывающего движения маятника, посаженного на гармонически колеблющуюся вертикальную ось. Изучение сведено к исследованию точечного отображения цилиндра в себя, порождаемого траекториями уравнения. Найдены области существования и устойчивости ряда периодических движений вращательного и колебательного типа. Выявлены бифуркации, приводящие к деструкции иерархии вложенных структур под влиянием момента силы линейного вязкого трения. Построена эволюционная картина структуры фазового цилиндра при изменении параметров. В области хаотических движений маятника обнаружены устойчивые элементы.

Введение

Многие задачи из приложений приводят к нелинейному неавтономному дифференциальному уравнению

$$\ddot{x} + h\dot{x} + \mu \sin t \sin x = 0, \quad (I)$$

зависящему от двух параметров μ и h . К ним относятся, например, задача о движении маятника в горизонтальной плоскости, насаженного на гармонически колеблющуюся вертикальную ось, задача о синхронизации неуравновешенного ротора в вибрационных машинах [1], задача о движении солитона в поле стоячей волны и поведении ленгмюровского солитона на фоне "свободной" ионно-звуковой волны [2]. Уравнение (I) отражает также существенные черты движения заряженных частиц в современных ядерных ускорителях [3].

Численное изучение уравнения (I) в 1967 году [4] позволило обнаружить явления параметрической синхронизаций, захватывания, хаотизации движений, привлекая в последние годы внимание многих исследователей. Однако отсутствие алгоритмов и программ построения интегральных многообразий не позволило в то время изучить структуру фазового пространства уравнения (I) и выявить особенности поведения решений при малых $h \geq 0$. В последние годы случай $h = 0$ подвергся детальному рассмотрению в работах [5, 6]. С помощью метода Чезари [7, 8], метода точечных отображений [9] и численных методов исследования динамических систем [10] установлено существование счетного множества периодических движений вращательного и колебательного типа и выяснены бифуркации, приводящие к образованию иерархии вложенных структур в фазовом пространстве уравнения.

В настоящей работе с помощью целенаправленных численных экспериментов проводится изучение структуры фазового пространства уравнения (I) и бифуркаций, приводящих к разрушению иерархических структур под

влиянием момента силы линейного вязкого трения. Аналогично [4-6] исследование структуры фазового пространства сведено к рассмотрению точечного отображения поверхности кругового цилиндра $H\{x \pmod{2\pi}, \dot{x}\}$ в себя, порождаемого траекториями уравнения. На конкретных примерах показывается, что с ростом параметра \hbar сначала исчезают структуры высокого ранга, затем меньшего, последними исчезают "главные" структуры, определяющие тип синхронизмов. При больших значениях \hbar существуют лишь два устойчивых стационарных решения, соответствующие совпадению положения маятника с прямой, вдоль которой колеблется его ось вращения. На поверхности H построены инвариантные кривые, разделяющие области притяжения устойчивых элементов.

Показано, что в случае хаотических движений инвариантные кривые образуют сложную сеть взаимопересечений (гомоклиническую и гетероклиническую структуру) с наличием счетного множества седловых периодических движений. В области хаотических движений обнаружены устойчивые периодические движения колебательного типа, частота которых в два раза меньше частоты колебаний оси вращения маятника.

I. Постановка задачи

Запишем уравнение (I) в виде системы

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -\hbar y - \mu \sin t \sin x. \quad (2)$$

Система (2) инвариантна относительно замен переменных

$$(t, x, y) \longleftrightarrow (t + 2\pi, x, y), \quad (t, x + 2\pi, y); \quad (3)$$

$$(t, x, y) \longleftrightarrow (t, -x, -y); \quad (4)$$

$$(t, x, y) \longleftrightarrow (t, x + \pi, y). \quad (5)$$

В силу (3) исследование структуры фазового пространства t, x, y системы (2) сводится к рассмотрению структуры фазового цилиндра $H\{x \pmod{2\pi}, y\}$ точечного отображения T , порождаемого её фазовыми траекториями. Из любой точки фазового пространства изображающая точка приходит на поверхность $y = -\frac{\mu}{\hbar} \sin t \sin x$, представляющую собой изоклину наклона $\dot{y} = 0$. Поэтому достаточно рассмотреть часть поверхности фазового цилиндра, ограниченную линиями $y = \pm \mu/\hbar$, $x \pmod{2\pi}$. На основании (4) структура поверхности H симмет-

рисунок относительно точек $A_1(0,0)$ и $A_2(\pi,0)$.

Обозначим через $\Gamma_{p,q}$ решение $x = x(t)$, $y = y(t)$ системы (2), удовлетворяющее условию $x(t+2\pi\rho) = x(t) + 2\pi q$, $y(t+2\pi\rho) = y(t)$ ($\rho = 1, 2, \dots$; $q = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). При $q = 0$ решение $\Gamma_{p,q}$ соответствует колебательному периодическому движению маятника периода $\tau = 2\pi\rho$, при $q \neq 0$ — вращательному: за период $\tau = 2\pi\rho$ происходит $|q|$ вращений в положительном (при $q > 0$) или отрицательном ($q < 0$) направлении. На поверхности цилиндра H решению $\Gamma_{p,q}$ отвечает цикл ρ -периодических неподвижных точек отображения T .

В случае $h = 0$ установлено [5, 6], что поверхность H разбивается на счетное число компонент, представляющих собой кольцевые области вида цепочек, охватывающие фазовый цилиндр. Каждая компонента есть "главная" структура 0-го ранга $C(\rho, q, r)$, находящаяся в соответствии с простой дробью q/ρ из интервала $(-\infty, +\infty)$. Она содержит r циклов $A_i[\rho, q]$ эллиптического типа (типа центр) и r циклов $B_i[\rho, q]$ ($i = 1, 2, \dots, r$) гиперболического типа (типа седло). Устойчивые и неустойчивые инвариантные кривые седловых циклов ограничивают pr областей, внутри каждой из которых лежит одна ρ -периодическая точка цикла $A_i[\rho, q]$. С ростом μ седловые циклы не меняют своего типа, а циклы $A_i[\rho, q]$ меняют свой тип с центра на седло один раз при некотором значении параметра μ . В случае, когда взаимнопростые числа ρ и q — нечетные, значение $r = 1$, если одно из них четное, то $r = 2$.

Каждый цикл $A_i[\rho, q]$ типа центр при выполнении резонансных соотношений порождает счетное число аналогичных структур i -го ранга $A_{ii}[\rho, q] C(\rho_1, q_1, r_1)$, находящихся в соответствии с простой дробью q_1/ρ_1 из интервала $(0, 1)$, если взаимнопростые числа ρ и q — нечетные, или из интервала $(0, 1/2)$, если одно из них четное. Структура содержит r_1 циклов $A_{i1}[\rho, q; \rho_1, q_1]$ ($i_1 = 1, 2, \dots, r_1$) типа центр и r_1 циклов $B_{i1}[\rho, q; \rho_1, q_1]$ седлового типа, каждый из которых соответствует периодическому решению $\Gamma_{\rho\rho_1, q\rho_1}$. Она состоит из ρ цепочек, каждая из которых охватывает ρ -периодическую неподвижную точку цикла $A_i[\rho, q]$ и вложена в область, содержащую эту точку. С ростом μ цепочка удаляется от точки и приближается к границе области, в которой она находится.

Цикл $A_{i1}[\rho, q; \rho_1, q_1]$ типа центр порождает аналогичные вложенные структуры 2-го ранга $A_{ii1}[\rho, q; \rho_1, q_1] C(\rho_2, q_2, r_2)$, находящиеся в соответствии с рациональной дробью q_2/ρ_2 из интервала $(0, 1)$

или $(0, 1/2)$. Структура 2-го ранга содержит $\rho\rho_1$ цепочек, каждая из которых охватывает $\rho\rho_1$ -периодическую неподвижную точку цикла $A_{ii}, [p, q; p_1, q_1]$. Цепочки лежат внутри областей, составляющих структуру 1-го ранга. Продолжение этого процесса с ростом μ приводит к образованию иерархии вложенных структур $\Omega_i(p, q)$. Формирование иерархии $\Omega_i(p, q)$ заканчивается, как только все содержащиеся в ней циклы неподвижных точек становятся седловыми.

Наша задача состоит в рассмотрении эволюции этого фазового "портрета" точечного отображения T с ростом параметра h от нуля.

2. Области существования и устойчивости стационарных и периодических решений

В этом параграфе рассмотрим стационарные решения системы $(2) x(t) = y(t) = 0$ и $x(t) = \pi, y(t) = 0$, соответствующие неподвижным точкам $A_1(0, 0)$ и $A_2(\pi, 0)$, и периодические решения $\Gamma_{p,q} \{x = x(t), y = y(t)\}$, соответствующие циклам ρ -периодических неподвижных точек отображения T . Для исследования характера устойчивости решения $\Gamma_{p,q}$ напомним систему уравнений в вариациях:

$$\dot{\xi} = \eta, \quad \dot{\eta} = -h\eta - \mu \sin t \cos [x(t)] \cdot \xi \quad (6)$$

Пусть

$$Z(t) = \begin{pmatrix} \xi_1(t) & \eta_1(t) \\ \xi_2(t) & \eta_2(t) \end{pmatrix}$$

- фундаментальная матрица системы (6), нормированная при $t_0 = 0: Z(0) = E$. С помощью численного метода Рунге-Кутты найдем матрицу $Z(2\pi\rho)$ и построим характеристический полином

$$\rho^2 - [\xi_1(2\pi\rho) + \eta_2(2\pi\rho)]\rho + \det Z(2\pi\rho) = 0. \quad (7)$$

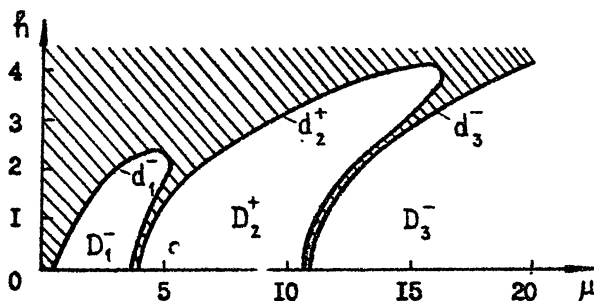
Согласно формуле Остроградского-Лиувилля и теореме Вьета имеем

$$\det Z(2\pi\rho) = e^{-2\pi\rho h} = \rho_1\rho_2 < 1. \quad (8)$$

Отсюда следует, что корни полинома (7) могут быть либо $|\rho_1| < 1, |\rho_2| < 1$,

либо $|p_1| < 1$, $|p_2| > 1$. Значит, неподвижные точки отображения Γ могут быть либо асимптотически устойчивыми в малом, либо седловыми. Случай $|p_1| = e^{-2\pi\rho h}$, $|p_2| = 1$ является бифуркационным.

Рассмотрим сначала неподвижные точки $A_1(0,0)$ и $A_2(\pi,0)$, соответствующие стационарным решениям системы (2). В силу (5) при одинаковых значениях параметров μ и h они имеют одинаковый тип и характер устойчивости. Поэтому достаточно рассмотреть одну из них. Полагая $\rho = I$ и $x(t) = 0$, найдем корни полинома (7) при различных μ и h в области $D\{0 < \mu \leq 20, 0 < h \leq 4\}$.

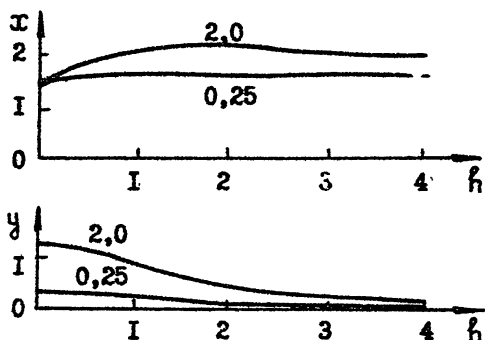


Р и с . I

На рис. I построена бифуркационная диаграмма неподвижной точки $A_1(0,0)$, область устойчивости заштрихована. Области D_1^- , D_2^+ и D_3^- , в которых точка A_1 является седловой, ограничены линией d_1^- и отрезком $(0.454, 3.757)$ прямой $h = 0$, линией d_2^+ и отрезком $(3.790, 10.649)$, линией d_3^- и отрезком $(10.652, 20)$. Внутри областей D_1^- и D_3^- корни p_1 и p_2 отрицательны, внутри D_2^+ — положительны. На кривых d_1^- и d_3^- значение $p_2 = -1$, на кривой d_2^+ — $p_2 = +1$.

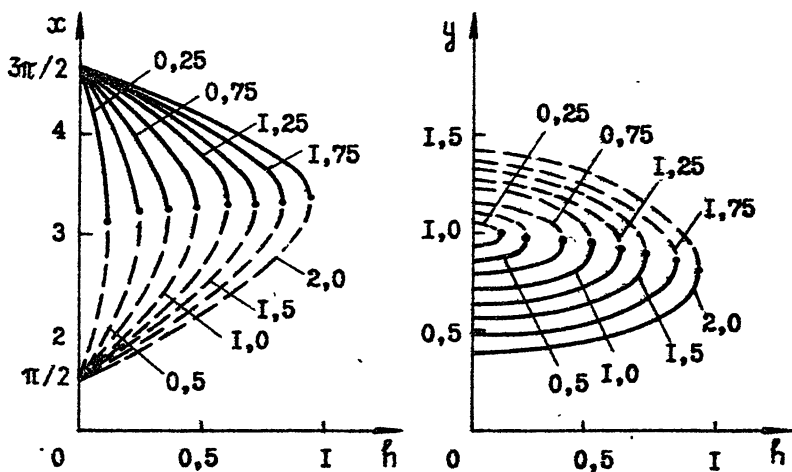
Установлено [6], что при $h = 0$ существуют две неподвижные точки: $B_1[1,0]$ и $B_2[1,0]$ седлового типа, соответствующие колебательным периодическим решениям $\Gamma_{1,0}$ периода $\tau = 2\pi$. Точка $B_1[1,0]$ с ростом μ движется вверх по прямой $x = \pi/2$, точка $B_2[1,0]$ — вниз по прямой $x = 3\pi/2$. При вычислении координат этих точек в случае $h > 0$ оказалось, что с увеличением параметров μ и h точка $B_1[1,0]$ смещается вправо и вверх от прямой $x = \pi/2$ (см. рис. 2, $\mu = 0.25$; 2.0), точка $B_2[1,0]$ расположена симметрично точке $B_1[1,0]$ относительно точки $A_2(\pi,0)$. Тип этих точек не меняется и остается сед-

новым при любых μ и h



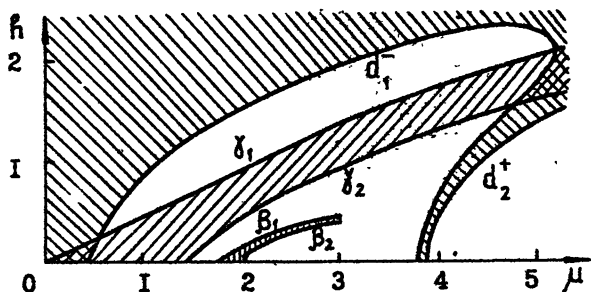
Р и с. 2

Далее рассмотрим неподвижные точки $A[I, I]$ и $B[I, I]$ ($A[\pi, -I]$ и $B[\pi, -I]$), соответствующие периодическим вращениям маятника (за период $\tau = 2\pi$ одно вращение). На рис. 3 показано изменение координат



Р и с. 3

x, y точки $A[I, I]$ (сплошная линия) и точки $B[I, I]$ (пунктирная линия) в зависимости от параметров μ и h . Около каждой кривой указано значение параметра μ . Из этих данных следует, что на плоскости μ, h существует кривая, соответствующая слиянию точек $A[I, I]$ и $B[I, I]$ ($A[I, -I]$ и $B[I, -I]$). Эта кривая γ_1 , приведена на рис. 4. Приблизительно она описывается уравнением $h = \mu/2$ (приближение тем точнее, чем меньше μ).



Р и с. 4

Вычисление корней характеристического уравнения точки $B[I, I]$ показало, что на кривой γ_1 значение $\rho_2 = I$. В точках (μ, h) , лежащих ниже γ_1 , корни ρ_1 и ρ_2 действительны, положительны, причем, $\rho_1 < I, \rho_2 > I$, значит, здесь точка $B[I, I]$ седлового типа.

Корни характеристического уравнения точки $A[I, I]$ в заштрихованной области, ограниченной линиями γ_1, γ_2 и отрезком прямой $0 < \mu < I.424, h = 0$, по модулю меньше единицы, на кривых γ_1 и γ_2 $\rho_2 = I$. Вблизи линий γ_1 и γ_2 корни ρ_1 и ρ_2 действительны, положительны, в середине этой области они комплексно сопряжены $\rho_{1,2} = |\rho_1| e^{\pm i\varphi}$, причём, угловая функция $\varphi(\mu, h)$ при движении точки (μ, h) от γ_1 к γ_2 меняется от нуля до 2π . С ростом h область, в которой корни комплексные, сужается. При $h = 0$ граница этой области совпадает с отрезком $0 < \mu < I.424$, при $h = I$ ширина области порядка $0.0I$. В области, ограниченной кривой γ_2 и полупрямой $\mu > I.424, h = 0$, корни ρ_1 и ρ_2 действительны, положительны, $\rho_1 < I, \rho_2 > I$.

Таким образом, получаем, что область существования двух решений $\Gamma_{1,1}$ и двух решений $\Gamma_{1,-1}$ ограничена полупрямой $\mu > 0, h = 0$ и линией γ_1 . На кривой γ_1 устойчивая угловая неподвижная точка $A[I, I]$ и седловая точка $B[I, I]$ ($A[I, -I]$ и $B[I, -I]$) сливаются и затем

исчезают. Область устойчивости решений, соответствующих точкам $A[I, I]$ и $A[I, -I]$, ограничена линиями γ_1, γ_2 и отрезком $0 < \mu < 1.424$ прямой $h = 0$.

Численное исследование ряда других периодических решений $\Gamma_{p,q}$ показало, что области их существования и устойчивости на плоскости параметров μ и h имеют аналогичный вид, а бифуркации, связанные с исчезновением этих решений, также состоят в слиянии устойчивых узловых и седловых циклов неподвижных точек. Все рассмотренные бифуркационные кривые, соответствующие исчезновению решений $\Gamma_{p,q}$, выходят из точки $(0, 0)$.

Величина области устойчивости решения $\Gamma_{p,q}$ по параметру μ при $h = 0$ для фиксированного p тем больше, чем больше (меньше) дробь $|q|/p \geq 1$ ($|q|/p < 1$). Так, для $p = 1$ и $q = 1, 2, \dots, 5$ она соответственно равна 1.424, 3.017, 8.076, 14.078, 23.515, для $p = 5$ и $q = 1, \dots, 4$ - 0.289, 0.234, 0.229, 0.125 [6]. С ростом h область устойчивости решения $\Gamma_{p,q}$ сужается и при больших h практически не отличается от "жирной" линии.

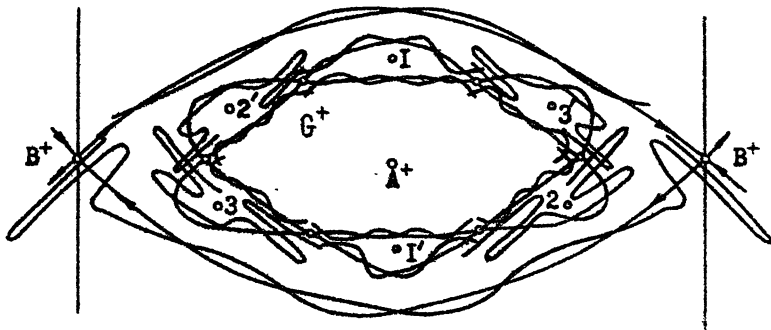
3. Деструкция иерархий вложенных структур

При $h = 0$ на поверхности N фазового цилиндра имеется счетное множество структур $C(p, q, r)$ 0-го ранга. С ростом параметра μ внутри областей, составляющих структуру 0-го ранга, возникает r иерархий вложенных структур $Q_i(p, q)$ ($i = 1, 2, \dots, r$) [5]. Выясним эволюцию структур $C(p, q, r)$ с ростом параметра h .

В качестве примера возьмем структуру $C(1, 1, 1)$ вращательного типа, содержащую одну область G^+ , ограниченную инвариантными кривыми седловой неподвижной точки $B[I, -I]$ (обозначим её B^+). Внутри области G^+ лежит неподвижная точка $A[I, I]$ (A^+), которая имеет тип центра при изменении μ на интервале $(0, 1.424)$. Здесь корни характеристического уравнения точки A^+ комплексно сопряженные $\rho_{1,2} = \exp(\pm i\varphi)$, угловая функция $\varphi(\mu)$ с ростом μ строго монотонно увеличивается от нуля до 2π . При выполнении резонансного соотношения $\rho_1 \varphi(\mu) = 2\pi q_1$ неподвижная точка A^+ порождает структуру 1-го ранга $A^+C(\rho_1, q_1, r_1)$ вида цепочки, охватывающей эту точку. Простая дробь $q_1/\rho_1 \in (0, 1)$, значение $r_1 = 1$, если q_1 - четное число, и $r_1 = 2$, если q_1 - нечетное [5].

Рассмотрим, например, структуру $A^+C(3, 1, 2)$, возникающую из точки A^+ при $\mu = 0.222$, когда $\varphi = 2\pi/3$. Она содержит два цик-

ла $B_{i_1}^+ [1, 1; 3, 1]$ ($i_1 = 1, 2$) седлового типа и два цикла $A_{i_1}^+ [1, 1; 3, 1]$, которые имеют тип центра на интервале $\mu \in (0.222, 0.400)$. На рис. 5 для значений $\mu = 0.35$, $\hbar = 0$ показана картина взаимораспо-



Р и с. 5

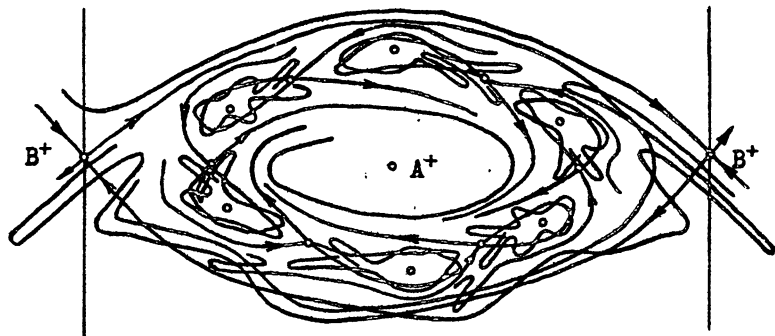
ложения инвариантных кривых двух седловых трехчленных циклов и седловой точки B^+ на развёртке поверхности H фазового цилиндра на плоскость x, y . Поверхность разрезана по образующей, проходящей через точку B^+ . Цифры внутри областей, составляющих структуру $A^+ C(3, 1, 2)$, показывают порядок их перехода при последовательном применении отображения T . При отображении T^3 каждая область преобразуется в себя. В табл. I приведены координаты x, y всех циклов неподвижных точек периода 3 и значения корней ρ_1 и ρ_2 соответствующих им характеристических уравнений (7).

При изменении параметра μ в интервале $(0.222, 0.400)$ корни уравнения (7) циклов $A_{i_1}^+ [1, 1; 3, 1]$ имеют комплексно сопряженные значения $\rho_{1,2} = e^{\pm i\varphi_1}$, причем, угловая функция $\varphi_1(\mu)$ с ростом μ строго монотонно меняется от нуля до 2π . При выполнении резонансного соотношения $\rho_2 \varphi_1(\mu) = 2\pi q_2$, где q_2/ρ_2 — простая дробь из интервала $(0, 1)$, каждый цикл порождает структуру 2-го ранга $A_{i_1}^+ [1, 1; 3, 1] C(\rho_2, q_2, r_2)$, представляющую собой три цепочки, охватывающие 3-периодические точки этого цикла. Структура содержит $r_2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot \rho_2$ - членных циклов $A_{i_2}^+ [1, 1; 3, 1; \rho_2, q_2]$ ($i_2 = 1, 2, \dots, r_2$) типа центр и r_2 циклов $B_{i_1, i_2}^+ [1, 1; 3, 1; \rho_2, q_2]$ седлового типа. Например, при $\mu = 0.347$ возникают структуры $A_{i_1}^+ [1, 1; 3, 1] C(5, 1, 1)$ ($i_1 = 1, 2$) [5].

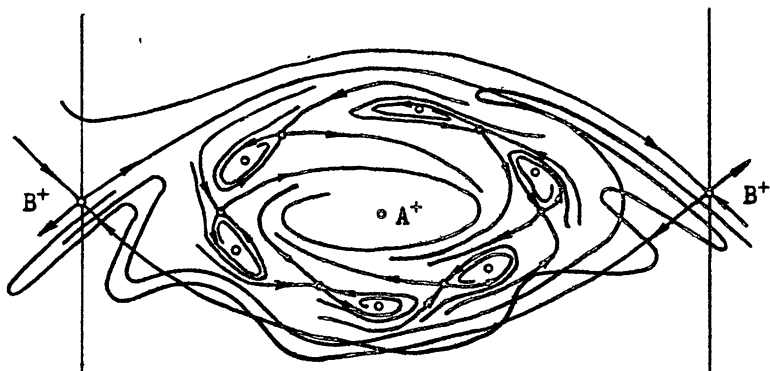
Таблица I

h	x	y	$\rho_{1,2}$	x	y	ρ_1	ρ_2	
0	$3\pi/2$	1.599	0.261 ± 0.965	5.673	1.488	3.029	0.330	
	0.012	0.747		5.572	0.395			
	3.129	0.747		2.952	1.020			
	$3\pi/2$	0.186	0.261 ± 0.965	7.852	0.395	3.029	0.330	
		3.126		1.280	3.752			1.488
		0.016		1.280	0.186			1.020
0.002	4.727	1.598	0.297 ± 0.935	5.485	1.519	2.889	0.333	
	6.226	0.718		5.657	0.440			
	3.068	0.774		2.926	0.984			
	4.612	0.189	0.297 ± 0.935	3.926	0.364	2.889	0.333	
		3.118		1.293	3.619			1.460
		0.004		1.267	0.155			1.055
0.004	4.755	1.596	0.427 ± 0.863	5.296	1.545	2.568	0.361	
	6.141	0.683		5.744	0.486			
	3.009	0.804		2.909	0.947			
	4.499	0.200	0.427 ± 0.863	4.021	0.325	2.568	0.361	
		3.123		1.307	3.463			1.424
		6.277		1.248	0.110			1.096
0.006	4.879	1.586	0.809 ± 0.488	5.004	1.576	1.605	0.556	
	5.988	0.613		5.899	0.568			
	2.938	0.856		2.914	0.889			
	4.308	0.236	0.810 ± 0.487	4.195	0.266	1.605	0.556	
		3.184		1.340	3.262			1.368
		0.006		1.201	0.004			1.165

Проследим эволюцию структуры $A^+C(3, 1, 2)$ с ростом параметра h . На рис. 6а показано поведение инвариантных кривых седловых циклов при $\mu = 0.35$, $h = 0.002$ (см. также табл. I). Устойчивая и неустойчивая инвариантные кривые каждой седловой точки периода 3 пересекаются, образуя гомоклиническую структуру. Внутри каждой такой области находится устойчивая неподвижная точка периода 3. Здесь могут быть также структуры 2-го и следующих рангов. Другая устойчивая инвариантная кривая пересекается с двумя неустойчивыми инвариантными кривыми седловой точки B^+ , а неустойчивая кривая идет внутрь области G^+ и оборачивается вокруг точки A^+ .



а)

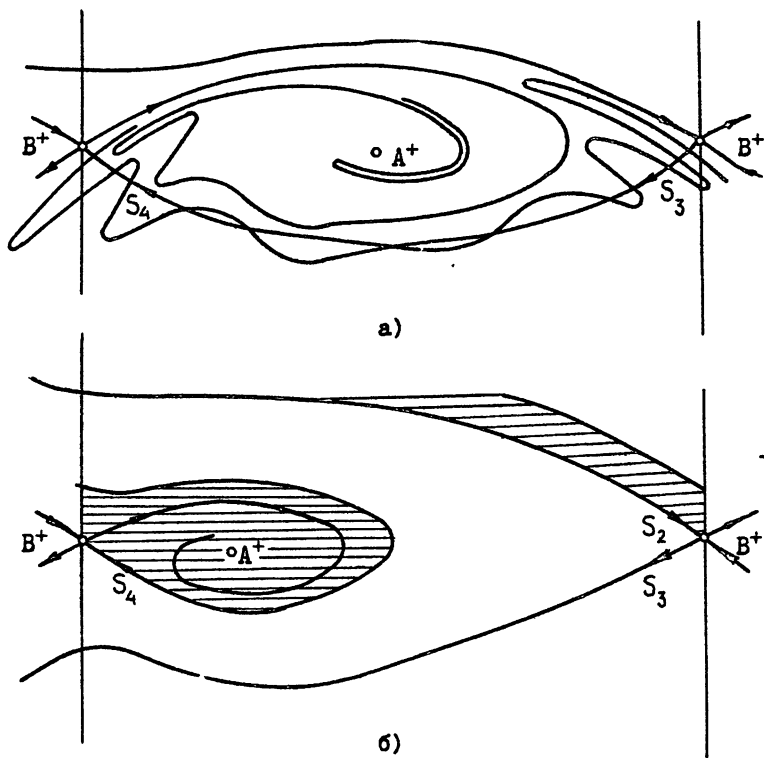


б)

Р и с. 6

С дальнейшим ростом параметра \hat{h} гомоклинические точки пересечения устойчивых и неустойчивых трехкратных инвариантных кривых исчезают. При $\hat{h} = 0.004$ каждая неустойчивая инвариантная кривая стремится к устойчивой неподвижной точке периода 3 (рис. 6б). Это говорит о том, что внутри области уже нет других устойчивых и седловых циклов 2-го и следующих рангов. Устойчивые инвариантные кривые ограничивают области притяжения двух устойчивых циклов $A_1^+[1,1; 3,1]$ и $A_2^+[1,1; 3,1]$. С ростом \hat{h} происходит сближение устойчивых и седловых точек циклов $A_{L_1}^+[1,1; 3,1]$ и $B_{L_1}^+[1,1; 3,1]$, при этом наблюдается стремление

модуля корня ρ_2 их характеристических уравнений к единице (см. табл. I). При $h = 0.006I$ происходит попарное слияние устойчивых и седловых циклов $A_{i_1}^+[I, I; 3, I]$ и $B_{i_1}^+[I, I; 3, I]$ ($i_1 = 1, 2$), приводящее к последующему исчезновению структуры $A^+C(3, I, 2)$.



Р и с. 7

Поведение инвариантных кривых точки B^+ при $h = 0.0I$ (рис. 7а) показывает, что в области G^+ уже нет устойчивых и седловых неподвижных точек, которые были порождены точкой A^+ при $h = 0$. Здесь существуют лишь неподвижные точки в окрестности гомоклинических точек пересечения инвариантных кривых S_3 и S_4 [9]. Гомоклиническая структура уже

не существует при $\hat{h} = 0.1$ (рис. 76). Видно, что область притяжения точки A^+ (заштрихована) представляет собой бесконечную (в одну сторону) полосу, оборачивающуюся по поверхности фазового цилиндра. Из графиков на рис. 3 следует, что неподвижные точки A^+ и B^+ сближаются и при $\hat{h} = 0.175$ ($\mu = 0.35$) сливаются. При $\hat{h} > 0.175$ структура 0-го ранга $C(I, I, I)$ не существует.

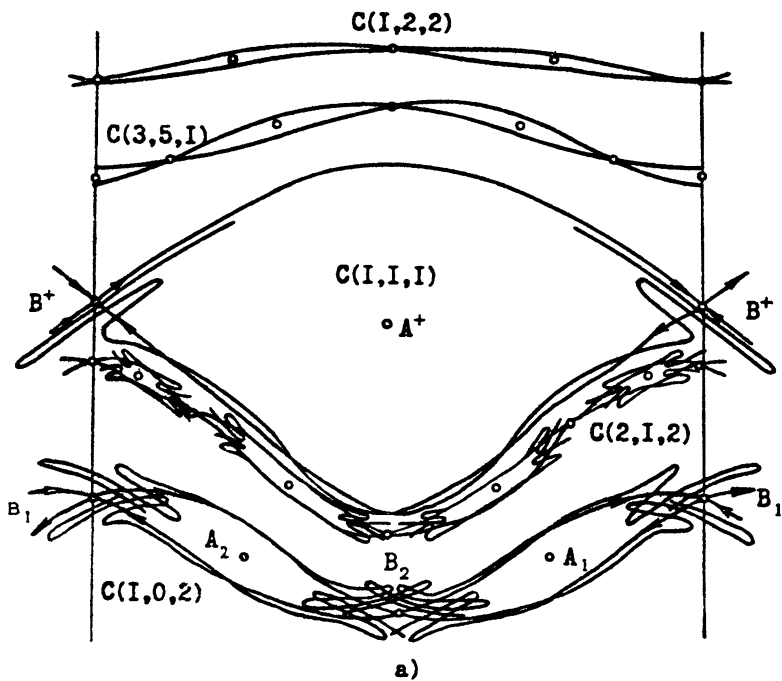
Рассмотрение ряда других структур 0-го ранга $C(p, q, r)$ с $q \neq 0$ при $\mu = 0.35$ показало, что с ростом \hat{h} от нуля с ними происходят аналогичные изменения, однако во всех случаях значение параметра \hat{h} , при котором происходит исчезновение структуры $C(p, q, r)$, оказалось меньше 0.1. Об этом также свидетельствует поведение инвариантных кривых точки B^+ при $\hat{h} = 0.1$.

Представленные данные показывают, что деструкция иерархии $\Omega_i(p, q)$, порождаемой циклом $A_i[p, q]$, происходит постепенно с ростом параметра \hat{h} от нуля в результате бесчисленного множества бифуркаций, состоящих в слиянии устойчивых узловых и седловых циклов $A_{i_1, i_2, \dots, i_s}[p, q; p_1, q_1; \dots; p_s, q_s]$ и $B_{i_1, i_2, \dots, i_s}[p, q; p_1, q_1; \dots; p_s, q_s]$ неподвижных точек, соответствующих решениям $\Gamma_{PP_1, \dots, P_s, QP_1, \dots, P_s}$. При этом сначала исчезают структуры S-го ранга, затем S-1-го, ..., I-го ранга. Последними исчезают структуры 0-го ранга $C(p, q, r)$ с $q \neq 0$. Структура $C(I, 0, 2)$ колебательного типа существует при любом значении параметра \hat{h} .

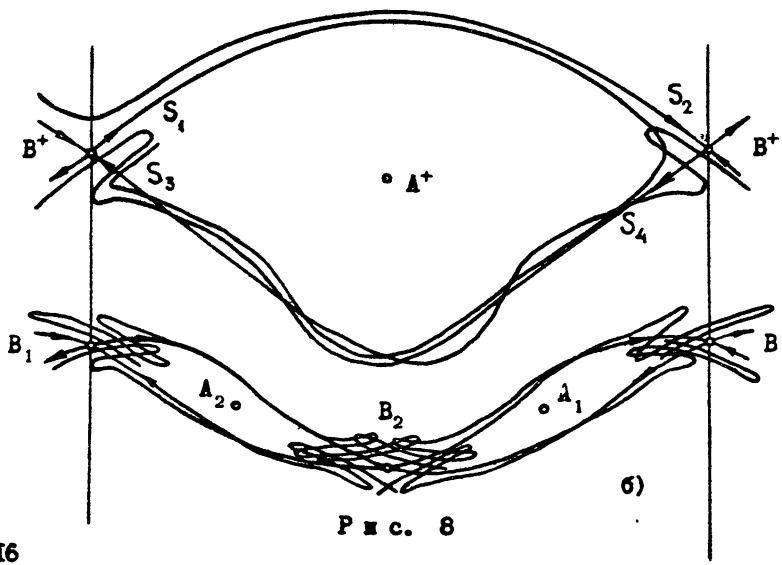
4. Сосуществование структур колебательного и вращательного типа

Выясним взаиморасположение на поверхности фазового цилиндра отображения T структуры 0-го ранга $C(I, 0, 2)$ колебательного типа и некоторых структур вращательного типа. В основном будем рассматривать структуру $C(I, I, I)$, поскольку она содержит синхронизмы вращательного типа, частота и период которых совпадают с частотой и периодом колебаний оси вращения маятника. Кроме того, эта структура сохраняется при больших значениях \hat{h} , в то время как другие структуры, как видно из предыдущего, исчезают при малых \hat{h} .

Возьмём сначала такие значения параметров μ и \hat{h} , которые принадлежат области устойчивости неподвижных точек $A_1(0, 0)$, $A_2(\pi, 0)$, A^+ . При $\mu = 0.25$, $\hat{h} = 0$ на рис. 8а приведены некоторые структуры на развертке поверхности цилиндра на плоскость x, y (разрез по пря-



a)



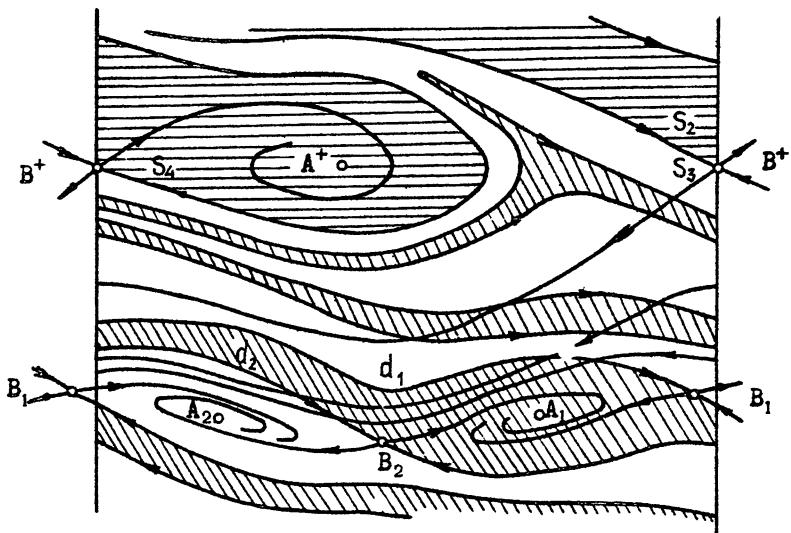
б)

Р и с. 8

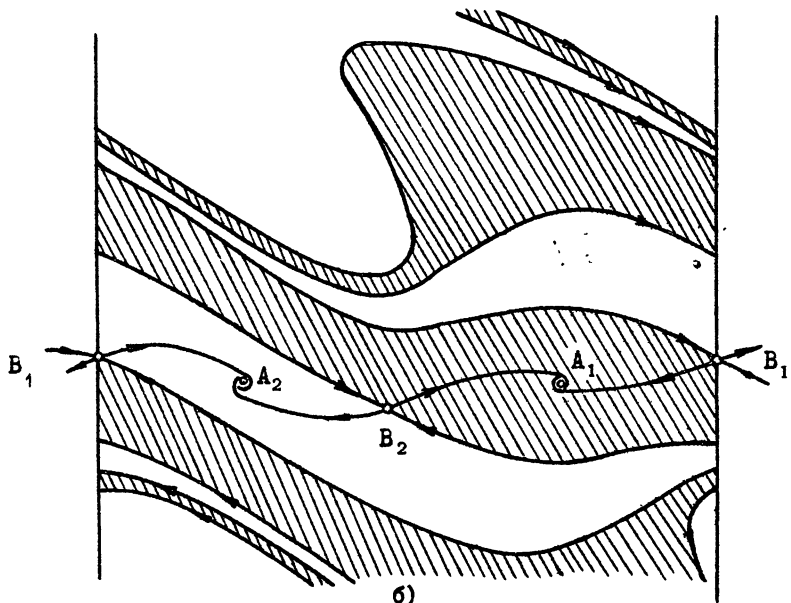
мой $x = \pi/2$). Гомоклинические точки пересечения ряда устойчивых и неустойчивых инвариантных кривых седловых циклов численно не обнаруживаются, их образы попадают в малую (порядка 10^{-3}) окрестность седловых точек.

При $\mu = 0.25$, $\hbar = 0.001$ (рис. 86) кривая S_1 седловой точки B^+ проходит ниже S_2 и аналогично кривой S_4 пересекается с S_3 . Наличие гомоклинических структур, образованных инвариантными кривыми S_3 и S_4 точки B^+ и инвариантными кривыми точек B_1 и B_2 , обуславливает существование структур 0-го ранга $C(p, q, r)$ с $q/\rho \in (0, D)$, расположенных между структурами $C(I, 0, 2)$ и $C(I, I, I)$. Дальнейшее увеличение параметра \hbar приводит к исчезновению гомоклинических структур, образованных инвариантными кривыми седловых циклов B_i $[p, q]$ ($i = 1, 2, \dots, r$), принадлежащих одной структуре $C(p, q, r)$, и возникновению гетероклинических траекторий, стремящихся к седловым циклам, принадлежащим различным структурам 0-го ранга. При $\mu = 0.25$, $\hbar = 0.05$ картина взаиморасположения инвариантных кривых седловых точек показана на рис. 9а. Здесь область притяжения устойчивой неподвижной точки A^+ (горизонтальная штриховка) ограничена устойчивыми инвариантными кривыми S_2 и S_4 точки B^+ . Для кривой S_3 появилась возможность прохода к структуре 0-го ранга $C(I, 0, 2)$, что говорит об отсутствии других структур $C(p, q, r)$ с $q/\rho \in (0, I)$. Устойчивые инвариантные кривые d_1 и d_2 седловых точек B_1 и B_2 пересекаются с кривой S_3 бесконечное число раз. С каждым оборотом вокруг цилиндра они все ближе ложатся к области притяжения устойчивой точки A^+ , "вырисовывая" её с обеих сторон. Наличие этой гетероклинической структуры обуславливает сложный характер областей притяжения устойчивых точек $A_1(0, 0)$ и $A_2(\pi, 0)$. Сложности становятся очень тонкими в окрестности седловой точки B^+ и её инвариантных кривых S_2 и S_4 . В силу симметрии структуры поверхности N относительно точек A_1 и A_2 аналогичная картина имеет место в области $y < 0$. (Для структуры $C(I, -I, I)$ знак "+" в обозначениях заменяется на "-").

С ростом \hbar происходит сближение неподвижных точек $A^+(A^-)$ и $B^+(B^-)$, приводящее к их слиянию при $\hbar = 0.125$ и последующему исчезновению. При $\hbar > 0.125$ сохраняется сложный характер областей притяжения устойчивых точек A_1 и A_2 . Таким образом, при малых μ увеличение параметра \hbar сопровождается постепенным упрощением структуры фазового "портрета" точечного отображения T . При больших \hbar существуют лишь две устойчивые неподвижные точки A_1 и A_2 , соответствующ-



a)



b)

Рис. 9

щие стационарным решениям $x(t) = 0$ и $x(t) = \pi$ уравнения (I). Области притяжения этих точек разграничиваются устойчивыми инвариантными кривыми седловых неподвижных точек B_1 и B_2 , соответствующих периодическим решениям $\Gamma_{2,0}$ колебательного типа (рис. 9б, $\mu = 0.25$, $h = 0.2$).

Далее возьмем значения $\mu = 2$, $h = 0.7$, при которых точки A^+ и A^- являются устойчивыми, а точки $A_1(0,0)$, $A_2(\pi, 0)$ и все циклы неподвижных точек, порожденные точками A_1 и A_2 , имеют седловой тип. Качественное поведение инвариантных кривых S_i и S'_i ($i = \overline{1,4}$) седловых неподвижных точек B^+ и B^- показано на рис. 10. Здесь неустойчивая инвариантная кривая S_1 стремится к устойчивой неподвижной точке A^+ . Устойчивая кривая S_2 обматывает поверхность H , она не пересекается с другими инвариантными кривыми. Неустойчивая кривая S_3 пересекается с устойчивыми кривыми S_4 и S'_4 . Кривая S_4 пересекается также с S'_3 . Инвариантные кривые S'_i точки B^- расположены симметрично кривым S_i относительно точек A_1 и A_2 . Область R_0 , ограниченная дугами P_0Q_0 неустойчивой инвариантной кривой S_3 точки B^+ и устойчивой инвариантной кривой S'_4 точки B^- (заштрихована), при отображении T и T^2 переходит в области R_1 и R_2 , а при отображении T^{-1} и T^{-2} - в R_{-1} и R_{-2} . Эти области и их последовательные преобразования с помощью отображений T и T^{-1} относятся к области притяжения устойчивой точки A^- . Рассмотрение различных областей, ограниченных дугами инвариантных кривых, позволило выделить основные части областей притяжения устойчивых точек A^+ и A^- , показанные на рис. 11. Область притяжения точки A^+ (A^-) имеет горизонтальную (вертикальную) штриховку. Как и на рис. 7 и 9а область притяжения точки A^+ (A^-) ограничивают устойчивые инвариантные кривые точки B^+ (B^-). Незаштрихованные полосы имеют очень сложную структуру. Они разделяются инвариантными кривыми на бесчисленное множество очень тонких полос, принадлежащих то области притяжения точки A^+ , то точки A^- . Неподвижные точки A_1 , A_2 , B_1 и B_2 лежат в этих полосах.

В заключение рассмотрим случай больших значений параметра μ и малых h , при которых неподвижные точки A_1 и A_2 , а также точки A^+ и A^- имеют седловой тип. Вычисление координат неподвижных точек и построение их инвариантных кривых показало, что с ростом μ при малых h точки B^+ и B_1 (B^- и B_2) сближаются, а гомоклиническая структура, образованная пересечением устойчивых и неустойчивых инвариантных кривых седловых точек, становится более выраженной. С рос-

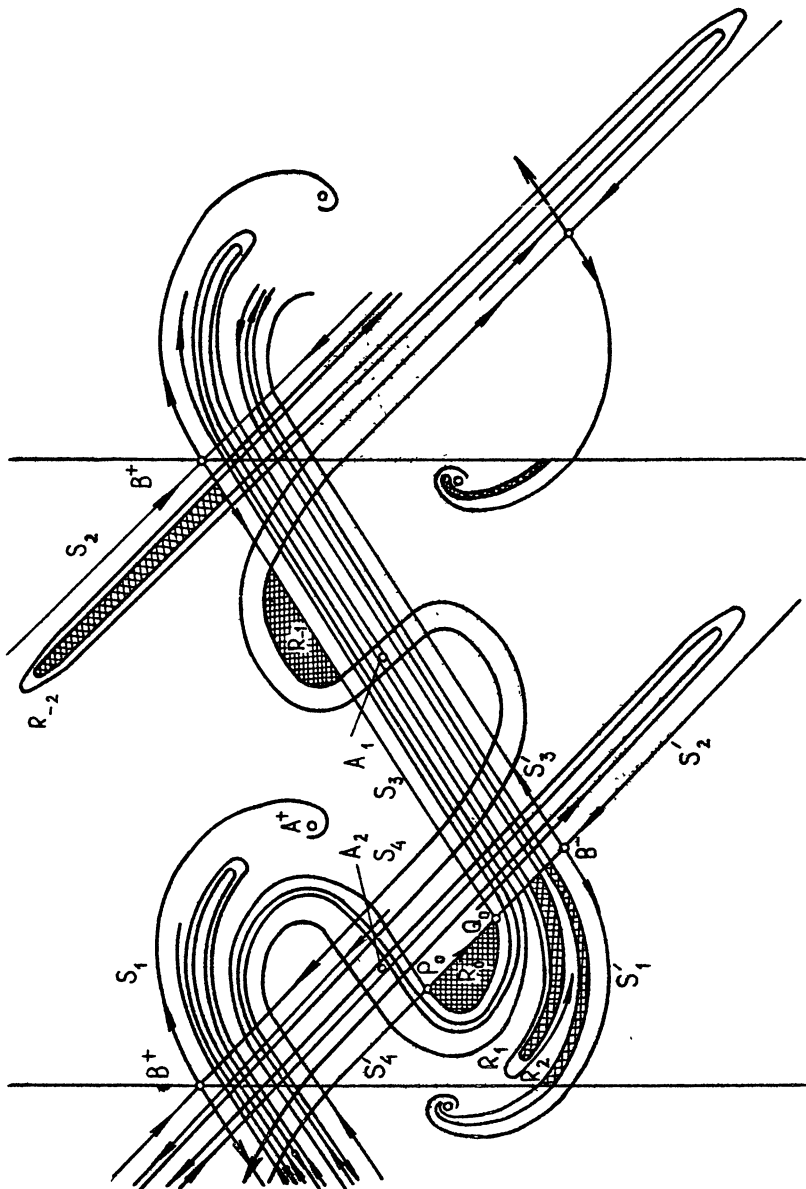
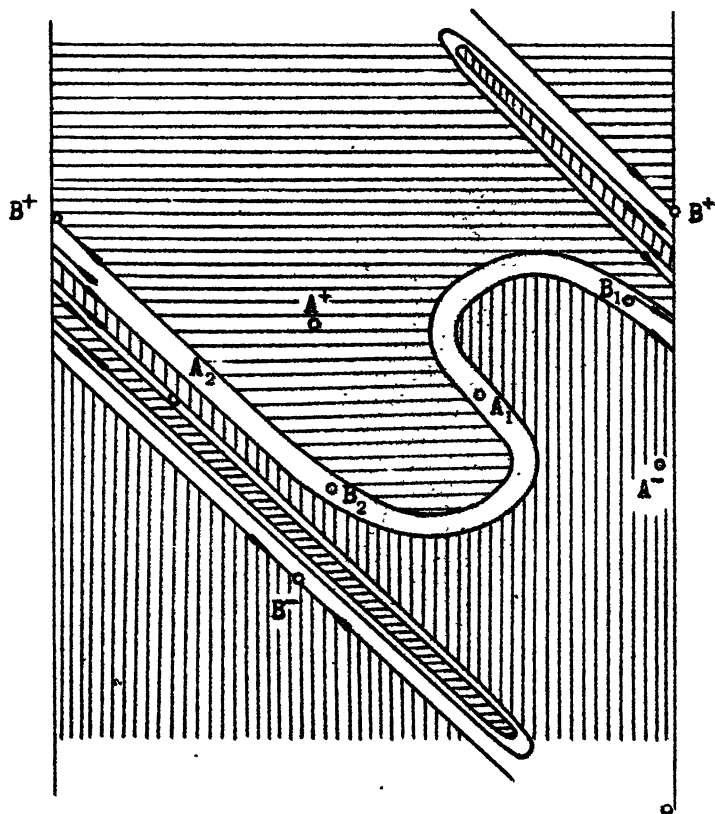


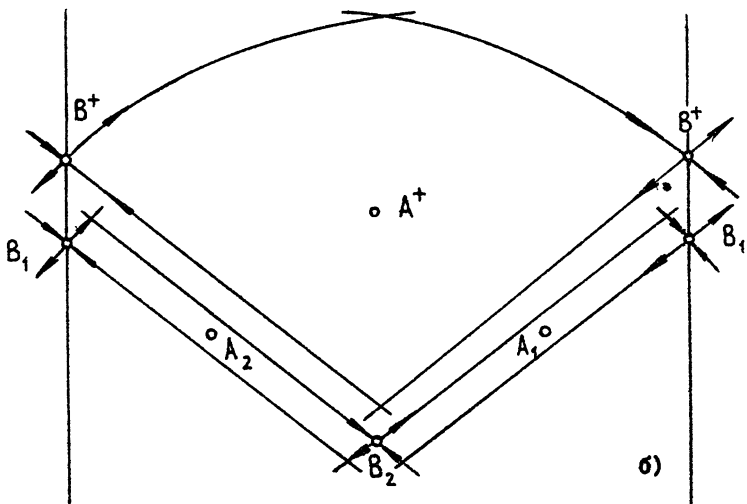
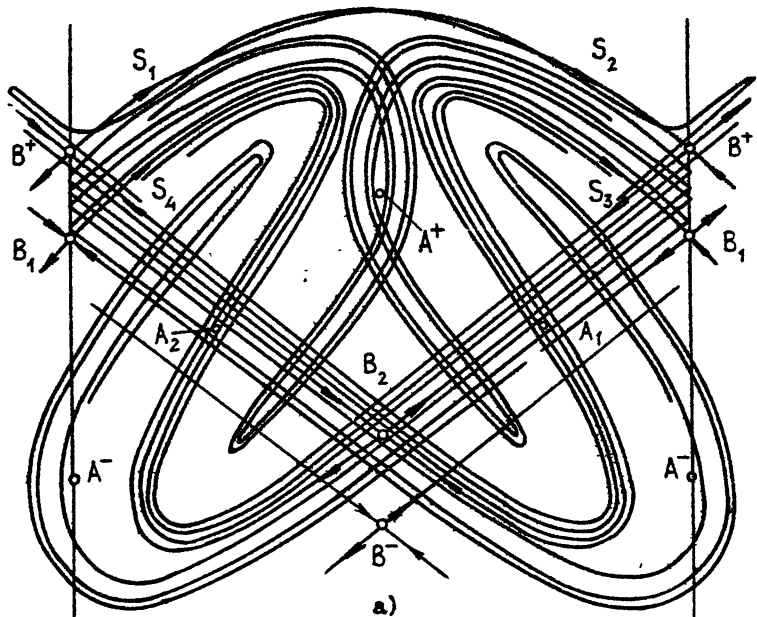
Рис. 10

том μ происходит также расширение областей G^+ и G^- . Это приводит к сближению структур $C(I, I, I)$ и $C(I, -I, I)$ вращательного типа со структурой $C(I, 0, 2)$ колебательного типа и усложнению фазового портрета отображения T .



Р и с. II

На рис. 12а построены инвариантные кривые седловых неподвижных точек B^+ , B_1 и B_2 при $\mu = 2$, $\eta = 0$. Здесь, как и при $\mu = 0.25$, гомотетическая структура, образованная инвариантными кривыми S_1 и S_2 , менее развита, чем структура, образованная кривыми S_3 и S_4 . Гомо-



Р и с. 12

клинные петли кривых S_3 и S_4 пересекают не только области G_1 и G_2 колебательного типа, но и область G^- вращений в отрицательном направлении. Видно, что все гомоклинные петли кривых вращательного и колебательного типа вкладываются одна в другую в строго определенном порядке.

Отметим, что области колебательного и вращательного типа, ограниченные дугами инвариантных кривых от седловой точки до первой гомоклинической точки их пересечения, не пересекаются. Эти области приведены на рис. 126. Между ними имеются "щели", в которых расположены другие структуры 0-го ранга с $q/\rho \in (0, 1)$.

Построение инвариантных кривых при малых $h > 0$ показало, что этот портрет точечного отображения T не претерпевает существенных изменений, нарушается лишь симметрия относительно прямых $x = \pi/2$ и $x = 3\pi/2$.

5. Хаотические движения маятника

В этом разделе описываются результаты численных экспериментов по изучению хаотических движений маятника. В случае больших значений h ($h > 0.1$) области на плоскости параметров μ и h , соответствующие движениям колебательного и вращательного типа, "устойчивым по Пуассону", были обнаружены в [4]. В [4] также показано, что возникновение таких движений связано с серией бифуркаций удвоения стационарных и периодических решений $\Gamma_{1,1}$. Для значений параметров, соответствующих областям движений, "устойчивых по Пуассону", наблюдалось хаотическое поведение точек итерационной последовательности

$$M_n = TM_{n-1} \quad (n = 1, 2, \dots, N). \quad (9)$$

В [1] построены итерационные последовательности при $\mu = 1/(1.5)^{2n} \approx 0.444$, $h = 0$ и $h = 10^{-4}/1.5 \approx 0.667 \cdot 10^{-4}$. Эти значения параметров соответствуют области устойчивости неподвижных точек A_1 , A_2 , A^+ и A^- . Однако представляет интерес поведение итерационных последовательностей в случае, когда все неподвижные точки, принадлежащие иерархии вложенных структур, имеют седловой тип, т.е. когда она является гиперболической. В случае $h = 0$ в [5] найдено значение $\mu^* = 1.78$, начиная с которого структуры $\Omega(1, 1)$ и $\Omega(1, -1)$, порождаемые точками A^+ и A^- , гиперболического типа. В [6, II] найден интервал

$0.54 < \mu < 3.757$, в котором структуры $\Omega_1(I, 0)$ и $\Omega_2(I, 0)$, порождаемые точками $A_1(0, 0)$ и $A_2(\pi, 0)$, являются гиперболическими. Структура поверхности фазового цилиндра в этом случае необычайно усложняется, поскольку существует бесчисленное множество неподвижных точек седлового типа. Это видно из рис. 12а, на котором приведены инвариантные кривые лишь трех неподвижных точек B^+ , B_1 и B_2 для значений $\mu = 2$, $h = 0$.

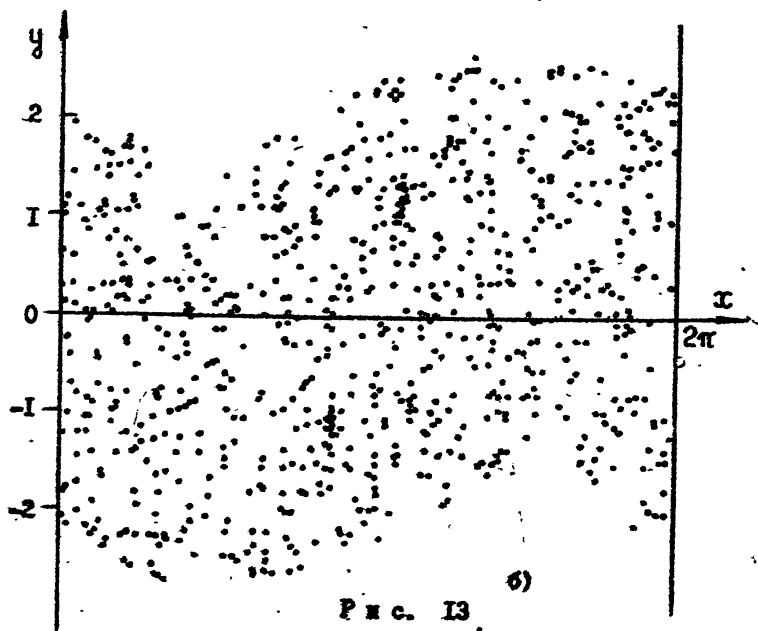
При построении итерационных последовательностей (9) оказалось, что они имеют хаотический характер поведения. На рис. 13а нанесены 2000 точек последовательности (9), начинающейся в точке $M_0(\pi, 1.4)$ ($\mu = 2$, $h = 0$). Сравнивая рис. 12а и рис. 13а, видим, что точки "блуждают" по области, содержащей структуры $C(I, I, I)$, $C(I, 0, 2)$ и $C(I, -I, I)$.

При малых $h > 0$ точки по-прежнему заполняют аналогичную область (рис. 13б, $\mu = 2$, $h = 0.01$, $M_0(\pi, 1.4)$, $N = 820$), однако через большое число итераций притягиваются к устойчивым элементам. Значит, несмотря на хаотический характер поведения итерационных последовательностей, в областях хаотизации существуют устойчивые точки с областью притяжения, имеющей очень тонкую структуру. Это показывает следующий численный эксперимент, проведенный на машине БЭСМ-6. Для значений $\mu = 2$, $h = 0.01$ были построены две итерационные последовательности (9), начинающиеся в точках $M_0^1(\pi, 1.4)$ и $M_0^2(\pi, 1.40001)$. При сравнении точек этих последовательностей оказалось, что первые итерации совпадают с точностью 10^{-5} , третьи - с точностью 10^{-3} , пятые - с точностью 10^{-2} , а, начиная с 8-ой итерации, точки значительно расходятся. При этом точки первой последовательности попадают через 800 итераций в область притяжения одного устойчивого двучленного цикла (см. рис. 13б), а точки второй последовательности через 360 итераций - в область притяжения другого устойчивого двучленного цикла. Оба эти цикла соответствуют решениям $\Gamma_{2,0}$. С ростом h области притяжения найденных устойчивых циклов становятся значительными и точки попадают в них через 10-30 итераций.

При численном исследовании условий возникновения этих циклов оказалось, что в области, ограниченной кривой β_1 (см. рис. 4) и отрезком $1.709 < \mu < 3$, $h = 0$ (значения $\mu > 3$ не рассматривались), существуют два двучленных цикла $F_i[2, 0]$ ($i = 1, 2$), соответствующие решениям $\Gamma_{2,0}$. В части этой области, ограниченной линиями β_1 , β_2 и отрезком $1.709 < \mu < 1.985$, $h = 0$ (вертикальная штриховка), циклы



a)



б)

Р и с. 13

$F_i[2, 0]$ являются устойчивыми. На кривых β_1 и β_2 корень ρ_2 характеристического уравнения для этих циклов равен $+1$. Ниже линии β_2 циклы являются седловыми. При смене типа цикла $F_i[2, 0]$ на линии β_2 из него возникают два устойчивых цикла $F_{ii_1}[2, 0; 1, 1]$ ($i_1 = 1, 2$), соответствующие решениям $\Gamma_{2,0}$. Область устойчивости этих циклов представляет собой узкую полосу, расположенную вдоль линии β_2 . При $h = 0$ границей области устойчивости является отрезок $\mu \in (1.985, 2.061)$. При смене устойчивости циклов $F_{ii_1}[2, 0; 1, 1]$ корень ρ_2 их характеристических уравнений равен -1 . В описанном выше численном эксперименте, проведенном для значений $\mu = 2$, $h = 0.01$, были обнаружены два из этих четырех устойчивых циклов. В табл. 2 для $\mu = 2$ и некоторых h приведены координаты x, y и корни $\rho_{1,2}$ характеристического уравнения для циклов $F_i[2, 0]$, а также возникающих из них при $h = 0.036$ циклов $F_{ii_1}[2, 0; 1, 1]$. (Значения $\rho_{1,2}$ циклов $F_i(i=1,2)$, аналогично циклов $F_{ii_1}(i, i_1 = 1, 2)$, совпадают).

Т а б л и ц а 2

h	цикл	x	y	цикл	x	y	$\rho_{1,2}$
0	F_1	5.902 0.381	1.155 -1.155	F_2	3.522 2.761	1.155 -1.155	1.748; 0.572
	F_{11}	5.924 0.391	1.025 -1.305	F_{21}	3.532 2.782	1.305 -1.025	$0.681 \pm i0.732$
	F_{12}	5.892 0.359	1.305 -1.025	F_{22}	3.501 2.751	1.025 -1.305	$0.681 \pm i0.732$
0.01	F_1	5.871 0.412	1.171 -1.171	F_2	3.492 2.792	1.139 -1.139	1.614; 0.546
	F_{11}	5.892 0.424	1.045 -1.318	F_{21}	3.499 2.812	1.281 -1.016	$0.664 \pm i0.664$
	F_{12}	5.859 0.391	1.318 -1.045	F_{22}	3.471 2.784	1.016 -1.281	$0.664 \pm i0.664$
0.05	F_1	5.740 0.543	1.248 -1.248	F_2	3.370 2.913	1.085 -1.085	$0.660 \pm i0.313$
0.10	F_1	5.548 0.735	1.379 -1.379	F_2	3.209 3.074	1.034 -1.034	$0.021 \pm i0.533$
0.15	F_1	5.251 1.032	1.624 -1.624	F_2	2.969 3.314	1.015 -1.015	$-0.331 \pm i0.242$

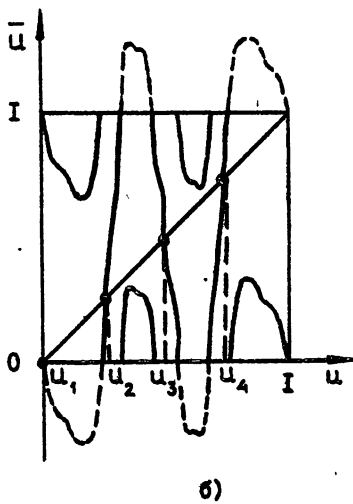
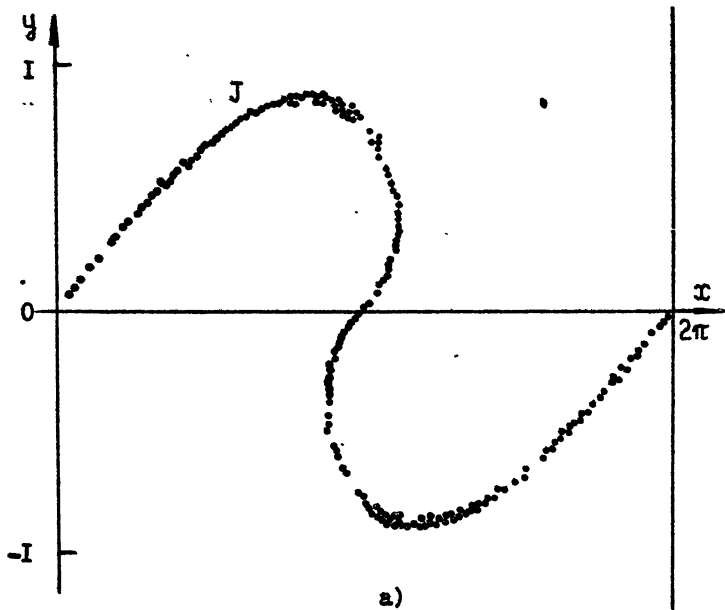


Рис. 14.

Далее был проведен численный эксперимент для больших значений параметра μ . Значения $\mu = 2$, $h = 1$ были взяты из области хаотических движений маятника [4], где отсутствуют движения вращательного типа (см. рис. 4). На рис. 14а построены 500 точек итерационной последовательности (9), начинающейся в начальной точке $M_0(\pi, 1.4)$. Видно, что точки попадают на некоторую "жирную" линию J , охватывающую фазовый цилиндр. Отметим, что возможность сжатия поверхности фазового цилиндра к линии J вытекает из соотношения (8), характеризующего коэффициент сжатия фазового объема системы (2) (для рис. 14а он равен $e^{-2\pi}$).

Аналогично [12] сведем рассмотрение структуры поверхности H , в данном случае, к изучению точечного отображения T_0 окружности в себя. Нормируя длину кривой J на 2π и принимая её за новую переменную u , построим функцию последования $\bar{u} = f(u)$ точечного отображения T_0 окружности J в себя (рис. 14б). Из графика следует, что отображение T_0 имеет две неустойчивые неподвижные точки $u_1 = 0$ и $u_3 = 0.5$ с отрицательной производной в них, соответствующие точкам $A_1(0, 0)$ и $A_2(\pi, 0)$, и две неустойчивые неподвижные точки u_2 и u_4 с положительной производной, соответствующие точкам B_1 и B_2 . Точки итерационных последовательностей "блуждают" по отрезку $(0, 1)$.

С ростом μ максимальное (минимальное) значение функции $f(u)$ увеличивается (уменьшается). Для значений μ , h , соответствующих кривой γ_1 , происходит касание графика функции $\bar{u} = f(u)$ с прямыми $\bar{u} = u \pm 1$. Это приводит к возникновению неподвижных точек A^+ и B^+ . Хаотические движения постепенно исчезают, устанавливается периодический режим вращений маятника в положительном или отрицательном направлении.

Л и т е р а т у р а

1. Блехман И.И. Синхронизация динамических систем. - М.: Наука, 1971. - 896 с.
2. Арансон И.С., Горшков К.А., Рабинович М.И. Стохастическое движение солитона в периодическом поле: Препринт № 51. - Горький: ИПФ АН СССР, 1982. - 23 с.
3. Заславский Г.М., Чириков Б.В. Стохастическая неустойчивость нелинейных колебаний. - УФН, 1971, т. 105, в. 1, с. 3 - 40.
4. Баталова З.С. О движениях ротора под влиянием внешней гармонической силы. - МТТ, 1967, № 2, с. 66 - 73.
5. Баталова З.С., Бухалова Н.В. Иерархия структуры фазового пространства уравнения движений маятника с колеблющейся осью вращения. - Динамика систем: Устойчивость, синхронизация и хаотичность. Межвуз. сб. / Горьк. гос. ун-т. Горький: ГТУ, 1983, с. 85 - 112.
6. Баталова З.С., Бухалова Н.В. Периодические движения маятника с колеблющейся вертикальной осью вращения. - Горьк. гос. ун-т. Горький, 1983, 21 с. (Деп. в ВИНТИ 01.02.84, № 618-84 Деп.) .
7. Hilder E. Mathematische Untersuchungen zur Himmelmechanik. - Mathematische Zeitschrift, 1929, Bd.31, S.197 - 257.
8. Сарычев В.А., Сазонов В.В. Об одном методе исследования периодических решений обыкновенных дифференциальных уравнений: Препринт № 105. - М.: ИПМ АН СССР, 1976. - 62 с.
9. Неймарк Ю.И. Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний. - М.: Наука, 1972. - 472 с.
10. Неймарк Ю.И., Баталова З.С., Белякова Г.В. и др. Алгоритмы и программы численного исследования динамических систем: Учебное пособие / Горьк. гос. ун-т. - Горький: ГТУ, 1983. - 80с.
11. Баталова З.С., Белякова Г.В. О структуре фазового опространства уравнения движений маятника с колеблющейся точкой подвеса. - Горьк. гос. ун-т, 1984. 37 с. (Деп. в ВИНТИ 31.05.84 № 3539-84 Деп.).
12. Баталова З.С., Безденежных А.Н., Неймарк Ю.И., Ромашова И.Б. О бифуркациях, приводящих к хаотизации движений ротора. - Динамика систем: Межвуз. сб. / Горьк. гос. ун-т. Горький: ГТУ, 1980, с. 110 - 125.

Дата поступления статьи
16 октября 1984 г.

Зинаида Семеновна Беталова
Наталья Владимировна Бухалова

ДИНАМИКА МАЯТНИКА
С КОЛЕБЛЮЩЕЙСЯ ВЕРТИКАЛЬНОЙ ОСЬЮ ВРАЩЕНИЯ

Подписано в печать 22.11.84 г. МШ 21798. Формат 60x84/16.

Бумага множительная. Печать офсетная. Объем 1,78 усл. печ.л.

Тираж 120. Заказ 4125. Бесплатно.

Отпечатано на ротационте НИРФИ