

Министерство высшего и среднего специального образования РСФСР

Горьковский ордена Трудового Красного Знамени  
научно-исследовательский радиофизический институт (НИРФИ)

Препринт № 190

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ СИСТЕМЫ ПЛАЗМА -- ДВИЖУЩИЙСЯ ПРОВОДНИК

Б.С.Абрамович

Б.Е.Немцов

В.Я.Эйдман

Горький 1984

Излагаются результаты исследования линейной стадии неустойчивости в системе плазма – движущийся проводник (ПДП–неустойчивость). При этом развитие ПДП–неустойчивости приводит к возбуждению собственных колебаний плазмы вблизи источника, а также тока и потенциала на проводнике. Пороги возбуждения и инкременты неустойчивости тока на проводнике найдены с учетом излучения электромагнитных волн, столкновений частиц, гиротропии и ограниченности плазмы. Инкременты ПДП–неустойчивости могут значительно превышать обратное время пролёта частицами плазмы проводника, что существенно отличает рассматриваемую неустойчивость от пирсовской.

В настоящей работе на основе полученного интегрального уравнения для тока на проводнике, обтекаемого плазмой, исследовано развитие неустойчивости колебаний тока в системе плазма - движущийся проводник (ПДП-система). Эта неустойчивость связана с возбуждением проводником быстрых (положительной энергии) и медленных (отрицательной энергии) плазменных волн. В разд. 2 исследуется неустойчивость системы ПДП при учете столкновения частиц и излучения электромагнитных волн. Запаздывание электромагнитных сигналов, существенное для длинных антенн, приводит к снижению порогов неустойчивости по сравнению с их значением в квазистатическом приближении. Исследовано влияние конечной толщины проводника на развитие неустойчивости. Показано, что в квазистатическом приближении спектры собственных колебаний, при учете конечной толщины, меняются мало. Для длинных антенн пренебречь конечностью толщины проводника можно лишь при больших скоростях плазмы. В разд. 3 рассмотрена ПДП-неустойчивость магнитоактивной плазмы. Исследованы инкременты неустойчивости для случаев движения проводника вдоль и поперек магнитного поля. Здесь же исследовано возбуждение нижнегибридных волн антеннами, движущимися в космической плазме. Поскольку скорость, с которой движутся антенны в космической плазме, мала по сравнению с тепловой скоростью электронов, но велика по сравнению со скоростью ионов, основную роль в развитии неустойчивости тока играют электронно-ионные колебания. Оценки возможности реализации НГР (нижнегибридный резонанс) неустойчивости в верхней ионосфере, приведенные в разд. 3, позволяют надеяться на её экспериментальное обнаружение. В разд. 4 рассмотрена генерация поверхностных волн в плазме (изотропной и магнитоактивной) при движении проводника вдоль её границы. Важно отметить, что инкременты неустойчивости тока на проводнике, движущемся в плазме, могут превышать обратное время пролёта частиц вдоль его поверхности. Это обстоятельство существенно отличает рассматриваемую неустойчивость от пирсовской [1].

# I. Вывод дисперсионного уравнения ПДП-неустойчивости

Рассмотрим простейшую ПДП-систему, состоящую из движущейся вдоль оси  $z$  со скоростью  $c \gg v \gg v_{Te}$  изотропной плазмы и тонкого идеального проводника радиуса  $a$  и длины  $2L$ , ориентированного вдоль оси  $z$ . Тензор диэлектрической проницаемости движущейся плазмы в нерелятивистском приближении, в пренебрежении движением ионов, имеет следующий вид [2]:

$$\epsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \epsilon & 0 & \epsilon_{xz} \\ 0 & \epsilon & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{pmatrix}. \quad (I)$$

Здесь  $\epsilon = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}$ ,  $\epsilon_{xz} = \epsilon_{zx} = -\frac{\omega_0^2 \kappa_x v}{\omega^2 (\omega - \kappa_z v)}$ ,

$$\epsilon_{yz} = \epsilon_{zy} = -\frac{\omega_0^2 \kappa_y v}{\omega^2 (\omega - \kappa_z v)}, \quad \epsilon_{zz} = 1 - \frac{\omega_0^2}{(\omega - \kappa_z v)^2} - \frac{\omega_0^2 (\kappa_x^2 + \kappa_y^2) v^2}{\omega^2 (\omega - \kappa_z v)^2}.$$

Электрическое поле определяется из уравнения Максвелла:

$$\text{rot rot } \vec{E} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{D}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \vec{j}_{ex}, \quad (2)$$

где  $\vec{j}_{ex} = (0, 0, j_z)$ ,  $j_z = \frac{\delta(\rho - a)}{4\pi\rho} j(z, t) [\text{sign}(z) - \text{sign}(z - 2L)]$

- плотность стороннего тока. Наша задача состоит в том, чтобы найти собственные частоты рассматриваемой системы, поэтому будем искать решение уравнений (2) в виде  $e^{-i\omega t}$ .

Совершая преобразование Фурье по координатам, из (2) получаем следующее уравнение для фурье-компонент поля  $\vec{E}(\vec{k})$ :

$$-k_i (\vec{k} \vec{E}) + k^2 E_i - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{ij} E_j = \frac{4\pi\omega}{c^2} j_{ex} i. \quad (3)$$

В правую часть (3) входит Фурье-образ  $z$ -компоненты стороннего тока  $j_z(k) = J_0(k_1 a) \int_0^{2L} j_z(z') e^{-i k_z z'} dz'$ , где  $\vec{k}_1 = (k_x, k_y)$  - поперечное волновое число,  $J_0$  - функция Бесселя.

Разрешая систему алгебраических уравнений (3) относительно  $E_z$  и выполняя обратное преобразование Фурье, приходим к соотношению

$$E_z = -\frac{i}{\pi \omega} \left( \frac{d^2}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega) \right) \int_0^{2L} dz' j_z(z') \int_0^\infty dk_{\perp} k_{\perp} \int_{-\infty}^{\infty} dk_z J_0(k_{\perp} \rho) \times e^{i k_z (z - z')} \times J_0(k_1 a) \frac{1}{\varepsilon(\omega - k\nu) \left( k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega) \right)}. \quad (4)$$

При помощи формулы ( $\rho > a$ )

$$\int_0^\infty dk_{\perp} k_{\perp} \frac{J_0(k_{\perp} a) J_0(k_{\perp} \rho)}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega)} = \frac{\pi \nu}{2} H_0^{(1)} \left( \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega) - k_z^2} \rho \right) \times J_0 \left( \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega) - k_z^2} a \right) \left( \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega) - k_z^2} = i |k_z| \text{ при } k_z \rightarrow \infty \right)$$

(4) может быть записано следующим образом:

$$E_z = \frac{1}{2\omega} \left( \frac{d^2}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega) \right) \int_0^{2L} dz' j_z(z') \int_{-\infty}^{\infty} dk_z \frac{H_0^{(1)} \left( \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega) - k_z^2} \rho \right) J_0 \left( \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega) - k_z^2} a \right)}{\varepsilon(\omega - k\nu)} e^{i k_z (z - z')}. \quad (5)$$

В дальнейшем будем рассматривать колебания тока на тонком проводнике ( $a \ll \lambda$ ,  $\lambda$  - характеристическая длина волны). В этом приближении

$$J_0 \left( \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega) - k_z^2} a \right) \approx 1 \quad (\text{см. [3]}) \text{ и из условия } E_z(\rho=a; 0 < a < 2L) = 0$$

следует уравнение для тока

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega)\right) \int_0^{2L} dz' j(z') \int_{-\infty}^{\infty} dk H_0^{(1)}\left(\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega) - k^2} z\right) \left[1 + \frac{\omega_0^2}{(\omega - k\nu)^2 - \omega_0^2}\right] e^{ik(z-z')} \Big|_{z=0} \quad (6)$$

Уравнение (6) при  $\omega_0 = 0$  (антенна в вакууме) неоднократно исследовалось [3, 4]. При этом аналитические результаты удается получить лишь в случае  $\alpha \rightarrow 0$  [4]. Мы также будем считать толщину проводника малой, что позволяет при вычислениях интегралов в (6) в первом приближении ограничиться логарифмически расходящимися слагаемыми. Процедура выделения логарифмически расходящихся членов в первом интеграле (6) изложена в работе Леонтовича и Левина [4]. Во втором интеграле логарифмически расходящиеся слагаемые связаны с полюсами подынтегрального выражения. (Учет нерасходящихся при  $\alpha \rightarrow 0$  слагаемых будет произведен далее.) При сделанных предположениях уравнение для тока на поверхности проводника принимает вид

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega)\right) \left[ j(z) - \frac{\omega_0}{\nu} \int_0^z j(z') e^{i\frac{\omega}{\nu}(z-z')} \sin \frac{\omega_0}{\nu}(z-z') dz' \right] = 0. \quad (7)$$

Уравнение (7) следует дополнить граничными условиями, соответствующими обращению в нуль тока на концах проводника

$$j(0) = j(2L) = 0. \quad (8)$$

Уравнение (7) при выполнении первого из граничных условий (8) можно записать в виде

$$j(z) - \frac{\omega_0}{\nu} \int_0^z j(z') e^{i\frac{\omega}{\nu}(z-z')} \sin \frac{\omega_0}{\nu}(z-z') dz' = \frac{A \sin \kappa_0 z}{\kappa_0}. \quad (9)$$

Здесь  $\kappa_0 = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon(\omega)}$  - волновое число электромагнитных волн в плазме,  $A = j'(0)$  - произвольная константа.

В вакууме ( $\omega_0 = 0$ ) (9) описывает распределение тока на проводнике без учета излучения ( $|\ln \kappa_* \alpha| \rightarrow \infty$ ,  $\kappa_*^{-1}$  - характерный пространственный масштаб тока) [4]. В квазистатическом приближении

(  $c = \infty$  ) уравнение (9) переходит в уравнение для тока на проводнике в движущейся плазме [5]. Для исследования общего случая  $c \neq \infty$ ,  $\omega_0 \neq 0$  воспользуемся преобразованием Лапласа по  $z$ . Опуская промежуточные вычисления, приходим к следующему выражению для тока:

$$j(z) = -\frac{A}{2\pi} \int_{-i0-\infty}^{-i0+\infty} dk \frac{\varepsilon(\omega - kv)}{k^2 - k_0^2} e^{ikz} \quad (10)$$

Дисперсионное уравнение, следующее из граничного условия (8), имеет вид

$$\int_{-i0-\infty}^{-i0+\infty} dr \frac{\varepsilon(\omega - kv)}{k^2 - k_0^2} e^{2ikL} = 0. \quad (11)$$

Появление неустойчивости ленгмювских колебаний плазмы и распределения тока на проводнике соответствуют решения уравнения (11) с  $\text{Im } \omega > 0$ .

## 2. Пороги возбуждения и инкременты неустойчивости системы изотропная плазма - движущийся проводник

В данном разделе мы проанализируем дисперсионное уравнение системы движущаяся изотропная плазма - проводник и выясним пределы применимости логарифмического приближения.

Рассмотрим конкретные случаи.

1. Пусть столкновения частиц в плазме отсутствуют. Дисперсионное уравнение, следующее из (11), имеет вид

$$\left(1 + \frac{i}{p}\right) e^{2ip} + \left(1 - \frac{p^2}{q^2}\right) \frac{\sin \beta \sqrt{p^2 - q^2}}{\beta \sqrt{p^2 - q^2}} - \frac{i}{p} \cos \beta \sqrt{p^2 - q^2} = 0. \quad (12)$$

Здесь введены обозначения:  $p = \frac{\omega L}{v}$ ,  $q = \frac{\omega_0 L}{v}$ ,  $\beta = \frac{2v}{c}$ . Исследование уравнения (12) начнем в квазистатическом приближении ( $\frac{\omega L}{c} \ll 1$ ,  $\frac{\omega_0 L}{c} \ll 1$ ) [5]. Тогда при  $q \leq \pi/\sqrt{2}$  система устойчива, при  $q > \pi/\sqrt{2}$  появляются корни уравнения (12) с положитель-

ной мнимой частью, причём, если  $\pi k/\sqrt{2} < q < \pi(k+1)/\sqrt{2}$ , то возбуждается  $k$  мод колебаний тока на проводнике. Частоты этих мод на пороге возбуждения ( $q_k = \pi k/\sqrt{2}$ )  $p_k = \pi k$ . Таким образом, частоты колебаний тока на проводнике на пороге возбуждения связаны с плазменной частотой соотношением  $\omega = \sqrt{2} \omega_0$ . Более детальное исследование инкрементов проведем, считая  $|p| \gg 1$ . Дисперсионное уравнение в этом случае заметно упрощается:

$$e^{2i p} = \frac{p^2}{q^2} - 1. \quad (I3)$$

Огибающая максимумов инкрементов мод определяется из уравнения

$$2s e^{2s} = q, \quad s = \text{Im } p, \quad (I4)$$

откуда следует, что  $\text{Im } \omega \sim \frac{v}{2L} \ln q$  и при  $q \gg 1$  инкременты неустойчивости могут значительно превышать обратное время пролёта частиц плазмы вдоль проводника. Это обстоятельство существенно отличает рассматриваемую систему от исследованной Пирсом, где инкременты неустойчивости порядка обратного времени пролёта  $v/2L$  [I]. На рис. I изображены зависимости инкрементов  $s$  от параметра  $q$  для нескольких мод колебаний тока.

2. Рассмотрим случай длинной антенны, когда нельзя пренебрегать запаздыванием электромагнитных волн ( $\omega_0 L/c \geq 1$ ). Дисперсионное уравнение будем исследовать при  $|p| \gg 1$ . Порог неустойчивости  $k$ -й моды имеет вид

$$q_k = \pi k \left[ 1 + \left( \frac{\sin \beta \sqrt{p_k^2 - q_k^2}}{\beta \sqrt{p_k^2 - q_k^2}} \right)^{-1} \right]^{-1/2} \quad (I5)$$

Из соотношения (I5) следует, что пороги неустойчивости при учете запаздывания снижаются по сравнению с квазистатическим случаем. Максимальный инкремент имеют моды с  $\text{Re } p \sim q$ . Огибающая максимумов инкрементов определяется соотношением

$$2s e^{2s} = \frac{q}{\gamma}. \quad (I6)$$



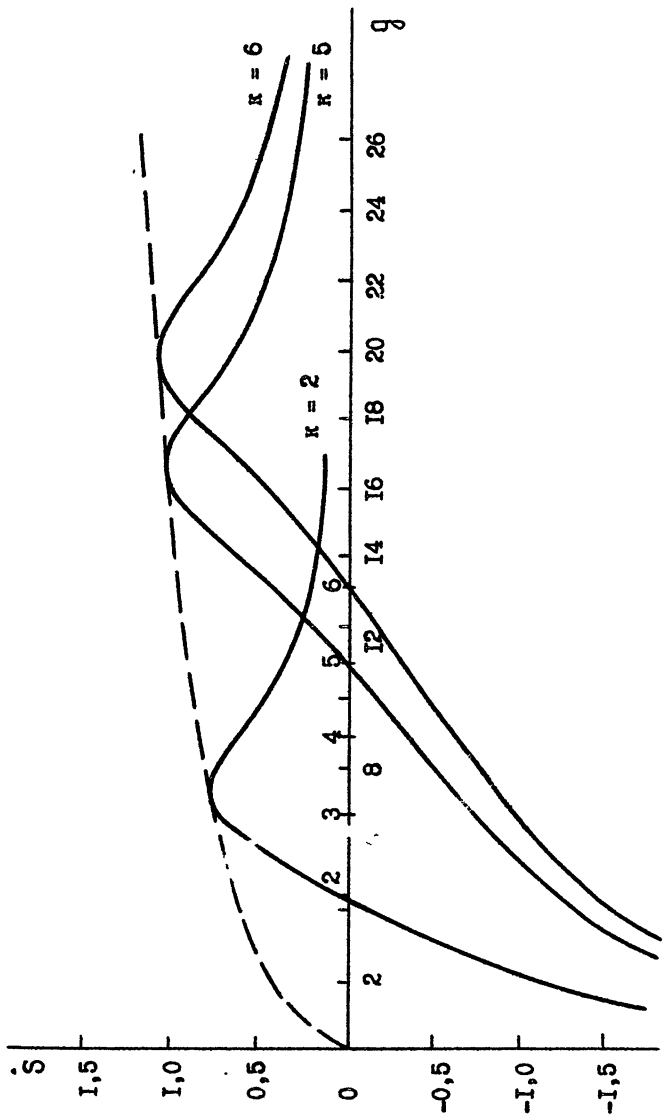


Рис. 1

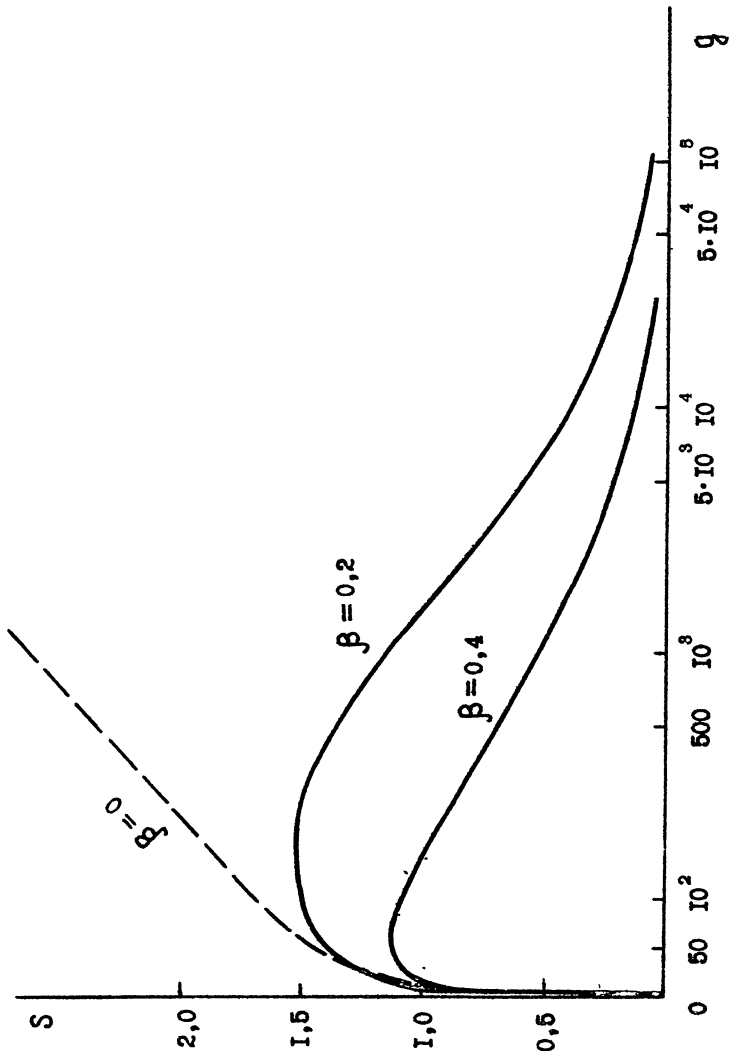


Рис. 2

где  $\chi = \frac{\text{sh}^2 \beta \sqrt{q_5} + \text{sin}^2 \beta \sqrt{q_5}}{2 \beta^2 q_5}$ . Зависимости инкрементов  $s(q)$

для различных  $\beta$  приведены на рис. 2.

3. Учет влияния столкновений частиц плазмы на развитие квазистатической ПДП-неустойчивости ( $\epsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_{p0}^2}{\omega(\omega + i\nu)}$ ) приводит к дисперсионному уравнению ( $|p| \gg 1$ )

$$\Delta e^{2ip} = \frac{p^2}{q^2} - 1, \quad \Delta = e^{-\mu} \frac{\text{sh} \mu}{\mu}, \quad \mu = \frac{\nu L}{v}. \quad (17)$$

Неустойчивость моды  $p_k = \pi k$  развивается при  $q \geq \frac{\pi k}{\sqrt{1-\Delta}}$ . В отличие от плазмы без столкновений, при достижении параметром  $q$  значения  $\pi k \left( k + \frac{1}{2} \right) (\sqrt{1-\Delta})^{-1}$  мода  $k$  становится устойчивой. Влияние столкновений существенно, если за время пролёта около поверхности проводника частицы успевают столкнуться много раз, т.е.  $\frac{\nu L}{v} \gg 1$ . В этом случае спектр колебаний тока на проводнике определяется соотношением

$$\omega = \omega_0 \left( 1 + i \frac{\nu}{4\nu L} \sin \frac{2\omega_0 L}{v} \right). \quad (18)$$

Интересно отметить, что и при учете столкновений возможно развитие неустойчивости с инкрементами  $\text{Im} \omega = \frac{\nu \omega_0}{4\nu L} \gg \frac{\nu}{2L}$ .

Проанализируем влияние логарифмически не расходящихся (при  $\alpha \rightarrow 0$ ) слагаемых в уравнении (6) на развитие неустойчивости тока. Конечные при  $\alpha \rightarrow 0$  слагаемые в первом интеграле (6) найдены в работе [4]. Во втором интеграле не расходящиеся при  $\alpha \rightarrow 0$  члены связаны с интегралами по берегам разрезов к точкам ветвления  $\kappa_{4,2} = \pm \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon(\omega)}$ . Проведем разрезы, как указано на рис. 3. Ограничиваясь главным членом разложения функции Ханкеля в ряд при  $\alpha \rightarrow 0$ , можно вычислить интеграл по берегам разрезов ( $+i\infty - \kappa_0$ ,  $-i\infty - \kappa_0$ ). В результате уравнение для тока приобретает вид

$$j(z) - \frac{\omega_0}{v} \int_0^z j(z') e^{i \frac{\omega}{v} (z-z')} \sin \frac{\omega_0}{v} (z-z') dz' - \frac{A}{\kappa_0} \sin \kappa_0 z =$$

$$= \frac{1}{2 \ln(\kappa_* \alpha) \epsilon(\omega)} \left\{ \int_0^{2L} \left[ \ln \kappa_* |z-z'| \left( j(z') \text{sign}(z-z') - i \kappa_0 j \right) \right] \times \right. \quad (19)$$

$$\times e^{i\kappa_0|z-z'|} + \ln \kappa_* z' (j'(z') + i\kappa_0 j(z')) e^{i\kappa_0 z'} \cos \kappa_0 z \Big] dz' .$$

При  $\omega_0 = 0$  (I9) переходит в хорошо известное уравнение для тока в теории тонких антенн в вакууме [4].

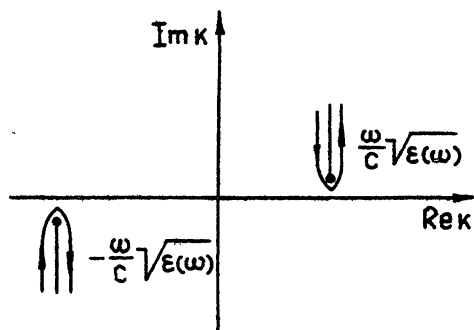


Рис. 3

Уравнение (I9) будем решать методом возмущений. В нулевом приближении по  $I/|\ln \kappa_* a| \ll 1$  и больших  $|\rho|$  из (IO) следует

$$j_0(z) = A z \left( \epsilon(\omega) \frac{\sin \kappa_0 z}{\kappa_0 z} - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} e^{i \frac{\omega}{v} z} \right) . \quad (20)$$

Заметим, что приравнивая нулю ток на антенне  $j_0$  при  $z=2L$  получим дисперсионное уравнение (I2) при  $|\rho| \gg 1$ .

В первом порядке теории возмущений необходимо ток, определяемый (20), подставить в правую часть уравнения (I9). Учитывая при этом, что вклады в интегралы от слагаемого  $(\omega_0^2/\omega^2) z \exp(i \frac{\omega}{v} z)$  малы из-за быстрых осцилляций, после громоздких преобразований получаем уравнение для тока во втором приближении ( $j = j_0 + j_1$ ):

$$\begin{aligned} j_1(z) - \frac{\omega_0}{v} \int_0^z j_1(z') e^{i \frac{\omega}{v}(z-z')} \sin \frac{\omega_0}{v}(z-z') dz' = \\ = \frac{A}{4i\kappa_0 \ln(\kappa_* a)} \left[ e^{-i\kappa_0 z} (Di(2\kappa_0 z) - iSi(2\kappa_0 z)) - e^{i\kappa_0 z} (Di(4\kappa_0 L - 2\kappa_0 z) - \right. \\ \left. - iSi(4\kappa_0 L - 2\kappa_0 z)) + (Di(4\kappa_0 L) - iSi(4\kappa_0 L)) \cos \kappa_0 z \right] . \quad (21) \end{aligned}$$

$$\text{Здесь } \text{Di}(x) = \int_0^x \frac{1 - \cos t}{t} dt, \quad \text{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt.$$

В квазистатическом приближении ( $\kappa_0 L \ll 1$ ) правая часть (21) принимает вид  $-\frac{Az}{\ln \kappa_* a}$  и уравнение для  $j_1$  совпадает по виду с (9). Отсюда следует важный вывод: в квазистатическом приближении спектры колебаний тока слабо зависят от толщины проводника.

Ситуация коренным образом изменяется, если  $\kappa_0 L \geq 1$ . Например, в вакууме ( $\omega_0 = 0$ )

$$j_1(2L) = -\frac{A}{4\kappa_0 \ln(\kappa_*)} \left( e^{-2i\kappa_0 L} + \cos 2\kappa_0 L \right) \left( \text{Si}(4\kappa_0 L) + i \text{Di}(4\kappa_0 L) \right)$$

и декремент затухания тока вследствие излучения электромагнитных волн определяется соотношениями

$$\text{Im } \omega_\kappa = \frac{c}{4L} \frac{\text{Di}(2\pi\kappa)}{\ln(\kappa_* a)},$$

$$\text{Re } \omega_\kappa = \frac{c}{2L} \pi\kappa.$$

Здесь  $\kappa$  - номер моды колебаний тока на проводнике.

В случае  $\omega_0 \neq 0$ ,  $\kappa_0 L \gg 1$  решение уравнения (21) получить не удастся, поэтому ограничимся оценками. Для колебаний тока с частотами  $\omega \sim \omega_0$  условие пренебрежения членами порядка  $1/\ln(\kappa_* a)$  имеет вид

$$|\ln(\kappa_* a)| \gg \frac{c}{v}. \quad (22)$$

Это условие хорошо выполняется при больших скоростях плазмы. В обратной (22) случае определяющим будет излучения электромагнитных волн и система устойчива.

### 3. Неустойчивость тока на проводнике, движущемся в магнитоактивной плазме

Пусть проводник, ориентированный по оси  $z$ , движется в магнитоактивной плазме вдоль той же оси со скоростью  $v$ . Магнитное поле направлено под углом  $\theta$  к оси  $z$ . В дальнейшем считаем длину проводника  $2L$  малой ( $2L \ll \lambda_{\perp}$ , где  $\lambda_{\perp}$  - длина электромагнитной волны, возбуждаемой проводником) и рассматриваем возбуждение квазистатических колебаний плазмы.

Уравнение Пуассона для потенциала имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \hat{\epsilon}_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \varphi = -4\pi \rho_{ex} \quad (23)$$

Здесь  $\hat{\epsilon}_{ij}$  - тензор диэлектрической проницаемости магнитоактивной плазмы, записанный в системе отсчета, в которой магнитное поле  $\vec{H}_0$  составляет угол  $\theta$  с осью  $z$  [6],

$$\rho_{ex} = \frac{\delta(\rho - a)}{4\pi\rho} \mathcal{E}(z + vt, t) \left[ \text{Sign}(z + vt) - \text{Sign}(z + vt - 2L) \right] \quad (24)$$

- плотность заряда движущегося идеального цилиндрического проводника радиуса  $a$ , длины  $2L$ ,  $\mathcal{E}$  - линейная плотность заряда на проводнике,  $\vec{r} = (\vec{\rho}, z)$ . Считая все величины изменяющимися во времени по закону  $e^{-i\omega t}$  и переходя в сопутствующую систему координат, из (23), (24), с логарифмической точностью по толщине проводника (см. разд. I), можно получить выражение для потенциала проводника:

$$\varphi = \text{const} \int_0^z \mathcal{E}(z') dz' \int_{-i0-\infty}^{-i0+\infty} \frac{e^{ik(z-z')}}{\sqrt{\epsilon_{xx}(\omega - kv)\epsilon_{yy}(\omega - kv)}} dk \quad (25)$$

Здесь

$$\epsilon_{xx} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_H^2} - \frac{\Omega_0^2}{\omega^2 - \Omega_H^2}, \quad (26)$$

$$\epsilon_{yy} = 1 - \frac{\omega_0^2 (\omega^2 - \omega_N^2 \sin^2 \theta)}{\omega^2 (\omega^2 - \omega_N^2)} - \frac{\Omega_0^2 (\omega^2 - \Omega_N^2 \sin^2 \theta)}{\omega^2 (\omega^2 - \Omega_N^2)},$$

$\omega_0$ ,  $\Omega_0$  - ленгмювская частота электронов и ионов,  $\omega_N$ ,  $\Omega_N$  - гирочастота электронов и ионов плазмы.

Учитывая, что потенциал проводника в квазистатическом приближении не зависит от  $z$ , из (25) получим уравнение для поверхностной плотности заряда:

$$\int_0^z \sigma(z') dz' \int_{-i0-i\infty}^{-i0+i\infty} \frac{e^{ik(z-z')}}{\sqrt{\epsilon_{xx}(\omega - \kappa v)} \epsilon_{yy}(\omega - \kappa v)} d\kappa = \text{const}. \quad (27)$$

Воспользовавшись условием незаряженности проводника

$$\int_0^{2L} \sigma(z') dz' = 0$$

после несложных преобразований приходим к следующему уравнению для собственных частот рассматриваемой системы:

$$\int_{-i0-i\infty}^{-i0+i\infty} \sqrt{\epsilon_{xx}(\omega - \kappa v)} \epsilon_{yy}(\omega - \kappa v) \frac{e^{2i\kappa L}}{\kappa^2} d\kappa = 0. \quad (28)$$

Рассмотрим конкретные случаи.

I. Проводник движется вдоль поля ( $\theta = 0$ ) и  $\omega \gg \Omega_0, \Omega_N$ . Из (28) легко получить дисперсионное уравнение, определяющее собственные частоты колебаний тока на проводнике:

$$e^{2ip} \left| (p^2 + g_N^2) \frac{\sin 2g_N}{2g_N} + ip \cos 2g_N \right| = ip + g_N^2 - p^2 + \frac{(g_N^2 - p^2)^2}{g^2}. \quad (29)$$

Из (29) можно определить границу области устойчивости на плоскости параметров  $g_N = \frac{\omega_N L}{v} \rightarrow g$  (см. рис. 4) [5]. Из приведенного ри-

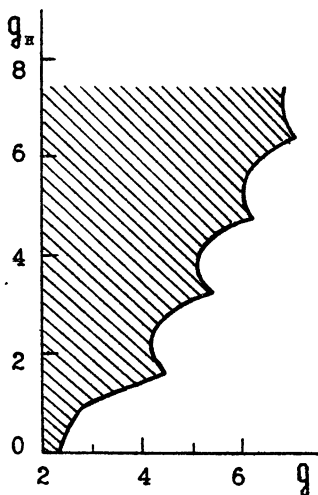


Рис. 4

сунка следует, что в сильнозамагниченной плазме квазистатические колебания тока устойчивы. В области параметров  $q > q_H$  происходит пороговое возбуждение ЦДП-неустойчивости ( $q > \pi/\sqrt{2}$ ) с инкрементами  $S(q)$ , критическими к значениям  $q_H$ . Например, для случая  $|\rho| \gg q_H$ ,  $q \gg q_H$

$$2Se^{2s} = (-1)^k \begin{cases} \cos 2q, & q_H = \frac{\pi k}{2} \\ \frac{q \sin q}{\pi k}, & q_H = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2} \end{cases}, \quad (30)$$

$\text{Re } \rho = q$ .

2. Проводник движется перпендикулярно магнитному полю,  $\omega \gg \Omega_0, \Omega_H$ . Дисперсионное уравнение ЦДП-неустойчивости имеет вид

$$\int_{-i0-\infty}^{-i0+\infty} \sqrt{\frac{[(\omega - kv)^2 - \omega_p^2][(\omega - kv)^2 - \omega_0^2]}{(\omega - kv)^2 - \omega_H^2}} \frac{e^{2ikl}}{\omega - kv} \frac{dk}{k^2} = 0, \quad (31)$$

$\omega_p = \sqrt{\omega_0^2 + \omega_H^2}$  - частота верхнего гибридного резонанса. Граница области устойчивости системы может быть рассчитана численно [7] (см. рис. 5). Аналитически дисперсионное уравнение (31) удается исследовать в двух предельных случаях плазмы без магнитного поля и сильнозамагниченной плазмы. Дисперсионное уравнение (31) при  $\omega_H \rightarrow \infty$  можно привести к виду

$$\begin{aligned} \omega(0, 2q) + i \frac{\rho}{q} \left[ J_1(2q) + i \frac{\rho}{q} J_0(2q) \right] = \\ = \left[ 1 + 2i\rho \left( 1 - \frac{\rho^2}{q^2} \right) \right] \omega \left( \frac{\rho}{q}, 2q \right), \end{aligned} \quad (32)$$



где  $w(x, y) = \frac{1}{y} \int_0^y J_0(\tau) e^{ix(\tau-y)} d\tau$ . Детальный анализ уравнения (32) показывает, что система устойчива.

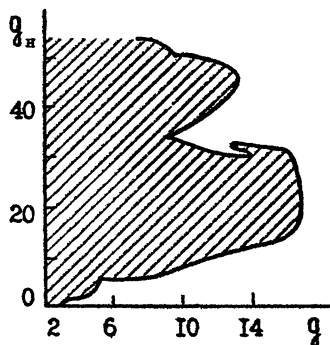


Рис. 5

3. Исследуем теперь ЦДП-неустойчивость, возникающую при движении проводника со скоростью

$$v_{Te} \ll v \ll v_{Te}. \quad (33)$$

Условие (33) хорошо выполняется для космических аппаратов, движущихся в верхней ионосфере. Основную роль в возникновении нарастающих колебаний тока на проводнике играют электронно-ионные колебания плазмы. Ограничиваясь случаем продольного ( $\vec{v} \parallel \vec{H}_0$ ) движения проводника, из (28) получаем сле-

дующее дисперсионное уравнение:

$$1 + \frac{q^2}{\rho^2} \left[ \frac{i}{\rho} - 1 - e^{2ip} \left( 1 + \frac{i}{\rho} \right) \right] = 0. \quad (34)$$

Здесь  $q = \Omega L / v$ ,  $\Omega = \sqrt{\omega_n \Omega_n}$  - частота нижнегибридных колебаний плазмы. Легко показать, что при  $q \leq \pi/\sqrt{2}$  система устойчива. При  $q > \pi/\sqrt{2}$  развивается неустойчивость нижнегибридных колебаний тока на проводнике, причем при  $\frac{\pi\kappa}{\sqrt{2}} < q < \frac{\pi(\kappa+1)}{\sqrt{2}}$  неустойчивыми оказываются  $\kappa$  мод колебаний.

Оценим возможность возникновения и развития неустойчивости, связанной с нижнегибридными колебаниями (НГР-неустойчивость) при движении металлического зонда в ионосфере Земли. Для оценки возьмем следующие значения параметров:  $\omega_n = 10^7 \text{ с}^{-1}$ ,  $\Omega_n = 10^2 \text{ с}^{-1}$ ,  $\Omega = 3 \cdot 10^4 \text{ с}^{-1}$ ,  $v = 8 \cdot 10^5 \text{ см с}^{-1}$ ,  $L = 10^2 \text{ см}$ . В этих условиях характерные масштабы возмущений вдоль геомагнитного поля  $\lambda_{\parallel} \sim \frac{v}{\Omega} = 30 \text{ см}$ , поперек поля  $\lambda_{\perp} = \lambda_{\parallel} (\epsilon_{\perp} / \epsilon_{\parallel})^{1/2} \approx \lambda_{\parallel}^{1/2} r_n^{2/3}$  ( $r_n = v_{Te} / \omega_n$  - ларморовский радиус электронов) намного превосходят гирорадиус и дебаевский радиус электронов, что совместно с отсутствием затухания Ландау для нижнегибридных колебаний оправдывает использованное нами

приближение холодной плазмы. Столкновительное затухание НГР колеба- ний тоже можно не учитывать в силу выполнения неравенства  $v_L/v \ll 1$ . Величина параметра  $q \approx 3,4$  превышает пороговое значение  $q_c = \pi/\sqrt{2}$ , что приводит к возникновению неустойчивости первой моды тока проводника. Для случая длинных антенн в условиях верхней атмосферы возможно возникновение многомодового режима неустойчивости тока. Таким образом, НГР неустойчивость может служить одним из механизмов экспериментально наблюдавшихся значительных шумов антенн космических аппаратов вблизи нижнегибридной частоты [8].

В заключение кратко проанализируем НГР неустойчивость, возникающую при движении в аналогичных условиях плоского сетчатого конденсатора (ондулятора) перпендикулярно внешнему магнитному полю  $\vec{H}_0$ . Выбор данной геометрии обусловлен необходимостью возбуждения нижнегибридных колебаний плазмы между обкладками конденсатора ( $\vec{k} \parallel \vec{v} \perp \vec{H}_0$ ). Полагая расстояние между сетками  $L$ , их площадь  $S$ , не сложно, следуя [19], вычислить импеданс движущегося конденсатора:

$$Z = - \frac{4\pi L}{i\omega S} \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2} \frac{q^2}{(\rho^2 - q^2)^2} D(\rho, q), \quad (35)$$

$$\text{где } D(\rho, q) = 2i\rho + \frac{\rho^2(q^2 - \rho^2)}{q^2} - e^{i\rho} \left[ (q^2 + \rho^2) \frac{\sin q}{q} + 2i\rho \cos q \right].$$

Появление НГР неустойчивости в данной системе соответствует обращению в нуль сопротивления конденсатора ( $\text{Re } Z = 0$ ), означаемому равенство вкладов нормального и аномального доплер-эффектов в излучение движущимся ондулятором нижнегибридных волн. Спектр собственных частот данной системы определяется уравнением  $Z = 0$ , что реализуется, например, при осуществлении безынерционной обратной связи зако- рачиванием обкладок конденсатора. Таким образом, дисперсионное уравнение ондуляторной НГР неустойчивости имеет вид

$$2i\rho + \frac{\rho^2(q^2 - \rho^2)}{q^2} = e^{i\rho} \left[ (q^2 + \rho^2) \frac{\sin q}{q} + 2i\rho \cos q \right]. \quad (36)$$

Рассматриваемая "плоская" неустойчивость аналогична известной электростатической пучковой неустойчивости Пирса. Из анализа (36) следует, что неустойчивой является аперiodическая мода  $(Re p = 0)^+$ , развивающаяся при

$$(2k - 1)\pi < q < 2k\pi. \quad (37)$$

При этом наибольший инкремент достигает значений порядка обратного времени пролета плазмы между обкладками ондулятора. Последнее является наиболее существенным обстоятельством, отличающим неустойчивость пирсовского типа от рассмотренной нами. Отношение инкрементов этих неустойчивостей при  $q \gg 1$  порядка

$$\frac{S_e}{S_p} \sim \ln q.$$

Значительность инкрементов НР-неустойчивости позволяет надеяться на возможность её экспериментального обнаружения.

#### 4. Неустойчивость тока на проводнике при его движении вблизи границы плазмы

В этом разделе мы исследуем неустойчивость тока на движущемся проводнике, связанную с возбуждением им поверхностных волн на границе плазма - вакуум. Хорошо известно, что возбуждение поверхностных волн приводит к аномально большей диффузии плазмы поперек магнитного поля [II, I2]. Выяснение условий устойчивости полуограниченной плазмы при взаимодействии её с проводящими телами (обмотки соленоида, зонды и т.д.) весьма важно в связи с проблемой магнитного удержания [II, I3]. Кроме того, поверхностные волны привлекают в последнее время особое внимание в разработках плазменных усилителей [I4, I5].

I. Рассмотрим вначале возбуждение поверхностных высокочастотных волн в полуограниченной изотропной плазме. Пусть проводник движется параллельно границе на расстоянии  $y = h$  от неё (плазма занимает полупространство  $y < 0$ ). Считая колебания потенциальными, исходим из

+) В недавней работе [I0] обращается внимание на возможность периодической неустойчивости в системе Пирса, возникающей при  $2k\pi < q < (2k+1)\pi - \delta(k)$ , где обычно  $\delta(k) \leq 1/2$ . Частоты этих мод порядка обратного времени пролёта  $v/L$ , а инкременты даже несколько меньше, чем у аперiodической моды.

уравнений Пуассона для верхнего и нижнего полупространства:

$$\Delta \varphi_1 = -4\pi \rho_{\text{ext}}, \quad y > 0; \quad (38)$$

$$\varepsilon \Delta \varphi_2 = 0, \quad y < 0. \quad (39)$$

Здесь  $\rho_{\text{ext}}$  дается формулой (24) с  $\rho = \sqrt{(y-h)^2 + x^2}$ ,  $\varepsilon = 1 - \omega_0^2/\omega^2$ .

Уравнения (38), (39) следует дополнить граничными условиями для тангенциальной составляющей электрического поля и нормальной компоненты индукции:

$$\varphi_1 = \varphi_2, \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = \varepsilon \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}. \quad (40)$$

Переходя к движущейся системе отсчета, с помощью фурье-преобразования по  $\bar{z}$  и  $x$ , с использованием граничных условий (40), получаем выражение для потенциала:

$$\varphi = \frac{i}{\pi} \int_0^{2L} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ K_0(|k| \sqrt{(y-h)^2 + x^2}) + \frac{1-\varepsilon(\omega - kv)}{1+\varepsilon(\omega - kv)} \times \right. \\ \left. \times K_0(|k| \sqrt{(y+h)^2 + x^2}) e^{ik(z-z')} \right] dk, \quad (41)$$

где  $K_0(x)$  — функция Макдональда. При получении (41) использовано то обстоятельство, что толщина проводника  $a \ll \lambda$  ( $\lambda$  — характерная длина волны возмущений). При  $h \rightarrow \infty$  из (41) получаем обычное выражение для потенциала тонкого проводника в вакууме. Для того, чтобы исследовать возбуждение поверхностных волн, рассмотрим случай  $h \ll L$  ( $2L$  — длина антенны). Тогда, поскольку  $k \sim \frac{1}{L}$ , аргументы функций Макдональда в (41) малы и можно ограничиться лишь логарифмическим членом в разложении этих функций (учет нерасходящихся при  $a \rightarrow 0$ ,  $h \rightarrow 0$  членов в квазистационарном приближении не существен, как показано в разд. 2). В результате для потенциала вблизи поверхности проводника получаем

$$\varphi = \frac{2}{\pi} \ln \frac{L}{a} \int_0^{2L} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ik(z-z')}}{1+\varepsilon(\omega - kv)} dk. \quad (42)$$

Из (42) видно, что вклад в интеграл определяется полюсом  $1 + \varepsilon(\omega - \kappa v) = 0$ ; это соответствует возбуждению поверхностных волн. Дальнейшая процедура вычислений вполне аналогична рассмотренной в разд. 2.1, и мы её опускаем.

Уравнение, определяющее зависимость собственных частот системы от длины проводника, скорости и ленгмювской частоты плазмы, имеет вид

$$\int_{-i0-\infty}^{-i0+\infty} [\varepsilon(\omega - \kappa v) + 1] \frac{e^{2i\kappa L}}{\kappa^2} d\kappa = 0. \quad (43)$$

Уравнение (43) легко исследовать. При  $g < \pi$   $\text{Im } \omega < 0$  и система устойчива. На пороге неустойчивости  $g = \pi$  частота колебаний тока проводника  $\omega = \omega_0$ . Если  $g > \pi$ , то возникает неустойчивость, причем если  $\pi\kappa < g < \pi(\kappa + 1)$ , то неустойчивость носит многомодовый характер (возбуждается мод колебаний тока). При фиксированном параметре  $g$  максимальный инкремент соответствует моде, у которой  $\text{Re } \omega = \omega_0 / \sqrt{2}$ , а инкремент определяется из уравнения

$$2S e^{2S} = g / \sqrt{2}. \quad (44)$$

Отметим, что при  $g \gg 1$  инкременты могут значительно превышать обратное время пролета плазмы вдоль поверхности проводника:

$$\text{Im } \omega \sim \frac{v}{2L} \ln \frac{\omega_0 L}{\sqrt{2} v} \quad (45)$$

2. Исследуем ЦДП-неустойчивость поверхностных волн в магнитоактивной плазме. Рассмотрим простую ситуацию, когда проводник движется вдоль своей оси параллельно магнитному пол. и границе плазмы. Дисперсионное уравнение, получаемое аналогично предыдущему, имеет вид

$$\int_{-i0-\infty}^{-i0+\infty} \frac{[(1 + \varepsilon_1(\omega - \kappa v))^2 - G^2(\omega - \kappa v)]}{1 + \varepsilon_1(\omega - \kappa v)} \frac{e^{2i\kappa L}}{\kappa^2} d\kappa = 0, \quad (46)$$

где  $\varepsilon_1 = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2 - \omega_H^2}$ ,  $G = \frac{\omega_0^2 \omega_H}{\omega(\omega^2 - \omega_H^2)}$ ,

ПП-неустойчивость связана с возбуждением поверхностных волн, распространяющихся поперек магнитного поля. Уравнение (46) будем исследовать сразу для  $|\rho| \gg 1$ . При названных условиях (46) принимает вид

$$e^{2i\rho} = \frac{4\rho^2 g_H^2}{g^4} - 1. \quad (47)$$

Это уравнение описывает неустойчивость низкочастотных электронных желобковых мод с характерной частотой  $\omega \sim \omega_0^2 / \omega_H$ . Пороги неустойчивости моды  $\rho_k = \pi k$  определяются из условия

$$g_H = \frac{g^2}{\sqrt{2\pi k}}. \quad (48)$$

Для исследования инкрементов обратимся к (46). Анализ показывает, что максимальные инкременты достигаются при  $(1 + \varepsilon_{\perp}^2)^2 = G^2$ , т.е. на дисперсионных кривых, соответствующих поверхностным волнам, распространяющимся поперек магнитного поля. Инкременты этих мод определяются из уравнения

$$2 \operatorname{Im} \omega e^{\frac{2L}{v} \operatorname{Im} \omega} = \left| \frac{\omega_0^4 (\Omega_0 - \omega_H)}{(2\omega_H^2 + \omega_0^2) \Omega_0 (2\Omega_0 - \omega_H)} \right|, \quad (49)$$

где  $\Omega_0 = \frac{\omega_H \pm \sqrt{\omega_H^2 - 2\omega_0^2}}{2}$  определяет частоты поверхностных волн.

Здесь рассмотрена неустойчивость поверхностных волн при движении проводника вблизи границы вакуум-плазма. Очевидно, что такого же типа неустойчивость есть и в случае, когда проводник покоится, а движется плазма. Достаточно большие инкременты этой неустойчивости позволяют надеяться на её экспериментальное обнаружение.

## Л и т е р а т у р а

1. Pierce G.R. Limiting currents in electron beam in the presence of ions.- J.Appl.Phys.,1944,v.15,p.721-726.
2. Силин В.П., Рухадзе А.А. Электромагнитные свойства плазмы и плазмopodobных сред. - М.: Атомиздат, 1961, 242 с.
3. Вайнштейн Л.А. Теория дифракции и метод факторизации. - М.: Сов. радио, 1966, 587 с.
4. Леснотвич М.А., Левин М.Л. К теории возбуждения колебаний в вибраторах антенн. - ЖТФ, 1944, т. 14, № 9, с. 481 - 506.
5. Эйдем В.Я. О неустойчивости квазистатических колебаний потенциала проводника, обтекаемого плазмой. - Изв. вузов - Радиофизика, 1979, т. 22, № 7, с. 781 - 788.
6. Гинзбург В.Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. - М.: Наука, 1967, 585 с.
7. Немцов Б.Е., Шлягин А.В., Эйдем В.Я. О взаимодействии движущегося тонкого проводника с магнитоактивной плазмой. - Изв. вузов-Радиофизика, 1981, т. 24, № 10, с. 1207 - 1210.
8. Laorere T.,Morgan M.G.,Johnson W.C. Observation of low hybrid resonance phenomena on the OGO 2 spacecraft.- J.Geophys.Res. 1969,v.74,N1,p.141-153.
9. Андронов А.А. Импеданс и шумы антенны (зонда) в космической плазме. - Космические исследования, 1966, т. 4, в. 4. с 559-567.
10. Cary John R.,Lemons Don S. Unstable oscillatory pierce modes of neutralized electron beams.- Journal of Applied Physics, 1982,v.53,N4;p.3303-3304.
11. Арцимович Л.А., Сагдеев Р.З. Физика плазмы для физиков. - М. : Атомиздат, 1979, с. 317.
12. Гинзбург В.Л., Рухадзе А.А. Волны в магнитоактивной плазме. - М.: Наука, 1975, 268 с.
13. Кадомцев Б.Б. Коллективные явления в плазме. - М.: Наука, 1976 , 237 с.
14. Долженко О.В. и др. Нелинейная теория возбуждения поверхностных волн в диэлектрической среде релятивистским электронным пучком. - ЖТФ, 1975, т. 68, с. 1304 - 1312.
15. Гришин В.К., Каневский М.Ф., Иванов С.Т. К магнитной теории генерации поверхностных волн в пучково-плазменных системах. - Физика плазмы, 1981, т. 7, в. 4, с. 774 - 778.

Борис Семенович Абрамович  
Борис Ефимович Немцов  
Вилем Яковлевич Эйрман

**НЕУСТОЙЧИВОСТЬ СИСТЕМЫ ПЛАЗМА - ДВИЖУЩИЙСЯ ПРОВОДНИК**

---

Подписано в печать 12.12.84 г. МЦ 21808. формат 60 x 84 1/16 .

Бумага множительная. Печать офсетная. Объем 1,38 усл. пач. л.

Тираж 120. Заказ 4146. Бесплатно.

---

Отпечатано на ротационте НИРФИ