

Министерство высшего и среднего специального образования РСФСР  
Горьковский ордена Трудового Красного Знамени  
научно-исследовательский радиофизический институт (НИРФИ)

Препринт № 195

К ТЕОРИИ  $1/f$  - ШУМА

(часть II)

Г.Н.Бочков

В.Е.Кузовлев

Горький 1985

Развивается предложенная ранее авторами теория  $1/f$  - шума, ведущая к спектру  $\sim 1/f$  без насыщения на произвольно низких частотах. Показывается, что по своему физическому происхождению  $1/f$  - шум сопряжен с "белым" тепловым шумом и, так же как белый шум, является следствием потери термодинамических корреляций в ходе процессов переноса. В силу затухания корреляций (конечности памяти о прошлом) реальный случайный поток "кинетических" событий, порождающий реальный физический белый шум, (в отличие от пуассоновского потока) не может иметь наперед заданной средней частоты событий. Средняя по времени частота сама определяется игрой случая, что, как показывается, приводит к  $1/f$  - флуктуациям мощности шума и эмпирического сопротивления.

В первой части работы обсуждаются физические причины  $1/f$  - шума и его универсальные статистические свойства. Во второй части проводится подробный количественный анализ статистики  $1/f$  - шума (статистики совершенно случайных потоков событий). Показано, что она принципиально негауссова и тяготеет к "статистике Коши". Теория объясняет результаты экспериментальных исследований (Брофи, Пурселла и др.) вероятностных характеристик  $1/f$  - шума. Строится также теория нестационарного  $1/f$  - шума с показателем спектра, большим единицы.

### 3. СТАТИСТИКА $\sqrt{f}$ -ШУМА

#### 3.1. Постановка математической задачи

1. Каждая из кинетических и спектральных характеристик исследуемой системы (сопряженной с необратимыми процессами и поэтому "душающей") получается усреднением какой-либо функции динамических переменных  $I(t)$  по интервалу времени  $\Delta t \gg \tau_k$ , где  $\tau_k$  - длительность корреляции шума. Причём, строгий кинетический смысл имеет только результат усреднения в пределе  $\Delta t / \tau_k \rightarrow \infty$ . При конечном  $\Delta t$  результат усреднения случаен. Он записывается в виде  $J = \Delta Q / \Delta t$ , где  $\Delta Q = \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} I(t') dt'$  можно рассматривать, в зависимости от  $\Delta t$ , как координату случайного блуждания с однородными по времени приращениями.

При условии  $\Delta t \gg \tau_k$  конкретный механизм диссипации и шума не существен для статистических свойств величин  $\Delta Q$  и  $J$ . Поскольку статистика  $J$  определяется не теми или иными специфическими корреляциями, а потерей корреляций, то она должна быть качественно универсальна для различных систем и процессов переноса, отличаясь лишь количественными параметрами. В частности, эта статистика независима от размеров и от размерности системы. Она может видоизменяться лишь при нарушении стационарности и эргодичности процесса.

Следовательно, при  $\Delta t \gg \tau_k$  статистика  $\Delta Q$  подобна статистике числа событий в совершенно случайном потоке, и мы можем трактовать  $\Delta Q$  как число событий в таком потоке, а  $J$  - как среднюю их частоту, реализовавшуюся на данном интервале  $\Delta t$ .

Мы будем ориентироваться на две конкретные ситуации.

Во-первых, на процесс переноса заряда  $\Delta Q$  за время  $\Delta t$  в неравновесном токовом состоянии проводника. При этом  $I$  - мгновенный ток; при условии  $\Delta t \gg \tau_k$  величину  $J$  можно интерпретировать как результат измерения диссипативного тона (спектральной составляющей тока  $I$  на нулевой частоте) и тем самым - сопротивления<sup>4)</sup>.

4) При рассмотрении переменного тока в качестве  $\Delta Q$  следует взять величину диссипации за время  $\Delta t$ .

Во-вторых, на измерение спектральной мощности шума (равновесного, как в эксперименте Восса-Кларка, или неравновесного, как в экспериментах Брофи, - см. Введение). При этом  $\Delta Q = \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} y^2(t') dt'$ , где  $y(t)$  -

"выход" полосового фильтра (и в экспериментах Брофи  $\tau_k \lesssim \frac{2\pi}{\omega_A} \sim 0,1$  с)

2. Из проведенного обсуждения принципиальных физических механизмов  $1/f$ -шума следует, что случайное блуждание  $\Delta Q$  определяется следующими условиями.

1) Последовательные приращения  $\Delta Q_1$  и  $\Delta Q_2$ , каждое за промежуток времени  $\gg \tau_k$ , причинно не связаны и независимы одно от другого. Отсюда следует, что при  $\Delta t / \tau_k \rightarrow \infty$   $\Delta Q$  имеет статистическую структуру случайного процесса с независимыми приращениями. Поэтому при  $\frac{\Delta t}{\tau_k} \gg 1$  логарифм характеристической функции  $\ln \langle e^{i\omega \Delta Q(\Delta t)} \rangle$  асимптотически должен быть линейной функцией  $\Delta t \equiv t$ . Здесь (и далее) для упрощения записи положено  $\Delta t \equiv t$ ;  $\langle \dots \rangle$  - обозначает усреднение по ансамблю реализаций.

2) Вероятные флуктуации  $\Delta Q(t)$  растут при увеличении  $t \gg \tau_k$  по тому же масштабному закону, что и среднее по ансамблю значение  $\langle \Delta Q(t) \rangle \equiv \bar{J}t$  (вернее сказать, ансамблевое среднее отражает характерный закон роста случайной величины:  $\Delta Q(t)$ ). Это основное статистическое свойство рассматриваемого блуждания можно записать в виде

$$\Delta Q(\lambda t) \sim \lambda \Delta Q(t), \quad (3.1)$$

понимая под знаком  $\sim$  символ статистической эквивалентности случайных величин.

Как мы видели, это свойство является неизбежным следствием потери памяти о прошлом. В силу забывания прошлого система не способна "следить" за результатом процесса переноса (различать "среднее" и "флуктуации") и тем самым - за скорость переноса.

Данное свойство означает также, что флуктуации измеряемой кинетической характеристики  $J$  не имеет своего характерного времени. Действительно, масштаб  $\tau_k$  не может выступать в такой роли, поскольку сама измеряемая кинетическая (спектральная) характеристика  $J = \frac{\Delta Q}{t}$  формируется на интервалах времени  $\gg \tau_k$ . Но если нет естественного масштаба для сравнения с ним длительности  $t$ , то ро-

зультат усреднения по времени,  $\Delta Q(t)/t$ , в статистическом смысле независим от  $t$ . А это означает масштабную инвариантность (I).

3) В пределе  $t/\tau_k \rightarrow \infty$  среднее по времени  $\Delta Q/t$  становится неслучайной величиной, совпадающей со средним по ансамблю  $\bar{J} = \frac{\langle \Delta Q \rangle}{t}$ . Это есть условие эргодичности кинетического поведения системы.

4) При  $t/\tau_k \gg 1$  случайная величина  $\bar{J} = \Delta Q/t$  является знако-определенной. В отношении мощностных спектральных характеристик шума это условие выполняется автоматически. В применении к собственно кинетическим характеристикам, например, диссипативному току и сопротивлению, оно означает невозможность отрицательной диссипации (неотрицательность сопротивления). Без ограничения общности можно считать, что  $\bar{J}$  неотрицательна, т.е. (в достаточно грубой временной шкале) случайное блуждание  $\Delta Q$  все время "идет вправо".

3. Эти четыре условия полностью определяют статистические характеристики стационарного  $1/f$ -шума. Стационарность является следствием (I) и условия (3).

Очевидно, свойство масштабной инвариантности (I) не является абсолютно строгим. Оно заведомо должно нарушаться, когда  $t$  приближается (сверху) к  $\tau_k$ . Однако это обстоятельство не нужно учитывать специально, оно, как будет видно, учитывается требованием конечности величины  $\bar{J}$ .

Нарушение (I) на больших масштабах ( $t/\tau_k \rightarrow \infty$ ) означало бы нестационарность процесса переноса и  $1/f$ -шума. Такое, в принципе, всегда мыслимо в неравновесной системе, и, как известно, в экспериментах нередко наблюдается нестационарный вариант  $1/f$ -шума со спектром вида  $f^{-\delta}$ , где  $\delta$  заметно больше единицы [4-6]. То, что отклонение  $\delta$  происходит в сторону  $> 1$ , качественно понятно: неравновесность представляет дополнительные возможности для разнообразия (свободы) реализаций процесса переноса. А это может лишь ухудшить его усредняемость по времени. Поскольку же даже в наилучшей, равновесной, ситуации самоусредняемости нет, то результатом окажется неэргодичность процесса переноса и нестационарность  $1/f$ -шума. Однако, прежде чем интересоваться подобными возможностями, необходимо изучить стационарную ситуацию.

### 3.2. 1/f - шум и "статистика Коши"

I. Рассмотрим два последовательных промежутка времени длительностью  $t$  каждый. Пусть на первом приращение координаты случайного блуждания (например, перенесенного заряда) составило  $\Delta Q_1 = \Delta Q_1(t)$ , а на втором  $\Delta Q_2 = \Delta Q_2(t)$ . В силу условия I) при  $t \gg \tau_k$  случайные величины  $\Delta Q_1$  и  $\Delta Q_2$  независимы. С другой стороны, полагая в (I)  $\lambda = 2$  и учитывая, что  $\Delta Q(2t) = \Delta Q_1(t) + \Delta Q_2(t)$ , из условия 2) получаем

$$\Delta Q_1(t) + \Delta Q_2(t) \sim 2 \Delta Q_1(t), \quad (3.2)$$

т.е. находим, что сумма  $\Delta Q_1 + \Delta Q_2$  статистически эквивалентна  $2 \Delta Q_1$  (или  $2 \Delta Q_2$ ).

В этом заключается основное, характерное, статистическое свойство переноса (и тем самым 1/f - шума): сумма двух независимых "одинаковых" случайных величин  $\Delta Q_1$  и  $\Delta Q_2$  статистически подобна  $2 \Delta Q_1 = \Delta Q_1 + \Delta Q_1$  т.е. сумме двух полностью зависимых (тождественно совпадающих) величин! Иначе говоря, независимые величины  $\Delta Q_1, \Delta Q_2$  складываются так, как если бы они были связаны не убывающими с ростом  $t$  корреляциями. В точности такие же утверждения следуют отсюда в отношении случайных величин  $J_1 = \Delta Q_1/t$ ,  $J_2 = \Delta Q_2/t$ , т.е. скоростей переноса (диссипативного тока) на двух различных интервалах времени. Из (2) имеем

$$\frac{J_1 + J_2}{2} \sim J_1 \quad (3.3)$$

Таким образом, результат измерения  $\frac{\Delta Q_1 + \Delta Q_2}{2t}$ , полученный усреднением по удвоенному интервалу времени  $2t$ , статистически эквивалентен результату усреднения по половине этого интервала. С точки зрения измерений диссипативного тока (сопротивления) такое статистическое свойство воспринимается как эффект бесконечно протяженных корреляций.

2. Подобным свойством обладают случайные величины, подчиняющиеся вероятностным распределениям "типа Коши", или, другими словами, так называемым устойчивым распределениям с характеристическим показателем  $\alpha = 1$ .

Широко известное распределение из этого семейства - симметричное распределение Коши. Его плотность вероятности имеет вид  $W_a(x) = \frac{a}{\pi(a^2+x^2)}$ , где  $a$  - параметр (ширина распределения). Если  $x_1$  и  $x_2$  - две независимые случайные величины, каждая с таким распределением, то их сумма  $x = x_1 + x_2$  имеет плотность

$$\int_{-\infty}^{\infty} W_a(x-x_1) W_a(x_1) dx_1 = \frac{2a}{\pi(4a^2+x^2)} = W_{2a}(x).$$

Это - та же плотность, но с удвоенной шириной. Но такой же плотностью обладает случайная величина  $y = 2x_1 = x_1 + x_1$  (т.е. сумма пол-ностью зависимых слагаемых):

$$W(y) dy = W_a(x_1) dx_1,$$

$$W(y) = \frac{1}{2} W_a\left(\frac{y}{2}\right) = W_{2a}(y).$$

Следовательно, величины  $x_1 + x_2$  и  $2x_1$  статистически эквивалентны.

Как явствует отсюда, независимые случайные величины, "распределенные по Коши", не компенсируют друг друга при сложении и не самоусредняются. Имея дело с величинами, подчиняющимися подобной статистике, всегда можно "обнаружить" корреляции, которых на самом деле нет. Очевидно, эти кажущиеся корреляции не имеют отношения к действительным причинным связям.

3. Симметричное распределение Коши имеет характеристическую функцию

$$\int_{-\infty}^{\infty} W_a(x) e^{iux} dx = \langle e^{iux} \rangle = e^{-a|u|}.$$

В отличие от этого распределения, большинство других устойчивых распределений имеет плотности, не выражающиеся в элементарных и специальных функциях. Однако их характеристические функции просты. Общий вид характеристической функции ( $\chi(u)$ ) устойчивого распределения [36, 37, 40]

$$\langle e^{iux} \rangle = \exp\{iuc - a|u|^\alpha [1 + i\nu \operatorname{tg}\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \operatorname{sign} u]\} \quad (3.4)$$

при  $\alpha \neq 1$  и

$$\langle e^{iux} \rangle = \exp\{-a|u| - i\omega \frac{2}{\pi} a\nu \ln(|u|/B)\} \quad \text{при } \alpha=1. \quad (3.5)$$

Здесь  $\alpha$  - так называемый характеристический показатель; он может принимать значения из интервала  $0 < \alpha \leq 2$ ;  $a, b, c, \gamma$  - параметры распределения, причем  $a > 0, b > 0, |\gamma| \leq 1$  ( $\gamma$  - параметр асимметрии).

Случайные величины, имеющие устойчивое распределение с показателем  $\alpha$ , складываются в соответствии с масштабным свойством [36]

$$X_1 + X_2 \sim 2^{\frac{1}{\alpha}} X_1,$$

или вообще

$$X_1 + \dots + X_n \sim n^{\frac{1}{\alpha}} X_1, \quad (3.6)$$

где величины  $X_i$  независимы, а  $\sim$  обозначает статистическую эквивалентность. Переписав статистическое равенство (6) в форме

$$\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \sim n^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} X_1, \quad (3.7)$$

видим, что при  $\alpha > 1$  сложение приводит к самоусреднению, т.е. арифметическое среднее  $n$  слагаемых меньше отдельного слагаемого. Однако при  $\alpha < 1$  сложение приводит, наоборот, к "разусреднению": арифметическое среднее оказывается, в вероятностном смысле, больше каждого слагаемого. Другими словами, арифметическое среднее значение выборки определяется преимущественно нетипичными реализациями случайной величины (независимо от объема выборки).

Случай  $\alpha = 1$ , когда соотношения (6), (7) сводятся к (2), (3), отвечает статистике Коши.

В силу условия 4) (см. выше) нас интересует максимально асимметричный вариант распределения Коши. Он получается из (5) при  $\gamma = 1$ :

$$\langle e^{iux} \rangle = \exp \left\{ -iu \frac{2}{\pi} \alpha \ln(-iub) \right\}. \quad (3.7)$$

Выпишем также ХФ максимально асимметричного устойчивого распределения с показателем  $\alpha$ . Её нетрудно привести к виду

$$\langle e^{iux} \rangle = e^{-a(-iu)^\alpha} \quad \text{при } \alpha < 1; \quad (3.8)$$

$$\langle e^{iux} \rangle = e^{iuc + a(-iu)^\alpha} \quad \text{при } 1 < \alpha \leq 2 \quad (3.9)$$

где  $a > 0$ .



Наиболее подробные сведения о плотностях устойчивых распределений содержатся в [37]. Распределения с  $X\Phi$  (8) сосредоточены на положительной полуоси ( $0 < x < \infty$ ), причем имеют следующие асимптотики:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iux - a(iu)^{\alpha}} du = \begin{cases} \frac{a}{\Gamma(1-\alpha)} \cdot \frac{1}{x^{1+\alpha}}; & x \rightarrow \infty; \\ \frac{(\alpha a^{1/\alpha})^{\alpha}}{x \sqrt{2\pi\alpha(1-\alpha)}} \exp\left\{- (1-\alpha) \left(\frac{\alpha a^{1/\alpha}}{x}\right)^{\alpha/(1-\alpha)}\right\}; & x \rightarrow 0. \end{cases} \quad (3.10)$$

Асимптотика распределения Коши с  $X\Phi$  (7) такова:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iux - iu \ln(-iu)} du = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & x \rightarrow \infty, \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{x+1}{2} - e^{-x-1}\right\}; & x \rightarrow -\infty. \end{cases} \quad (3.11)$$

Таким образом, это распределение заходит в область отрицательных значений  $x$ , хотя и спадает там "дважды экспоненциально быстро". Устойчивые случайные величины с  $\alpha > 1$  ( $X\Phi$  (9)) также принимают любые значения ( $-\infty < x < \infty$ ).

4. Наличие у распределения Коши (II) квадратичного степенного хвоста означает бесконечность всех статистических моментов  $\langle x^k \rangle$  ( $k \geq 1$ ). Это отражается также неаналитичностью  $X\Phi$  (7) при  $iu = 0$ . Нетрудно видеть, что статистическое тождество  $x_1 + x_2 \sim 2x_1$  может выполняться строго лишь за счет бесконечности моментов.

Но моменты физических величин  $\Delta Q_1$ ,  $\Delta Q_2$  и т.п. конечны, и, следовательно, "идеальное" распределение типа Коши не может в точности для них реализоваться. Это результат того, что масштабное свойство (I) - (3) не является абсолютно строгим. Однако оно строго выполняется в асимптотическом смысле, при  $t/\tau_k \rightarrow \infty$ . Этого достаточно, как будет показано, для того, чтобы распределение  $\Delta Q$ , сохраняя конечные моменты, тем не менее проявляло характерную черту статистики Коши - отсутствие самоусреднения по времени.

Точнее говоря, при условии эргодичности 3) самоусреднение формально достигается, но лишь ценой сильного неравенства  $\ln \frac{t}{\tau_k} \gg 1$ . Поэтому практически даже в эргодическом случае усреднение по ансам-

бле реализаций (процесса переноса) нельзя уверенно возместить усреднением по времени вдоль отдельной реализации.

### 3.3. Асимметричное устойчивое случайное блуждание с характеристическим показателем $\alpha = 1 - A$ ( $A > 0$ )

Наша задача в этом разделе - сконструировать характеристическую функцию ( $X\Phi$ ) случайного блуждания  $\Delta Q(t)$ , удовлетворяющую всем четырём, перечисленным в разд. 3.1., условиям.  $X\Phi$  даёт полную информацию о статистике  $\Delta Q$ .

Следует предупредить читателя, что дальнейшие построения и выкладки довольно трудны (а вернее, непривычны). Они представляют собой попытку развить адекватный феномену  $1/f$ -шума (см. первую часть) математический статистический аппарат (с выходом за рамки наших предшествующих работ по  $1/f$ -шуму). См. также разд. 4.3. При этом используются некоторые общие результаты математической теории негауссовых случайных блужданий (см. [36, 37, 40]). Этот раздел теории вероятностей мало известен физикам. Знакомство с ним полезно для рассматриваемой темы.

I. Запишем  $X\Phi$  блуждания  $\Delta Q(t)$  в виде

$$\langle e^{iu\Delta Q(t)} \rangle \equiv e^{tD_t(iu)}, \quad (3.12)$$

стандартном для блужданий с независимыми приращениями [36].

В силу условия 1)  $\Delta Q(t)$  представляет собой блуждание с асимптотически независимыми приращениями, а в силу условия 4) эти приращения неотрицательны. Поэтому мы можем опереться на известное в теории вероятностей [36] общее представление  $X\Phi$  случайного перемещения со стационарными независимыми неотрицательными слагаемыми и написать в (12):

$$D_t(iu) = \int_0^{\infty} \frac{e^{iuq} - 1}{q} G(q; t) dq. \quad (3.13)$$

причём функция  $G \geq 0$ .

В формальной теории случайных блужданий обычно полагается, что

производная блуждания  $\frac{d\Delta Q(t)}{dt}$  является  $\delta$ -коррелированным процессом с нулевым временем корреляции  $\tau_k = 0$ . При этом вклад любого, сколь угодно малого, промежутка времени независим от вклада соседних временных интервалов. Поэтому  $X\Phi$  (12) в точности распадается на произведение  $X\Phi$  для отдельных интервалов и функции  $D_+(i\omega), G(q; t)$  не зависят от  $t$ .

Однако ввиду конечности реального времени корреляции  $\tau_k$  мы должны предусмотреть зависимость этих функций от времени наблюдения процесса  $t$ . Хотя абсолютная величина  $\tau_k$  не важна, учёт самого факта конечности  $\tau_k$  принципиально важен. Предположение  $\tau_k = 0$  означает бесконечное временное сжатие процесса и утерю возможности адекватно представить его поведение в реальном масштабе времени.

С другой стороны, ввиду затухания корреляций приращение  $\Delta Q(t)$  при  $t/\tau_k \rightarrow \infty$  будет разбиваться на сумму совершенно независимых шагов (событий). Поэтому асимптотически (в пределе  $t/\tau_k \rightarrow \infty$ ) функции  $D_+(i\omega), G(q; t)$  должны стремиться к независимому от  $t$  виду.

2. Используем теперь свойство масштабной инвариантности (условие 2), которое должно выполняться тем точнее, чем больше  $t/\tau_k$ . Посмотрим сначала, к чему оно ведет, если выполняется формально строго. Тогда из (1), (2) имеем

$$e^{\lambda t} D_{\lambda t}(i\omega) = \langle e^{i\omega \Delta Q(\lambda t)} \rangle = \langle e^{i\omega \lambda \Delta Q(t)} \rangle = e^{t D_+(i\omega \lambda)}; \quad (3.14)$$

$$\lambda D_{\lambda t}(i\omega) = D_+(i\omega \lambda).$$

Поставим это равенство в (13), получим

$$\lambda G(q; \lambda t) = G\left(\frac{q}{\lambda}; t\right). \quad (3.15)$$

Из этого соотношения следует, что функцию  $G(q; t)$  можно представить в виде

$$G(q; t) = \frac{1}{q} \Phi\left(\frac{q}{t}\right). \quad (3.16)$$

Формально здесь  $\Phi$  - произвольная функция. Однако асимптотическая независимость вида  $G(q; t)$  от  $t$  налагает на неё ограничение  $\Phi(0) \neq 0, \infty$ .

Кроме того, конечность кумулянтов  $\Delta Q(t)$  означает - все моменты этой функции конечны:  $\int_0^{\infty} z^k \Phi(z) dz < \infty$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ).

Учитывая, что  $\Phi(0) \neq 0$ , из (I3), (I6) получаем выражение

$$D_{\infty}(i\omega) = \int_0^{\infty} \frac{e^{i\omega q} - 1}{q^2} dq \Phi(0); \quad (3.17)$$

интеграл в котором логарифмически расходится на нижнем пределе. Эта расходимость - следствие предположенной строгой масштабной инвариантности. Она ведет к отсутствию какого-либо минимального масштаба у приращений  $\Delta Q$ . В действительности всегда существует естественный физический масштаб приращений, связанный с  $\tau_k$  и типичным "элементарным" актом переноса. Обозначим его через  $q_0$ . При  $q \lesssim q_0$  соотношения (I5), (I6) нарушаются, а функция  $G(q; t)$  ведет себя так, что интеграл по  $q$  сходится.

Нас интересуют большие интервалы времени  $t \gg \tau_k$  и, соответственно, большие по сравнению с  $q_0$  приращения. Поэтому достаточно рассматривать (I2), (I3) при  $|u| \ll \frac{1}{q_0}$ . Поскольку же детали поведения  $G(q; t)$  в области  $q \lesssim q_0$  не влияют на вид функции  $D_{\pm}(i\omega)$  в области малых  $|u|$ , то учесть нарушение инвариантности на малых масштабах можно, просто обрезав интегрирование по  $q$  в (I3), (I7) при  $q = q_0$ . Из (I7) тогда находим (для  $|u| q_0 \ll 1$ )

$$D_{\infty}(i\omega) = \int_{q_0}^{\infty} \frac{e^{i\omega q} - 1}{q^2} dq \Phi(0) = -i\omega \ln(-i\omega q_0 C') \Phi(0), \quad (3.18)$$

где  $C'$  - константа.

Сравнивая (I2), (I8) с (7), видим, что при  $t/\tau_k \rightarrow \infty$  распределение  $\Delta Q$  стремится к распределению типа Коши. Однако выражения (I7), (I8) не учитывают условия эргодичности 3) и поэтому не вполне правильны. Условие 3) должно использоваться до перехода к пределу.

3. Рассмотрим  $X\Phi$  скорости перемещения  $J(t) \equiv \frac{\Delta Q(t)}{t}$  на интервале  $t$ . Заменяя в (I2) и последующих формулах  $i\omega$  на  $i\omega \frac{t}{t}$ , получим из (I3), (I6), с учетом обрезания,

$$\langle e^{i\omega J(t)} \rangle = \exp \left\{ \int_{q_0/t}^{\infty} \frac{e^{i\omega y} - 1}{y^2} \Phi(y) dy \right\}. \quad (3.19)$$

Условие эргодичности требует, чтобы при  $t/\tau_k \rightarrow \infty$   $X\Phi$  (I9) стремилась

к  $X\Phi$  постоянной величины  $\bar{J}$ , т.е. к  $e^{i\omega t}$ . Легко видеть, что для этого величина  $\Phi(\omega)$  должна быть логарифмически убывающей функцией  $t$ : т.к. интеграл в (19) ведет себя как  $i\omega \ln t$ , то должно быть

$$\Phi(\omega) = \frac{\bar{J}}{\ln t} \quad (3.20)$$

Таким образом, вследствие нарушения масштабной инвариантности (15) (на малых масштабах) фигурирующая в (16) функция приобретает дополнительную логарифмическую зависимость от  $t$ . Однако такая зависимость не нарушает, по существу, инвариантности на больших масштабах.

Заметим, что к (20) можно прийти также просто из требования конечности и постоянства (независимости от  $t$ ) усредненной по ансамблю скорости перемещения, т.е. из требования  $\langle J(t) \rangle = \langle \frac{\Delta Q(t)}{t} \rangle = \bar{J}$ . Действительно, из (19) имеем

$$\langle J(t) \rangle = \int_{q_0}^{\infty} \Phi(\psi) \frac{d\psi}{\psi} \quad (3.21)$$

а отсюда и из  $\langle J(t) \rangle = \bar{J}$  снова следует (20). Поэтому условия  $\langle J(t) \rangle = \text{const}$  уже достаточно для эргодичности и его можно было бы с самого начала взять вместо условия 3).

Учитывая (20), представим функцию  $\Phi$  в виде

$$\Phi\left(\frac{q}{t}\right) \rightarrow \bar{J} A(t) F\left(\frac{q}{2\beta t}\right) \quad (3.22)$$

где  $F(0) = 1$ , а дополнительная зависимость от времени перенесена на множитель  $A(t)$ . Фактор  $\beta$  делает комбинацию  $\frac{q}{2\beta t}$  безразмерной. Его можно выбрать так, чтобы выполнялось равенство

$$\int_0^{\infty} F(z) dz = 1 \quad (3.23)$$

4. Теперь все четыре условия выполнены. Собирая формулы (13), (16), (22) и учитывая обрезание, получаем окончательно следующее выражение для логарифма  $X\Phi$  (13):

$$D_+(i\omega) = \bar{J} A(t) \int_{q_0}^{\infty} (e^{i\omega q} - 1) F\left(\frac{q}{2\beta t}\right) \frac{dq}{q^2} \quad (3.24)$$

Здесь  $F(0) = 1$ ,  $A(t)$  определяется из требования  $\langle \Delta Q(t) \rangle = \bar{J} t$ :

$$A(t) = \left[ \int_{q_0}^{\infty} F\left(\frac{q}{2\delta t}\right) \frac{dq}{q} \right]^{-1}. \quad (3.25)$$

Введем временной масштаб  $\tau_0 \equiv \frac{q_0}{2\delta}$ . При  $t \gg \tau_0$  из (25) с учетом (23) имеем

$$A(t) = \frac{1}{\ln(t/\tau_0)}. \quad (3.26)$$

Величина  $\tau_0$  определяет условие перехода (условие  $t \geq \tau_0$ ) к масштабно-инвариантному поведению  $\Delta Q(t)$ . Очевидно, что  $\tau_0 \geq \tau_k$ .

Функция  $F(Z)$  неотрицательна и имеет конечные моменты, а в остальном ее вид исходными требованиями не ограничивается (он определяется спецификой системы).  $F(Z)$  несет информацию о величине второго и высших кумулянтов  $\Delta Q$  и  $J$ . Однако временное поведение кумулянтов не зависит от ее формы.

5. При выводе (24) величина  $A(t)$  появляется как своего рода нормировочный фактор. Она служит для нормировки суммы вкладов от всех возможных реализаций перемещения  $\Delta Q(t)$  на условие  $\langle \Delta Q(t) \rangle = \bar{J}t$ , где  $\bar{J} = \text{const}$ . Обсудим статистический смысл этого фактора.

В силу (I) две случайные реализации перемещения "расползаются" друг от друга, вообще говоря, пропорционально времени наблюдения  $t$ . Такое статистическое поведение лежит на границе между стационарностью и нестационарностью приращений. Однако, находясь в пределах конечного интервала времени, в принципе невозможно однозначно провести эту границу.

Рассматривая процесс  $\Delta Q(t)$  как процесс с нестационарными приращениями, мы получили бы, как показывает формула (2I), что усредненная по ансамблю реализаций скорость приращений логарифмически растет с ростом времени наблюдения  $t$ . Мы интерпретировали бы это как проявление характерной для нестационарных процессов черты, состоящей в том, что при увеличении времени наблюдения ансамбль обогащается реализациями нового типа. Такие реализации нельзя имитировать "стыковкой" нескольких реализаций, наблюдавшихся в экспериментах меньшей длительности.

Наш процесс обладает похожим временным поведением. Однако он физически стационарен. Описывая это поведение на языке "стационарного" статистического ансамбля, мы, тем самым, приписываем различ-

ным частям интервала наблюдения  $t$  корреляции, которых в действительности нет ни в одной конкретной реализации процесса. Эта операция полностью соответствует той реальной экспериментальной ситуации, когда наблюдатель, сталкиваясь с пропорциональным времени случайным набегом  $\Delta Q(t)$ , трактует его как следствие длительных корреляций тока  $I(t) = \frac{d\Delta Q(t)}{dt}$ . Корреляции здесь вносятся задним числом, после установления факта такого сечения событий, которое привело к данному значению  $\Delta Q(t)$ .

Каждая реализация "проходит" интервал со своей средней по времени скоростью  $J(t) = \Delta Q(t) / t$ . Эта скорость является результатом накопления случайностей в течение всего интервала  $t$  и может быть найдена лишь по его окончании. Поэтому она служит характеристикой, единой для всех частей интервала, и выступает в роли источника "корреляций".

Набор реализаций у рассматриваемого процесса тот же, что и у его нестационарного аналога. Но стационарность означает, что они подчиняются другому распределению вероятностей. С ростом  $t$  в ансамбль добавляются реализации нового типа, более "медленные" (получающиеся масштабным преобразованием (I) из "старых"). Ввиду этого пополнения происходит перенормировка вероятностей, что и описывается фактором  $A(t)$ .  $A(t)$  характеризует вероятность "новых", сравнительно нетипичных, реализаций (см. далее).

6. Вернемся к  $X(t)$  (24). Ее можно упростить, введя функцию

$$\varphi(z) \equiv z \int_z^{\infty} F\left(\frac{x}{z}\right) \frac{dx}{x^2} \quad (3.27)$$

Нетрудно проверить, что

$$\varphi(0) = F(0) = 1, \quad \int_0^{\infty} \varphi(z) dz = \int_0^{\infty} F(z) dz = 1. \quad (3.28)$$

Поскольку  $F(z) \geq 0$ , то  $\frac{\varphi(z)}{z}$  — монотонно убывающая функция.

Подставляя (27) в (24) и используя (25), после интегрирования по частям получим

$$D_{\pm}(i\nu) = i\nu \bar{J} + i\nu \bar{J} A(t) \int_{q_0}^{\infty} \frac{e^{-i\nu q} - 1}{q} \varphi\left(\frac{q}{\delta t}\right) dq. \quad (3.29)$$

В нижнем пределе интеграла здесь можно устремить  $q_0$  к нулю, т.к. это уже не приведет к расходимости. Заметим, что вследствие

такого упрощения соответствующее (12) вероятностное распределение  $\Delta Q$  начинает заходить в отрицательную область. Однако нетрудно показать, что нефизические отрицательные значения  $\Delta Q$  имеют ничтожно малую вероятность (см. ниже). Поэтому без ущерба для правдивости выводов можно использовать представление

$$D_{\pm}(i\omega) = i\omega \bar{J} + i\omega \bar{J} A(t) \int_0^{\infty} \frac{e^{i\omega q} - 1}{q} \varphi\left(\frac{q}{Bt}\right) dq \quad (3.30)$$

с условиями (28).

7. Для кумулянтов перемещения из (12), (30), (28) получаем

$$\langle \Delta Q, \Delta Q \rangle = 2\bar{J} B t^2 A(t), \quad (3.31)$$

$$\langle \Delta Q^{(n)} \rangle = t^n n \bar{J} B^{n-1} A(t) \int_0^{\infty} Z^{n-2} \varphi(Z) dZ. \quad (3.32)$$

Дисперсия  $\Delta Q$  зависит, помимо среднего тока  $\bar{J}$ , также от параметра  $B = \frac{q_0}{2T_p}$ . Этот параметр характеризует скорость рождения "лишних" событий (см. разд. 2). Величина  $B$  определяется микроскопическими процессами, происходящими в пределах времени корреляции  $T_k$ .

Заметим также, что  $B$  относится к "элементарной" независимой шумящей подсистеме. Действительно, если мы включим параллельно два одинаковых, независимых друг от друга, контакта, то  $D_{\pm}(i\omega)$  в (12) умножится в два раза (поскольку характеристическая функция  $\chi_{\Phi}$  суммы независимых случайных величин равна произведению их  $\chi_{\Phi}$ ). При этом  $\bar{J}$  возрастет в (30)-(32) вдвое, тогда как параметр  $B$  останется прежним.

Если система состоит из  $N$  независимых, статистически идентичных, источников шума (дающих аддитивные вклады в  $\Delta Q$ ), то можно перейти<sup>\*</sup> от  $\chi_{\Phi}$  полной системы к  $\chi_{\Phi}$  одной из ее  $N$  частей делением (30) на  $N$ :

$$\langle e^{i\omega \Delta q(t)} \rangle^N = \langle e^{i\omega \Delta Q(t)} \rangle, \quad (3.33)$$

где  $\Delta q(t)$  относится к отдельной части ( $\Delta Q = \sum_{j=1}^N \Delta q_j$ ). Параметр  $B$

\* Отметим, что по построению  $\chi_{\Phi}$  (12), (30) относится к классу  $\chi_{\Phi}$  безгранично делимых случайных величин. Поэтому функция  $\langle e^{i\omega \Delta Q} \rangle$  при любом  $N$  также является  $\chi_{\Phi}$  (см., например, [36]).



при этом также не затрагивается.

В действительности, как подчеркивалось во Введении, между частями системы, даже если они некоррелированы в обычном смысле, может иметься зависимость, запятанная глубже, в корреляторы (кумулянты) высшего порядка. В таком случае  $\langle \Delta Q, \Delta Q \rangle \sim N$ , но кумулянте (32) с достаточно большим номером  $n$  зависят от  $N$  гораздо сильнее (вплоть до  $\sim N^n$ ). При этом функция  $\Psi(z)$  имеет очень большие моменты высоких порядков.

Из мыслимого разнообразия ситуаций нас будут интересовать две наиболее интересные и простые. Одна — когда  $N \gg 1$  подсистем можно считать независимыми, другая — когда они, напротив, настолько зависимы, что эффективное число  $N \sim 1$ . В том и другом случае функция  $\Psi(z)$  в (30), (32) имеет только один характерный масштаб изменения: порядка единицы. При этом ее детали не существенны для статистических характеристик шума. Поэтому целесообразно сделать простой выбор, например,  $\Psi(z) = e^{-z}$ . Из (30) тогда получаем

$$D_{\pm}(i\omega) = i\omega \bar{J} - i\omega \bar{J} A(t) \ln(1 - i\omega \beta t). \quad (3.34)$$

Эта простая ХФ передает основные и универсальные черты статистики переноса и  $1/f$ -шума.

8. Величину  $A(t)$  следует рассматривать как малый параметр. Уже при  $\frac{t}{\tau_0} \sim 10^3$  она достаточно мала,  $A(t) \approx 0.15$ . С учетом этого обстоятельства напрашивается следующая модификация ХФ (34):

$$D_{\pm}(i\omega) = i\omega \bar{J} (1 - i\omega \beta t)^{-A(t)} \quad (3.35)$$

ХФ (34) представляет собой первые два члена разложения этого выражения в ряд по  $A(t)$ .

К ХФ вида (35) наш анализ приводит, если от расхожимости в (17) избавиться несколько иным способом: а именно, можно допустить обращение функции  $\Phi(\frac{q}{t})$  в (16) в нуль при  $q \rightarrow 0$ , если при этом выбрать ее в виде

$$\Phi(\frac{q}{t}) = \bar{J} C (\frac{q}{2\beta t})^A F(\frac{q}{2\beta t}); \quad F(0) \neq 0; \quad (3.36)$$

и потребовать такой зависимости  $A$  от  $t$ , чтобы предел этой функции при  $t \rightarrow \infty$  являлся конечным. Это другой способ слабого нарушения масштабной инвариантности, который также позволяет совме-

стить инвариантность с требованиями асимптотической независимости и стационарности приращений и требованием эргодичности. Из независимости приращений имеем

$$\Phi\left(\frac{q}{t}\right) \rightarrow \text{const}; \left(\frac{q}{\beta t}\right)^{A(t)} \rightarrow \text{const} \text{ при } t \rightarrow \infty;$$

отсюда  $A(t) \sim (\ln \frac{t}{\tau_0})^{-1}$  с некоторым  $\tau_0$ . Обрезание при малых  $q$  здесь не нужно.

$$\text{Условие } \langle \Delta Q \rangle = \bar{J} t, \bar{J} = \text{const}, \text{ даст тогда } G = \left( \int_0^{\infty} z^{-1+A} F(z) dz \right)^{-1}.$$

Введя затем функцию  $\Psi(z)$  подобно тому, как это было сделано выше, нетрудно прийти к ХФ (35).

Вероятностные распределения  $\Delta Q$  и  $J = \frac{\Delta Q}{t}$ , отвечающие ХФ (34) и ХФ (35), в качественном плане тождественны. Ввиду малости  $A(t)$  они практически эквивалентны и в количественном отношении. Однако ХФ (35) предпочтительней в том смысле, что соответствующее ей распределение  $\Delta Q$  и  $J$  сосредоточено, в отличие от распределения, отвечающего (34), строго на положительной полуоси. Действительно, для такого распределения при любом  $\lambda > 0$  должно быть  $\langle e^{-\lambda \Delta Q} \rangle < 1$ , т.е.  $D_{\pm}(-\lambda) < 0$ . Очевидно, функция (35) удовлетворяет этому условию, тогда, как (34) нарушает его при достаточно большом  $\lambda$ . Поэтому более общее выражение (35) несколько правильней описывает вероятности малых, сравнительно с  $\langle \Delta Q \rangle$  и  $\bar{J}$ , значений  $\Delta Q$  и  $J$ .

9. Для того, чтобы получить ХФ диссипативного тока (средней по времени частоты событий), надо заменить в (12) и (34) либо (35)  $i\omega$  на  $\frac{i\omega}{t}$ :

$$\langle e^{i\omega J(t)} \rangle = \exp\{i\omega \bar{J} - i\omega \bar{J} A(t) \ln(1 - i\omega \beta)\} \quad (3.37)$$

либо

$$\langle e^{i\omega J(t)} \rangle = \exp\{i\omega \bar{J} (1 - i\omega \beta)^{-A(t)}\} \quad (3.38)$$

Обозначим через  $W_t(J)$  плотность вероятностного распределения  $J(t)$ :

$$W_t(J) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega J} \langle e^{i\omega J(t)} \rangle d\omega.$$

Сравнение (37), (38) с (7), (8) показывает, что слева от  $\bar{J}$ , при  $J \ll \bar{J}, \beta$   $W_t$  ведет себя как плотность асимметричного распределе-

ния Коши или, точнее (согласно (38)), как плотность асимметричного устойчивого распределения с показателем  $1 - A(t)$ . В то же время характерный для этих распределений бесконечный степенной хвост справа (см. (I0), (II)) "обрезается". Степень обрезания, как нетрудно видеть из (37), (38), определяется параметром  $V/\bar{J}$ . Это обрезание обеспечивает конечность статистических моментов  $\Delta Q(t)$  и  $J(t)$ .

Таким образом, наш процесс  $\Delta Q(t)$  представляет собой блуждание, у которого случайный шаг (или, другими словами, стглаженная по времени скорость) подчиняется "обрезанному" справа устойчивому распределению с характеристическим показателем  $\alpha = 1 - A(t) < 1$  ( $\alpha \rightarrow 1$ ). Причем этот показатель логарифмически зависит от времени наблюдения. Однако вследствие малости  $A(t)$  распределение шага близко к обрезанному распределению Коши с ХФ (37). Его мы преимущественно и будем рассматривать.

### 3.4. Различие между наиболее вероятными и среднестатистическими характеристиками $1/f$ -шума

I. Формула (31) конкретизирует соотношение (2.10):

$$\frac{\langle \Delta Q, \Delta Q \rangle}{\langle \Delta Q \rangle^2} = \frac{2\beta}{\bar{J}} A(t) \approx \frac{2\beta}{\bar{J}} (\ln \frac{t}{\tau_0})^{-1}. \quad (3.39)$$

Интерпретируя (39) как результат "низкочастотных флуктуаций текущей скорости переноса", можно написать

$$\frac{\langle \Delta Q(t), \Delta Q(t) \rangle}{\bar{J}^2} = \iint_0^t K(t_1 - t_2) dt_1 dt_2. \quad (3.40)$$

где  $K(\tau)$  играет роль корреляционной функции относительных флуктуаций. Из (31), (40) имеем (учитывая, что  $A(t) \ll 1$ )

$$K(\tau) = \frac{1}{2} \frac{d^2}{d\tau^2} \frac{\langle \Delta Q(\tau), \Delta Q(\tau) \rangle}{\bar{J}^2} \approx \frac{2\beta}{\bar{J}} A(\tau). \quad (3.41)$$

Соответствующий спектр

$$S_{\Delta Q}(\omega) \equiv 4 \int_0^{\infty} K(\tau) \cos \omega \tau d\tau \approx \frac{2\pi}{\omega} \frac{2\beta}{\bar{J}} (\ln \omega \tau_0)^{-2} \quad (3.42)$$

при  $\omega \tau_0 \ll 1$ . Отметим, что подстановка в (41) выражения (2.8) для пуассоновского потока, при котором  $\langle \Delta Q, \Delta Q \rangle \sim t$ , даст  $K(\tau) = 0$ .

Для коэффициента эксцесса из (32), (34) получаем

$$\langle \Delta Q^{(4)} \rangle = 8 \bar{J} \beta^3 A(t) t^4 \kappa$$

$$\frac{\langle \Delta Q, \Delta Q, \Delta Q, \Delta Q \rangle}{\langle \Delta Q, \Delta Q \rangle^2} = \frac{2\beta}{\bar{J} A(t)} = \frac{2\beta}{\bar{J}} \ln \frac{t}{\tau_0}, \quad (3.43)$$

вместо (2.9) для пуассоновского потока.

Таким образом, хотя с ростом  $t$  распределение  $J(t)$  постепенно сжимается, как видно из (37), (38), в  $\delta$ -функцию, коэффициент эксцесса при этом не уменьшается, а, наоборот, логарифмически растет. Негауссовость  $W_t(J)$  усиливается при увеличении времени усреднения.

2. Пусть имеется  $N$  независимо шумящих подсистем, так что  $\bar{J} = N \bar{j}$ , где  $j(t)$  - скорость переноса в отдельной подсистеме,  $\bar{j} = \langle j(t) \rangle$ . Тогда из (33), (37) имеем

$$\langle e^{i\omega j(t)} \rangle = \exp\{i\omega \bar{j} - i\omega \bar{j} A(t) \ln(1 - i\omega \beta)\}. \quad (3.44)$$

Вероятностные характеристики  $1/f$ -шума существенно зависят от параметра (коэффициента эксцесса)

$$\alpha \varepsilon = \alpha \varepsilon(t) \equiv \frac{\beta}{\bar{j} A(t)}$$

и величины  $N$ . Согласно (43), коэффициент эксцесса для совокупного шума равен  $\frac{2\alpha \varepsilon}{N}$ . При  $N \gg 1$  этот фактор мал и распределение  $J(t)$  очень близко к гауссовскому. Оно обладает слабой асимметрией и деформировано (по сравнению с гауссовым) на хвостах, но признаки, присущие распределению Коши, при  $N \gg 1$  стираются.

Однако эта тривиальная нормализация не имеет отношения к истинной статистике  $1/f$ -шума, которая проявляется во временном поведении отдельной подсистемы. Статистика отдельной подсистемы зависит от параметра  $\alpha \varepsilon = \beta/\bar{j} A(t)$ , и ее негауссовость определяется величиной  $\beta/\bar{j}$ . Но эта же величина определяет, как следует из (42), уровень  $1/f$ -шума. Таким образом,  $1/f$ -шум велик именно в той мере, в какой он негауссов.

Поэтому для того, чтобы лучше понять происхождение спектрально-временных свойств  $1/f$ -шума, целесообразно рассмотреть малую подсистему, в которой негауссовость явно выражена. Такой случай ре-

ализуется при  $\varepsilon \geq 1$ .

Запишем (42) в виде  $S_{\text{ш}}(\omega) = \frac{2\pi}{\omega N} \alpha$ , где  $\alpha$  — "константа Хоухе",

$$\alpha = \frac{2\beta}{\bar{b}} (\ln \omega \tau_0)^{-2} = 2\varepsilon A(t) (\ln \omega \tau_0)^{-2}.$$

При типичных для практики числах  $\ln \frac{t}{\tau_0} = \ln \frac{1}{\omega \tau_0} \sim 20 + 30$ .

Условие существенно негауссова шума  $\varepsilon \geq 1$  отвечает условие на константу Хоухе  $\alpha \geq 10^{-4}$  (захватывающее "стандартный" уровень  $\sim 10^{-3}$ ).

3. Рассмотрим вероятностное распределение  $\dot{b}(t)$ :

$$W_t(\dot{b}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega \dot{b}} \langle e^{i\omega \dot{b}(t)} \rangle d\omega. \quad (3.45)$$

Обозначим через  $b_0$  наиболее вероятное значение  $\dot{b}(t)$ . Ему отвечает максимум плотности вероятности  $W_t(\dot{b})$ .

Из (45), (44) после несложных преобразований имеем

$$W_t(\dot{b}) = \frac{1}{\bar{b} A} U\left(\frac{\dot{b} - b_0}{\bar{b} A}\right), \quad (3.46)$$

где функция  $U(x)$  определяется интегралом Фурье:

$$U(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-y \arctg \varepsilon y} \cos \left\{ x y + y \ln \sqrt{1 + \varepsilon^2 y^2} - \frac{\bar{b} - b_0}{\bar{b}} y \right\} dy \quad (3.47)$$

По определению  $U(x)$  ее максимум находится в точке  $x = 0$ , поэтому из (47) получаем следующее уравнение для  $b_0$ :

$$U'(0) = 0,$$

$$\int_0^{\infty} y e^{-y \arctg \varepsilon y} \sin \left\{ y \ln \sqrt{1 + \varepsilon^2 y^2} - \frac{\bar{b} - b_0}{\bar{b}} y \right\} dy = 0. \quad (3.48)$$

Нетрудно увидеть, что при  $\varepsilon \gg 1$  ( $\varepsilon \rightarrow \infty$ )

$$\bar{b} - b_0 = \bar{b} A(t) (\ln \varepsilon + C), \quad (3.49)$$

где константа  $C$  удовлетворяет уравнению

$$\int_0^{\infty} y e^{-\frac{\pi}{2} y} \sin(y \ln y - C y) dy = 0; \quad (3.50)$$

(приблизительно она будет равна 0,25). Следовательно,

$$b_0 \approx \bar{b} \left\{ 1 - A(t) \ln \frac{b e^c}{\bar{b} A(t)} \right\}. \quad (3.51)$$

Оценим также величину плотности в наиболее вероятной точке при  $\bar{\alpha} \geq 1$ :

$$U(0) \approx \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\frac{\pi}{2} y} \cos(y \ln y - cy) dy.$$

Основной вклад в этот интеграл дает область, где  $\cos(y \ln y - cy)$  не осциллирует. Поэтому с небольшой ошибкой (завышением  $U(0)$ ) можно заменить его на единицу:  $U(0) \approx \frac{2}{\pi^2}$  и тогда

$$W_t(b_0) \approx \frac{2}{\pi^2 \bar{b} A(t)}. \quad (3.52)$$

При  $\bar{\alpha} \gg 1$  ( $\bar{\alpha} \rightarrow \infty$ ) плотность (47) принимает вид

$$U(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\frac{\pi}{2} y} \cos(xy + y \ln y - cy) dy, \quad (3.53)$$

где  $C$  определена (50), и сводится к "идеальному" максимально асимметричному распределению Коши с  $X_0$

$$\langle e^{iwx} \rangle = \exp \{ iwc - iw \ln(-iw) \}. \quad (3.54)$$

На рис. 3 приведен рассчитанный на ЭМ график этой плотности (см. также [37]).

4. Согласно (49), наиболее вероятное значение  $b_0$  скорости переноса  $b(t)$  всегда меньше ее среднего значения, причем разница  $b_0$  и  $\bar{b}$  логарифмически медленно убывает с ростом времени усреднения.

Из неотрицательности всех кумулянтов (32) понятно, что неравенство  $b_0 < \bar{b}$  имеет место всегда, хотя в случае  $\bar{\alpha} \ll 1$  (или для полного тока  $J(t)$  при  $N \gg 1$ ) различие между  $b_0$  и  $\bar{b}$  ( $J_0$  и  $\bar{J}$ ) мало. Легко показать, что при  $\bar{\alpha} \ll 1$  и  $\frac{\bar{\alpha} c}{N} \ll 1$  соответственно

$$b_0 \approx \bar{b} - \frac{3}{4} b; \quad J_0 \approx \bar{J} - \frac{3}{4} b. \quad (3.55)$$

Таким образом, относительное различие среднего и наиболее вероятного значения для системы в целом примерно составляет  $b/\bar{b} = b/\bar{N} b$ , т.е. мало в той же степени, что и уровень (42) относительных  $1/f$ -флук-

$$U(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\frac{\pi}{2} y} \cos(xy + y \ln y - cy) dy$$

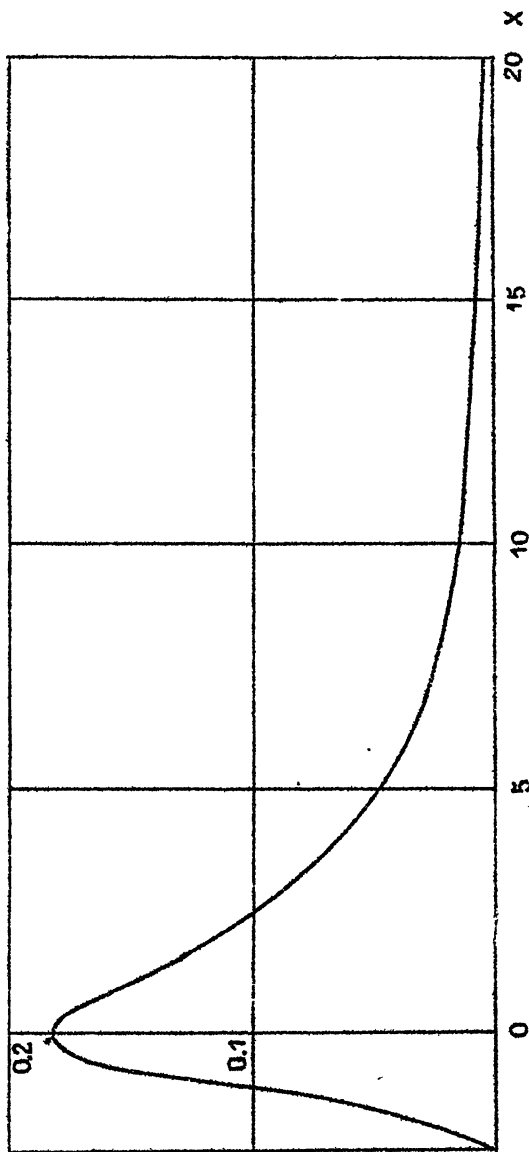


Рис. 3. Плотность стандартного (массива) не асимметричного) распределения Коши

туаций тока.

Приведем численный пример, взяв  $\tau_0 \sim 10^{-10}$  с,  $t \sim 1$  с,  $\frac{b}{\bar{b}} \sim 1$ . Тогда на частоте  $\sim 0,1$  Гц для спектра относительных флуктуаций получаем из (42) оценку  $S_{\delta b}(\omega) = N S_{\delta J}(\omega) \sim \frac{2\pi}{\omega} 4 \cdot 10^{-8}$  (что отвечает "константе Хоухе"  $\sim 10^{-8}$ ). При этом  $A \approx 0,04$  и из (51)

имеем  $\bar{b} - b_0 / \bar{b} \approx 4 A(t) \approx 0,16$ , т.е. вполне ощутимую величину.

Если (в примере с контактом) независимый акт переноса заключается в переходе одного электрона, то в качестве  $q_0$  следует взять элементарный заряд. Предположим, что отдельная автономно шумящая часть контакта пропускает одновременно не более одного электрона. Тогда  $\bar{b} \leq q_0 / \tau_k$ . Поскольку  $b \sim q_0 / \tau_0$ , то при  $\tau_0 \approx \tau_k$  получаем  $b/\bar{b} \geq 1$ ,  $\alpha \approx 25$ . Следовательно, эксперимент с малой системой, пропускающей электроны "поодиночке", мог бы, в принципе, наглядно продемонстрировать как разницу  $\bar{b}$  и  $b_0$ , так и другие вероятностные характеристики совершенно случайного потока событий (хотя более реально экспериментальное изучение статистики подвижности [39]).

### 3.5. Вероятностное распределение $1/f$ - шума

I. Рассмотрим плотность вероятности подробнее (снова считая  $\alpha \gg 1$ ). В области  $b \gg \bar{b}$  можно воспользоваться тауберовыми теоремами (см., например, [36]) и написать

$$W_t(b) \approx -\bar{b} A(t) \frac{\partial}{\partial b} \frac{1}{2} \varphi\left(\frac{b}{\bar{b}}\right) = \bar{b} \frac{A(t)}{b^2} F\left(\frac{b}{\bar{b}}\right), \quad (3.56)$$

или в случае (44), (45)

$$\begin{aligned} W_t(b) &\approx -\bar{b} A(t) \int_{-\infty}^{\infty} i\omega \ln(1-i\omega b) e^{-i\omega b} \frac{d\omega}{2\pi} = \\ &= -\bar{b} A(t) \frac{\partial}{\partial b} \frac{1}{b} \exp\left(-\frac{b}{\bar{b}}\right). \end{aligned} \quad (3.57)$$

При  $b \rightarrow \infty$  это выражение становится точным.

Таким образом, справа от  $b_0$  лежит квадратичный хвост, тянущийся примерно до  $b \sim b$ . Согласно (41), (42), уровень шума прямо пропорционален расстоянию  $b$ , на котором происходит обрезание хвоста. В то же время величина  $b$  (если она уже достаточно велика,  $b \geq \bar{b}$ ) незначительна для наиболее вероятного поведения  $b(t)$  и основных вероятностных характеристик шума. Действительно, хвост



(57) интегрируем даже при  $\beta = \infty$ . Поэтому вероятность далеких уходов  $h(t)$  от наиболее вероятного значения остается малой при увеличении параметра  $\beta \rightarrow \infty$ , когда уровень  $1/f$  - шума неограниченно возрастает.

Отсюда следует вывод, что  $1/f$  - шум порождается в основном наиболее нетипичными реализациями, хотя вероятность их мала при сколь угодно высоком уровне шума.

2. Рассмотрим поведение  $W_t(h)$  в области слева от  $h_0$ . Замена в (38)  $\bar{h}$  на  $\bar{h}$  и учитывая, что при  $h \ll h_0$  в (45) наиболее важна область  $|U\beta| \gg 1$ , можно воспользоваться формулой (10). Учитывая также, что  $A(t) \ll 1$ , при  $h \ll h_0$  имеем

$$W_t(h) = \frac{1}{h\sqrt{2\pi A}} \left(\frac{\bar{h}}{h}\right)^{1/2A} \exp\left\{-A\left(\frac{\bar{h}}{h}\right)^{1/A}\right\}. \quad (3.58)$$

Таким образом, слева от максимума плотность чрезвычайно быстро стремится к нулю, так что на графике  $W_t(h)$  образуется крутая (если учесть типичную величину  $\frac{1}{A} \sim 20$ ) "стенка". Эта особенность асимметричных устойчивых распределений хорошо видна на рисунках, приведенных в [37], причем она тем ярче выражена, чем ближе показатель  $\alpha$  к единице.

К аналогичному результату приводит ХФ (37), (44). Из (44), используя (II), можно получить

$$U(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{x}{\pi} - e^{-\frac{2x}{\pi}}\right\} \quad \text{при } x \lesssim -1, \quad (3.59)$$

что, как видно из (46), также приводит к "стенке". Она находится на расстоянии примерно  $\bar{h} A(t)$  от  $h_0$ .

Хотя ХФ (44) допускает  $h < 0$ , этот ее формальный недостаток несуществен. При  $h \rightarrow 0$ , как видно из (46), (59),  $(-x) \sim \frac{1}{A}$ , где  $\frac{1}{A} \sim 20$ , и вероятность отрицательных значений  $\sim \exp\{-\exp(2/\pi A)\}$  ничтожно мала.

3. Формулы (57)–(59) указывают на сильную асимметрию распределения  $h(t)$ : уходы от наиболее вероятного значения  $h_0$  совершаются преимущественно в одну сторону.

Разница  $h_0$  и  $\bar{h}$  также является результатом уходов, причем в значительной мере обязана наиболее нетипичным реализациям. Действительно –

вительно, в отсутствие обрезания ( $\beta \rightarrow \infty$ ) усреднение с бесконечным квадратичным хвостом (57) дало бы логарифмическую расходимость среднего.

Это обстоятельство облегчает понимание того, почему в процессе переноса нет самоусреднения по времени. Среднее значение скорости переноса  $\bar{v}$  здесь не является физически естественной точкой отсчета для флуктуаций, потому что оно само складывается из нетипичных реализаций. Естественная точка отсчета — это наиболее вероятная скорость  $v_0$ . Но отклонения от нее почти всегда направлены в одну сторону и поэтому не компенсируют друг друга, а накапливаются.

Данные особенности вероятностного распределения  $W_{\pm}(v)$  должны быть свойственны любой кинетической (спектральной) характеристике, в том числе, например, коэффициенту диффузии броуновской частицы (электрона проводимости). Эти особенности имеют простое и общее физическое объяснение, которое можно сделать прозрачным на примере коэффициента диффузии.

Разделим мысленно систему на непосредственно "шумящую" часть (например, электрон) и термостат, называющий данной подсистеме случайно-необратимое поведение. Взаимодействие с термостатом приводит к некоторой конечной величине  $D_0$  наиболее вероятного коэффициента диффузии. Однако имеющиеся вследствие этого же взаимодействия с термостатом вариации текущего коэффициента диффузии  $D$  неравноправны по отношению к знаку  $D - D_0$ . Для того, чтобы текущий коэффициент диффузии оказался меньше  $D_0$ , нужна продолжительная (в течение времени наблюдения  $t \gg \tau_k$ ) взаимная нейтрализация случайных "толчков" со стороны термостата. Это очень маловероятно. Зато любая раскомпенсация естественно сделает текущий коэффициент диффузии больше  $D_0$ . Таким образом, обе характерные особенности распределения  $D$  — и хвост справа от  $D_0$ , и стенка слева — имеют общее статистическое происхождение.

Дело, попросту говоря, в том, что для усиленного торможения частицы со стороны термостата требуются специальные "усилия" (удачное стечение обстоятельств), тогда как ускорение частицы получается само собой (это можно мысленно смоделировать, заменив электрон футбольным мячом, а термостат — массой футболистов, играющих каждый сам за себя). Заметим, что чисто обратимому движению отвечает (формально) бесконечная скорость переноса. Можно поэтому сказать,

что флуктуации текущей скорости переноса происходят в основном " в пользу обратимости". В принципе так же обстоит дело с другими кинетическими величинами.

4. В целом распределение  $W_+(z), U(x)$  очень трудно поддается аналитическому приближению (как и вообще плотности устойчивого типа [36,37]).

Заметим, что поведение  $W_+(z)$  в центральной области ( $0 < z - z_0 \lesssim B$ ), т.е. в области  $0 < x \lesssim \alpha z$  ( $x \equiv \frac{z - z_0}{\sqrt{2}A}$ ) мало чувствительно к величине  $\alpha z$ , если  $\alpha z \gg 1$ . Поэтому здесь допустимо использовать формулу (53), т.е. аппроксимировать (46) плотностью "идеального" распределения Коши ( $\alpha z = \infty$ ).

Для плотности  $W(Z)$  безразмерной величины  $Z \equiv z/z_0$  тогда имеем

$$W(Z) = \frac{z_0}{\sqrt{2}A} U\left(\frac{z_0}{\sqrt{2}A}(Z-1)\right). \quad (3.60)$$

где  $U(x)$  равна (53), (63). Это распределение зависит лишь от одного параметра - ширины  $z_0/\sqrt{2}A$ . Чем больше этот параметр, тем выше и уже пик плотности  $W(Z)$  и меньше амплитуда хвоста.

Ввиду малости  $A$  условие  $\alpha z \gg 1$  выполняется уже при  $\frac{B}{\sqrt{2}} \gtrsim 1$ . При этом центральная область приблизительно в  $\alpha z$  раз шире пика и, как оказывается (см. ниже), захватывает практически существенные значения  $z$ . Следовательно, при условии  $B/\sqrt{2} \gtrsim 1$  вид плотности  $W_+(z)$  практически не зависит от  $B$  и справа от  $z_0$  хорошо передается плотностью Коши.

5. Перейдем к другому интегральному представлению плотности Коши (53), повернув в (45) контур интегрирования на комплексной плоскости  $iz$ :

$$U(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \sin \pi z \cdot e^{-xz + z(c - \ln z)} dz \quad (3.61)$$

Для  $x \gg 1$  (это соответствует  $z - z_0 \gg \sqrt{2}A(t)$ ) отсюда находим следующее приближенное (но асимптотически точное) выражение:

$$U(x) = \frac{1}{\pi^2 + (x - \ln x)^2} \quad (3.62)$$

Параметр  $A(t)$  непосредственно определяет ширину и высоту пика плотности, а также, согласно (57), амплитуду хвоста.

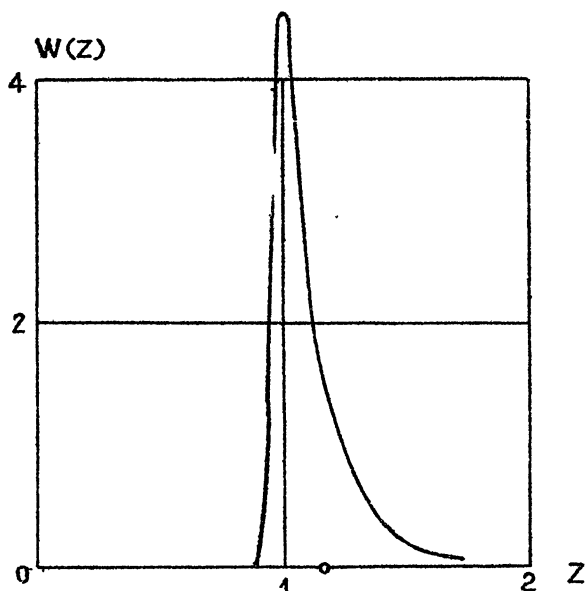


Рис. 4. Плотность распределения  $Z = \bar{b}/b_0$  при  $A(t) = 1/30$  ( $\frac{t}{t_0} \sim 10^{13}$ ) и  $\bar{b}/\bar{b}_0 = 1$ . "Константа Хоухе" приблизительно равна  $2 \cdot 10^{-3}$ . Отмечено значение  $\frac{\bar{b}}{b_0} \approx 1,16$

Учесть обрезание можно с помощью формулы (57). На рис.4 показано, как выглядит плотность распределения безразмерной величины  $Z \equiv \bar{b}/b_0$  при  $A(t) = 30$  (чему отвечает  $\frac{t}{t_0} \sim 10^{13}$ ) и  $\bar{b}/\bar{b}_0 = 1$  ( $\bar{\epsilon} = 30$ ). Соответствующая ему "константа Хоухе" (см. выше) приблизительно равна  $2 \cdot 10^{-3}$ . При данных параметрах  $\bar{b}/b_0 \approx 1,16$ .

При  $\bar{b} \geq \bar{b}_0$  из (62), (46), (57) и (51) для вероятности того, что  $b > \bar{b}$ , имеем оценку

$$\mathcal{P}\{b > \bar{b}\} \approx \frac{1}{\pi} \arctg\left(\frac{\pi}{\ln \bar{\epsilon}}\right), \quad (3.63)$$

и для вероятности того, что  $b > 2\bar{b}$ ,

$$\mathcal{P}\{b > 2\bar{b}\} = A(t) \exp\left(-\frac{b}{\bar{b}}\right). \quad (3.64)$$

При  $b \gg \bar{b}$  (константе Хоухе  $\gg 10^{-4}$ ) вероятность больших уходов  $b(t)$ , в два раза или более превышающих среднее, дается просто величиной  $A(t)$ .

### 3.6. Сравнение с экспериментом Броуна

I. В экспериментах Броуна и других авторов, измерявших флуктуации текущей мощности  $1/f$  — шума (см. Введение), исследовались аномально сильно шумящие системы, у которых эффективное число  $N \sim 1 \div 10^4$ . Поскольку для относительных флуктуаций  $\mathcal{J}$  важны лишь два безразмерных параметра:  $A(t)$  и  $\frac{b}{2NA(t)} \equiv \mathcal{E}$  (коэффициент эксцесса), то можно просто включить неизвестный точно фактор  $\frac{1}{N}$  в состав параметра "  $b$  " и пользоваться прежними обозначениями. Под величиной  $b(t)$  следует теперь понимать  $b(t) = \mathcal{E}(t) \equiv \frac{1}{t} \int_{t_0}^{t_0+t} y^2(t') dt'$  — текущую спектральную мощность  $1/f$  — шума, полученную усреднением по времени квадрата выхода  $y(t')$  фильтра.

Естественным масштабом для флуктуаций  $b(t)$  служит наиболее вероятное значение  $b_0$ , поскольку оно в отличие от среднего  $\bar{b}$ , в большей мере относится к характерной реализации, чем к ансамблю реализаций, со всеми его допускаемыми потерей корреляций "патологиями". Поэтому введем безразмерную переменную  $Z \equiv b/b_0$ .

На рис. I (см. часть I) показана гистограмма вероятностного распределения  $Z = b/b_0$ , которая построена по характерной гистограмме (см. [7]), полученной примерно из 100 "пробегов", т.е. усреднений, длительностью  $t = 100$  с каждый. Она ясно демонстрирует те самые своеобразные черты, которые предсказываются изложенной выше теорией: сочетание сравнительно узкого пика с длинным хвостом и наличие следа от наиболее вероятного значения  $Z = 1$  области недоступных (очень маловероятных) значений.

Такая гистограмма должна соответствовать большой величине  $\mathcal{E}$  и достаточно слабому обрезанию, т.е. величине  $b/\bar{b} \geq 1$ . Для количественного сравнения с теорией нужно оценить параметры  $A(t)$  и  $b/\bar{b}$ . Верхний предел для  $\tau_k$  здесь — это  $2\pi/\omega_1$ , где  $\omega_1$  — нижняя частота

полосового фильтра. Взяв для оценки  $\tau_k$  эту величину,  $\tau_k \sim 0,1c$  и считая  $\tau_0 \sim \tau_k$ , получим  $\frac{t}{\tau_0} \sim 10^3$  и  $A(t) = (0,1 \frac{t}{\tau_0}) \approx 0,15$ . Величину  $\bar{b}/\bar{b}_0$  оценить сложнее. Отметим, что экспериментальные значения дисперсии  $\langle b, b \rangle$  и высших кумулянтов  $b$  плохо подходят для этой цели, т.к. определяются относительно "маловероятным хвостом" распределения. Он, как легко показать, в опытных гистограммах воспроизводится наименее точно.

Для данной гистограммы экспериментальное значение  $\frac{\bar{b}^2}{\langle b, b \rangle} \approx 2,6$  [7]. Используя теоретическое выражение  $\langle b, b \rangle = 2B\bar{b}A(t)$ , т.е.  $\frac{\bar{b}^2}{\langle b, b \rangle} = \frac{\bar{b}}{2BA(t)}$  и взяв оценку  $A(t)$ , имеем  $B \approx 1,5\bar{b}$ . Однако из вида гистограммы следует, что это несколько заниженная оценка. Взяв  $B \approx 3\bar{b}$  из (51) получаем  $\bar{b}/b_0 \approx 1,7$ , что хорошо согласуется с экспериментальной величиной для данной гистограммы. Теоретический график плотности вероятности  $W(Z)$  величин  $Z = \frac{b}{b_0}$ , соответствующий этим параметрам ( $A \approx 0,15$ ;  $\frac{B}{b_0} \approx 3$ ,  $\alpha \approx 20$ ) и построенный по (57), (60), показан на рис. 1. Имеется удовлетворительное согласие с экспериментом также и в количественном смысле<sup>ж)</sup>.

При увеличении  $A(t)$  и уменьшении  $\frac{B}{b_0}$  и  $\alpha$  форма плотности должна "скругляться", становясь при  $\alpha \leq 1$  приблизительно симметричной. Такая тенденция наблюдалась в измерениях Брофи при уменьшении времени усреднения  $t$ . Это приводит к возрастанию  $A(t)$ , а также увеличению  $\bar{b}/b_0$ .

Отметим, что полученное на опыте отношение  $\bar{b}/b_0$  уменьшается с ростом  $t$  по логарифмическому закону, в согласии с вытекающей из теории зависимостью (51). Так, в [7] при  $t = 1c, 10c, 100c$  для этого отношения (в случае угольного резистора) получены значения, примерно равные 2,3; 2; 1,7 соответственно. Две последние точки хорошо описываются формулой (51), тогда как первой — при  $t = 1c$  — отвечает  $\alpha \approx 3$ , вследствие чего применение (51) (она получена для  $\alpha \gg 1$ ) завышает  $\bar{b}/b_0$ .

Качественное совпадение теории с наблюдаемой эмпирической картиной кажется несомненным. С ростом  $t$  (и уменьшением  $A(t)$ ) все

<sup>ж)</sup> Из графика рис. 3 для величины плотности  $W(1)$  в точке максимума  $Z = 1$  имеем  $W(1) \approx 0,18 \frac{b_0}{\bar{b}} A(t)$ . Это дает, с учетом (51), иной способ сравнения теоретического и экспериментального значений  $A(t)$ . В [39] оценка  $W(1)$  ошибочно завышена в два раза.

более резко должны вырисовываться признаки асимметричного распределения Коши. Этот вывод согласуется с заключением Броди: с увеличением времени усреднения происходит переход от примерно гауссова распределения к существенно негауссову.

2. Пурселл [12] опирался на более мощную статистику (1000 пробегов на гистограмму) и получил аналогичные описанным, сильно асимметричные гистограммы даже для малого времени усреднения:  $t \approx 2\pi/\omega_1 \sim 0,1$  с. Нетрудно показать, что при  $t \approx 2\pi/\omega_1$  измеряемая величина  $\hat{y}(t) = \hat{G}(t)$  может быть записана в виде

$$\hat{y}(t) = \frac{1}{t} \int_{t_0}^{t+t_0} y^2(t') dt' - \left( \frac{1}{t} \int_{t_0}^{t+t_0} y(t') dt \right)^2;$$

теперь  $y(t)$  — шум образца, обрезанный по частоте только сверху (при  $\omega = \omega_2$ ). Второй член в этом выражении представляет собой квадрат текущего среднего значения шума.

Если этот член вносит меньший вклад во флуктуации  $\hat{y}(t)$ , чем первый, то мы имеем стандартную ситуацию. При этом роль  $\tau_k$  играет время корреляции  $y(t)$ , т.е. величина  $2\pi/\omega_2$ , а в качестве оценки  $t/\tau_k$  естественно взять  $\omega_2/\omega_1$ . Отсюда имеем  $A(t) \approx (\ln \frac{\omega_2}{\omega_1})^{-1} \approx 0,12$  (при использованном отношении  $\omega_2/\omega_1 \approx 3 \cdot 10^3$ ).

Для максимума плотности величины  $\hat{y}/\sqrt{2}$  из (54) следует оценка  $W_{\max} \approx \frac{0,18}{A(t)}$ . Из сравнения с гистограммами Пурселла (они построены в единицах  $\frac{\hat{y}}{\sqrt{2}}$ ) можно найти  $A \approx 0,1$ , что близко к сделанной оценке

$A$ . Таким образом, опытные значения этого важного параметра вероятностного распределения  $\hat{y}$  вполне соответствуют арг. теоретическому определению (обратный логарифм отношения времени усреднения к характерному корреляционному масштабу усредняемого шума).

Отметим, что гистограммы работы Пурселла еще более явно близки к асимметричному распределению Коши и наглядно демонстрируют квадратичный хвост распределения. На рис. 5 показан результат сопоставления эксперимента с теоретической кривой, отвечающей  $A = 0,1$ ,  $\sqrt{2} \geq 1$  и  $\sqrt{2}/2_0 \approx 1,6$  (экспериментальное значение).

Как видно из рис. 1 и 5, экспериментальные распределения имеют несколько более ярко выраженный пик и более крутой спад слева от него, чем теоретические кривые. Более правильная аппроксимация упомянутым распределением с показателем  $\alpha = 1 - A$ , соответствующим

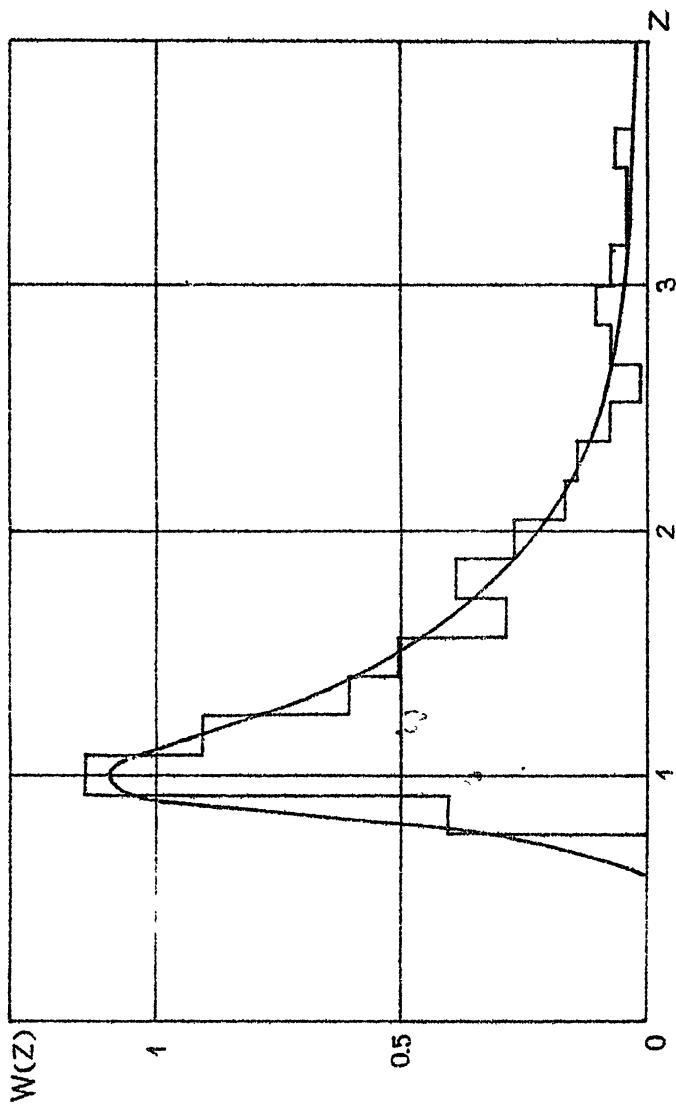


Рис. 5. Гистограмма мощности шума (обратно-смещенного п/л дюрд) по данным  
 работы Пурселла [12], в относительных единицах  $Z = \frac{W}{P_0}$ , и теоретическая  
 плотность распределения  $Z$  при  $A \approx 0,1$  и  $\frac{B}{P_0} \approx 1$  (отношение  $\frac{B}{P_0} \approx 1,00$ )



ХФ (38), приводит к лучшему совпадению с экспериментом. Устойчивое распределение с  $\alpha < 1$  именно таким образом (заострение пика и укручение "стенки") отличается от распределения Коши. Это обстоятельство проиллюстрировано рис.6.

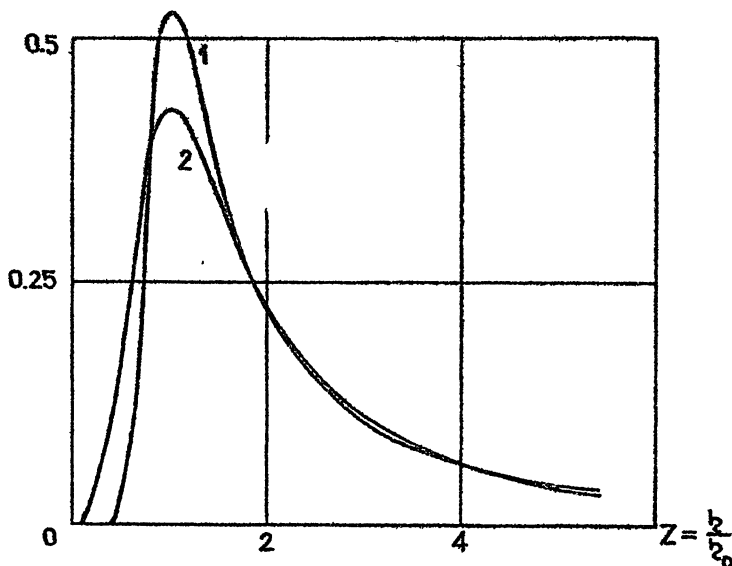


Рис. 6. Сравнение плотности вероятности  
 1) асимметричного устойчивого распределения с показателем  $\alpha = 1 - A = 0,75$  (по данным [37], ) и  
 2) распределения Коши (3,60) при  $A = 0,25$  и  $\bar{b}/b_0 = 1,7$ .  
 Хвосты почти совпадают. Распределение с показателем  $1 - A < 1$  имеет более острый пик и более крутую "стенку", что лучше соответствует экспериментальным гистограммам [7, 12]

### 3.7. $1/f$ - шум $1/f$ - шума

В работе Пурселла [12] экспериментально показано, что текущая мощность  $1/f$  - шума не просто случайна, но и сама испытывает флуктуации  $1/f$  - типа.

Теоретически это было предсказано выше в ходе вывода вероятностных характеристик кинетической или спектральной величины  $J(t)$ . Мы показали, что потеря корреляций в стационарном процессе переноса ведет параллельно как и статистике Коши, так и к "фликкерным флук -

туациям" для любой спектральной или кинетической величины. Эти два проявления совершенной случайности процесса неразрывно связаны друг с другом. Более того, мы могли убедиться, что спектральные характеристики  $J(\omega)$  не есть нечто независимое от вероятностей, но, напротив, спектр  $1/f$  - это чисто статистический эффект, следствие (наиболее непосредственно видимое) негауссовой вероятностной структуры шума.

Взяв в качестве  $J$  (или  $\zeta$ ) спектральную мощность неравновесного шума, ее фликкерные флуктуации мы получим прямо из (32), (41). Но, в той же системе мы можем рассмотреть в качестве  $J$  (или  $\zeta$ ) диссипативный ток через шумящий элемент. Тогда квадратичный (пропорциональный  $t^2 A(t)$ ) закон роста дисперсии  $\langle \Delta Q(t), \Delta Q(t) \rangle$  эмпирически означает  $1/f$  - флуктуации тока. Подобно этому пропорциональный  $t^4 A(t)$  закон роста четвертого кумулянта  $\langle \Delta Q^{(4)}(t) \rangle$  должен восприниматься как результат фликкерных флуктуаций интенсивности  $1/f$  - флуктуаций тока. Нетрудно понять, что подобная иерархия будет продолжаться и дальше и измерение непостоянства мощности этого "1/f - шума 1/f - шума" снова бы привело к 1/f - шуму (однако практически для этого необходимо спускаться глубже вниз по частоте).

Вся эта иерархия флуктуаций порождается только одной причиной - потерей корреляций. Благодаря ей, измерение любой спектральной - временной характеристики наталкивается на пропорциональное время накопления случайностей.

Из таблицы и графика спектра  $1/f$  - флуктуаций мощности,  $\zeta(t)$ ,  $1/f$  - шума полупроводникового диода, приведенных в статье Гурселла, можно оценить "константу Хоухе"  $\Omega(\omega)$  на частоте  $\sim 10^{-3}$  Гц. Она имеет порядок примерно  $10^{-2}$  (под константой Хоухе понимаем здесь величину, фигурирующую в формуле  $S_{\delta\zeta}(\omega) = \frac{2\pi \Omega(\omega)}{\omega}$ ). Того же порядка оценка следует из формулы (42) при  $N=1$  ( $\bar{J} = \bar{\zeta}$ ). Полагая  $\frac{\beta}{2} \sim 1$ , как это следует из гистограмм,  $\frac{\omega}{2\pi} \sim 10^{-3}$  Гц и  $\tau_0 \sim \tau_k \sim 0, I_0$  ( $\tau_k \sim \frac{2\pi}{\omega}$ ), находим:  $\Omega(\omega) = \frac{2\beta}{2} (\beta n \omega \tau_0^{-2}) \approx 0,03$ . Попутно видим, что число независимых источников "1/f - шума 1/f - шума" в данной аномальной системе действительно мало:  $N \sim 1$ . Отметим, что сравнительно большая величина фактора  $(\omega \tau_0)$  в данных экспериментах, обязанная большому масштабу  $\tau_0 \sim \tau_k \sim 0, I_0$  ( $\tau_k$  - максимальный корреляционный масштаб шума, выходящего с полосового фильтра с  $\frac{\omega}{2\pi} \sim 10$  и  $\frac{\omega}{2\pi} \sim 10^4$  Гц), позволяет объяснить почему наблюдался показатель спектра, заметно

меньший единицы и примерно равный 0,75. При  $\tau_0 \sim 0,1c$  уменьшение частоты от 0,1 до  $10^{-5}$  Гц означает увеличение фактора  $(\ln \omega \tau_0)^2$  в 16 раз. Следовательно, на четыре порядка частоты приходится примерно три порядка увеличения спектральной плотности, а это эквивалентно показателю спектра приблизительно равному 0,75 (в изучавшемся широком диапазоне частот<sup>§</sup>).

#### 4. РАВНОВЕСНОЕ И НЕРАВНОВЕСНОЕ БРОУНОВСКОЕ ДВИЖЕНИЕ

##### 4.1. Квазигарцово равновесное случайное блуждание.

Уравнение ЭФП и  $1/f$  - шум

1. В [2,3] отмечалось, что фликкерные флуктуации коэффициента диффузии слабо влияют на форму вероятностного распределения перемещения  $\Delta r(t)$  броуновской частицы. Однако в случае "аномально" высокого уровня шума, когда "константа Хоухе" значительно больше  $10^{-3}$ , такое влияние становится, в принципе, вполне заметным. Ниже показано, что оно выражается в появлении у распределения  $\Delta r(t)$  длинного степенного участка (кубичного хвоста). Это позволяет, в принципе, обнаружить порождаемый броуновским движением  $1/f$  - шум в "неадекватическом" эксперименте, наблюдая за эволюцией пакета незаряженных (и не взаимодействующих) малых броуновских частиц в жидкости (либо, может быть, атомов примеси или вакансий в твердом теле). Таким образом, это обстоятельство представляет дополнительную возможность для сопоставления предложенной в [1-4] термодинамической теории броуновского движения и  $1/f$  - шума с экспериментом.

2. Рассмотрим плоский пакет взаимодействующих частиц. В соответствии с (2.3) плотность распределения перемещения частицы (обозначим его далее через  $\Delta r \equiv r$ ) равна

$$W(r, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikr} e^{+\Delta_t(ik)} dk, \quad (4.1)$$

<sup>§</sup> Заметим, что при  $\omega \tau_0 \sim 1$  вместо правой части (42) следует использовать (вытекающее из (41), (42)) более точное выражение:

$$S_{\delta j}(\omega) = \frac{2\pi\delta}{5} \omega^2 \frac{\partial^2}{\partial \omega^2} \frac{1}{\omega} \int_0^{\infty} \frac{e^{-z} dz}{(\ln \frac{z}{\omega \tau_0})^2 + \frac{\pi^2}{4}}$$

где

$$\Delta_t(ik) = Dk^2 A(t) \ln\left(\frac{t_0}{t} + \tau_0 Bk^2\right) = \\ = -Dk^2 + Dk^2 A(t) \ln(1 + Bk^2 t) : \quad (4.2)$$

$D$  дается выражением (2.12), а  $A(t)$  — выражением (2.2).

Формулы (1), (2) можно непосредственно применить и к трехмерному варианту задачи (расплывание сферически симметричного пакета), полагая в (2)  $k^2 = \sum_{j=1}^3 k_j^2$  и перейдя в (1) к трехмерному интегралу Фурье (результат будет соответствовать изотропным флуктуациям тензора коэффициентов диффузии).

Нас интересует тот случай, когда в (2)  $B \gg D$  и константа Коухе  $Q(\omega)$  (см. (2.6)) существенно превышает уровень порядка  $10^{-8}$ . Если при  $B \ll D$  ( $B \rightarrow 0$ ) распределение (7) имеет вид гауссова колокола,

$$W(r, t) = W_D(r, t) \equiv (4\pi Dt)^{-\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{r^2}{4Dt}\right), \quad (4.3)$$

то при  $B \gg D$ , как видно из (1), (2), оно должно сильно отличаться от (3) на больших расстояниях  $|r| \gg \sqrt{2Dt}$ . Имея в виду, что в (1) таким расстояниям соответствует  $Dk^2 t \ll 1$ , можно разложить экспоненту в ряд и написать:

$$W(r, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikr - Dk^2 t} \{1 + Dk^2 t A(t) \ln(1 + Bk^2 t)\} dk = \\ = W_D(r, t) + Dt A(t) \frac{\partial^2}{\partial r^2} \frac{1}{|r|} \exp\left(-\frac{|r|}{\sqrt{Bt}}\right) \quad (4.4)$$

при  $|r| \gg \sqrt{2Dt}$ .

Таким образом, в результате  $1/f$ -флуктуаций коэффициента диффузии к гауссовому колоколу добавляется хвост, далеко тянущийся за пределы среднеквадратичного ухода частиц  $\sqrt{2Dt}$ . В интервале  $\sqrt{2Dt} \ll |r| < \sqrt{Bt}$  этот хвост имеет кубичный вид:

$$W(r, t) \approx \frac{2Dt}{|r|^3} \left(\ln \frac{t}{t_0}\right)^{-1} < \frac{A(t)}{|r|}, \quad (4.5)$$

а при  $r \gtrsim \sqrt{Bt}$  экспоненциально зарезается.

Проинтегрировав второй член выражения (5) по области  $|r| > \sqrt{2Dt}$ , получим оценку доли частиц, находящихся в хвосте, т.е. продиффундировавших аномально далеко. Она равна примерно  $A(t) \approx \left(\ln \frac{t}{t_0}\right)^{-1}$ . Процент аномально быстрых частиц не зависит от величины  $B/D$ , т.е. от ин-

тенсивности  $1/f$  - шума. Последняя влияет только на прозрачность степенной области хвоста.

3. Этот результат не следует, конечно, трактовать так, что некоторые из частиц все время диффундируют ненормально быстро, тогда как остальные ведут себя нормально. В каждый момент времени все частицы равноправны в своем случайном движении, и хвост (5) состоит из сменяющих друг друга частиц. Но если случилось так, что данная частица за время  $t$  ушла аномально далеко ( $|r| \gg \sqrt{2Dt}$ ), то это скорее всего означает, что в течение значительной части интервала времени  $t$  частица блуждала таким образом, как если бы имела нетипично большой коэффициент диффузии. Вероятность таких реализаций убывает  $\sim A(t)$ .

Отсюда ясен смысл "корреляционной функции коэффициента диффузии" (2.4). Любая реализация складывается из множества автономных случайных событий. При усреднении по ансамблю суммируются все возможные реализации, в том числе и "аномальные", дающие основной вклад в четвертый кумулянт перемещения частицы и в  $K_D(\tau)$ . Следовательно, логарифмическое поведение  $K_D(\tau)$  отражает свободу реализаций и не требует каких-либо причинных длительных связей на отдельной реализации.

4. Предостережем от неправильного истолкования таких высказываний, как "нетипично большой коэффициент диффузии", "уход от наиболее вероятного поведения" и тому подобное. Все они относятся к кинетическому, т.е. к сглаженному по времени поведению. Если заглянуть внутрь данного интервала сглаживания, то обнаружится, что там в конечной пропорции присутствуют участки самого различного поведения. Причем преобладают среди них типичные.

Утверждение "уход затянулся на время  $t$ " означает, что общий вес мелких нетипичных участков, накопившихся на интервале  $t$ , оказался сравнительно большим. Нетипичные участки рождаются постоянно и случайно попеременно с типичными. Мы это видели в разделе 2.5 при обсуждении фрактальной структуры реализаций  $1/f$  - шума. Можно сказать, что участки самого различного (с точки зрения текущих кинетических характеристик) поведения перемешаны "всюду плотно".

5. Представим распределение (I) как результат случайности текущего (имевшего место на интервале наблюдения  $t$ ) коэффициента диффузии  $\lambda$  :

$$W(r, t) = \int_0^{\infty} W_{\lambda}(r, t) W_{\lambda}(\lambda) d\lambda . \quad (4.6)$$

Здесь  $W_{\lambda}(r, t)$  - гауссова плотность (3), а  $W_{\lambda}(\lambda)$  - плотность распределения коэффициента диффузии. Тогда

$$\langle e^{ikr(t)} \rangle \equiv e^{t\Delta_t(ik)} = \int_0^{\infty} e^{-\lambda k^2 t} W_{\lambda}(\lambda) d\lambda . \quad (4.7)$$

Отсюда и из (2) следует, что  $W_{\lambda}(\lambda)$  - это распределение Коши, отвечающее ХФ (3.44) с  $\beta = B$ .

Поэтому и формула (3.51) также дает соотношение между средним по ансамблю  $\bar{z} = D$  и наиболее вероятным  $\lambda_0 = D_0$  значением текущего коэффициента диффузии.

При  $\frac{t}{\tau_0} \rightarrow \infty$  ХФ перемещения (2.3) принимает вид

$$\langle e^{ikr(t)} \rangle = \exp \left\{ -D t A(t) k^2 \ln \frac{1}{\tau_0 B k^2} \right\} . \quad (4.8)$$

В классификации устойчивых случайных блужданий (см. раздел 3.2) эта ХФ отвечает симметричному блужданию с характеристическим показателем  $\alpha = 2 - 0$ , бесконечно мало отличающимся от показателя  $\alpha = 2$ , соответствующего идеально гауссову блужданию. Такое "квазигауссово" блуждание не рассматривается в [36, 37]. Оно было из физических соображений получено в [1-3]. Его существование отмечено в математической работе [40].

Это блуждание обладает тем же типом масштабной инвариантности, что и идеально гауссово, но здесь инвариантность слегка нарушена зависимостью (хотя и логарифмически слабой, но принципиально важной) от малых характерных масштабов  $\tau_0$  и  $\tau_0 = \sqrt{B \tau_0}$ . Присутствие последних лишь раз указывает на то, что квазигауссово блуждание более адекватно отражает физическую реальность.

Заметим, что формально квазигауссово блуждание  $r(t)$  можно трактовать как гауссово блуждание  $R(\theta)$ , зависящее от случайного времени  $\theta = \theta(t)$ , где  $\theta(t)$  - рассмотренное в разд. 3 асимметричное блуждание Коши. То есть можно написать  $r(t) = R(\theta(t))$ , где  $\theta = \theta(t)$  - случайное ("кинетическое") время. Как известно [36, 37], если  $R(\theta)$

-- устойчивое блуждание с показателем  $\alpha'$ , а  $\Theta(t)$  - асимметричное блуждание с показателем  $\alpha'' \leq 1$ , то  $R(\Theta(t)) = r^{\alpha'' t}$  является устойчивым блужданием типа  $\alpha = \alpha' \alpha''$ . В частном случае,  $\alpha' = 2$  и  $\alpha'' = 1 - A$  (где  $A \rightarrow +0$ ), имеем квазигавуссово блуждание с  $X\Theta$  (8).

Оставляя же здесь величину  $A$  конечной, мы получим в качестве модели равновесного броуновского движения симметричное блуждание с показателем  $\alpha = 2 - 2A$ . С учетом обрезания соответствующая  $X\Theta$  имеет вид

$$\langle e^{ikr(t)} \rangle = \exp \left\{ -D t k^2 (1 + B k^2 t)^{-A(t)} \right\}. \quad (4.9)$$

Следует ожидать, что  $X\Theta$  (9) точнее описывает центральную часть реального распределения  $W(r;t)$ , чем (2).

6. Результаты разд. 3 показывают, что истинная картина измерения ансамблевого коэффициента диффузии (2.12) по наблюдению за одной частицей выглядит оптимистичней, чем можно было бы подумать на основе (2.5), (2.16).

Единичное измерение суммы (2.13) должно дать, скорее всего, величину, близкую к наиболее вероятному значению коэффициента диффузии  $D_0$ . Ее относительное отклонение от  $D_0$  (даже при аномально большой константе Хоухе  $\gg 10^{-3}$ ) имеет порядок  $A(t)$  (практически несколько процентов даже в наилучшей ситуации). Однако при  $B \geq D$  наряду с этим возможны, с вероятностью  $\sim A(t)$ , и "неудачные" измерения, когда относительное отклонение  $D_3$  в (2.13) от  $D_0$  оказывается значительно большим  $A(t)$  или даже порядка единицы (если  $B \ll D$ , то вероятность таких "аномалий" пренебрежимо мала). Было бы интересно попытаться проверить эту теоретическую картину в эксперименте, например, с малой частицей в жидкости.

Подчеркнем, что результат наблюдения за отдельной частицей тяготеет к наиболее вероятной величине  $D_0$ . Усреднение же по массе частиц (носителей заряда) автоматически дает ансамблевое среднее, которое измеряется в макроскопических экспериментах.

7. В разд. 2.5 отмечался факт немарковости совершенно случайного процесса с позиций ансамблевого описания. Как ясно из (2.3), это относится и к рассматриваемому броуновскому движению. Его немарковость означает, что вероятностные характеристики ансамбля реализа

ций не могут быть описаны какими-либо дифференциальным уравнением для вероятностей. Соответственно, реализации  $\Delta\Gamma(t)$  нельзя описать дифференциальными или интегродифференциальными ланжевеновскими уравнениями.

Дело в том, что такое описание (независимо от степени сложности) не может обойтись без априорного введения ансамблевых кинетических характеристик в алгоритм, производящий реализацию. Но действительная реализация процесса переноса развивается, ввиду потери памяти о прошлом, абсолютно независимо от параметров ансамбля. Адекватное статистическое описание должно рассматривать реализацию как целое и опираться на математический аппарат интегралов по траекториям<sup>Ж)</sup>.

Реальное броуновское движение не подчиняется центральной предельной теореме (ЦПТ) (вернее, ЦПТ работает, но только в физически трудновыполнимом пределе  $\ln \frac{t}{\tau_0} \rightarrow \infty$ ). ЦПТ справедлива для (нормированных) сумм большого, но определенного числа независимых случайных слагаемых. Однако (см. разд. 2) в процессах переноса само число слагаемых случайно. Поэтому реальное броуновское движение "притягивается" к квазигансовому устойчивому блужданию с ХФ (8). Для него, как и вообще для устойчивых блужданий [36, 37], ЦПТ несправедлива.

Недостаток стандартной модели равновесного блуждания, в которой исход элементарного события — "шаг налево или направо" — определяется бросанием монеты, состоит в том, что частота бросаний считается вперед известной и жестко заданной. Это еще один пример априорного внесения ансамблевой характеристики в алгоритм, генерирующий случайную реализацию (см. разд. 2.3 — 2.5). Ансамбль ставится впереди реализации, тогда как действительное положение вещей является обратным. Более реалистичная модель получилась бы, если бросающего монету субъекта поместить в толпу, в которой одни стремятся помешать бросанию, а другие — ускорить его. В таком случае и число бросаний, и усредненная по времени частота бросаний случайны и непредсказуемы.

<sup>Ж)</sup> В [41] замечено, что попытка "ланжевеновского" описания  $1/f$  — шума приводит к противоречиям с принципом причинности.



8. Сделанные замечания позволяют указать качественный недостаток описания движения броуновской частицы с помощью уравнения Эйнштейна - Фоккера - Планка (ЭФП):

$$\frac{\partial}{\partial t} W(r, t) = D \frac{\partial^2}{\partial r^2} W(r, t). \quad (4.10)$$

Принято считать, что для применимости уравнения (10) достаточно произвести некоторое "сглаживание" процесса по физически малой пространственно-временной области (с размерами, например, порядка радиуса корреляций - длины и времени свободного пробега). При этом неявно предполагается, что физический параметр  $D$  мог бы быть введен в уравнение (10) путем подобного сглаживания. Здесь и скрыт источник ошибки. Поскольку  $D$  есть спектральная характеристика, то она не несет, конечно, полной информации о локальных по времени свойствах движения. С другой стороны, она не может быть получена усреднением движения по малой области. Как было показано, неопределенность результата такого усреднения логарифмически слабо зависит от длительности усреднения. Подобную зависимость нельзя отбрасывать, если только не условиться пренебрегать  $1/f$  - шумом.

Следовательно, уравнение (10) нельзя обосновать строго, исходя из статистической механики. Бесконечность времени сглаживания имеет здесь истинно физическое, а не формальное значение, поскольку данная операция должна устранить логарифмические зависимости. Другими словами, в рассматриваемой области уравнение (10) не имеет физически оправданных условий применимости.

Можно сказать также, что (10) соответствует бесконечно огрубленному, сжатому времени. Напомним, что на бесконечном сжатии шкалы времени основан наиболее строгий способ вывода кинетических уравнений, так называемый " $\lambda^2 t$  - предел" [43]. При этом, конечно,  $1/f$  - шум ликвидируется. Получающиеся уравнения игнорируют его "законно" (они формально строгие), но зато теперь незаконно применять эти уравнения к описанию реальных систем, живущих в реальном масштабе времени. Такое описание оказывается далеко не полным. Оно пренебрегает неусредняемостью кинетического поведения по времени и тем самым  $1/f$  - шумом (который теперь естественно охарактеризовать как "шум физической неэргодичности")<sup>ж)</sup>.

ж) Хотя математически строгое условие эргодичности процесса выполнено.

Менее обоснован бытующий вывод уравнения ЭФД без сжатия временной шкалы. Стандартная техника приводит к "обобщенному уравнению ЭФД" вида

$$\frac{\partial}{\partial t} W(r, t) = \frac{\partial}{\partial r} \int_0^t dt' \hat{Q}(t-t'; \frac{\partial}{\partial r}) \frac{\partial}{\partial r} W(r, t'), \quad (4.10a)$$

где разложение ядра  $\hat{Q}(\tau; \nabla)$  по степеням градиента  $\nabla = \frac{\partial}{\partial r}$  первых порядков таково:

$$\hat{Q}(\tau; \nabla) = \langle v(\tau) v(0) \rangle + \tau \langle v(\tau) [ \int_0^\tau v(\tau') d\tau' ]^2 v(0) \rangle - 2 \langle v(0) \int_0^\tau v(\tau') d\tau' \rangle^2 \nabla^2 + \dots \quad (4.10b)$$

Здесь  $\langle \dots \rangle$  обозначает усреднение по равновесному ансамблю,  $v(t)$  — скорость частицы. Принято полагать, что ядро  $\hat{Q}(\tau; \nabla)$  является острой функцией  $\tau$  с шириной  $\sim \tau_k$  и плавной функцией  $\nabla$ . Однако результаты [1-4] показывают (см. (2.4), (2.5)), что при  $\tau \gg \tau_k$  благодаря вкладу четвертого кумулянта скорости, ядро (10b) имеет "хвост" вида

$$\hat{Q}(\tau; \nabla) \sim \left\{ \frac{\nabla^2}{\ln(\tau/\tau_k)} + O(\nabla^4) \right\}.$$

Таким образом, в интересующем нас случае принятое предположение необоснованно и при любом конечном значении градиента из (10a) уравнение (10), вообще говоря, не следует.

#### 4.2. Единое описание равновесного и стационарного неравновесного броуновского движения

Пусть в момент времени  $t = 0$  "включена" действующая на броуновскую частицу постоянная сила  $f$ . Если до включения система была равновесной, то  $X(t)$  перемещения  $\Delta r(t)$  (за время  $t$  после включения),

$$\langle e^{ik \Delta r(t)} \rangle \equiv \exp \{ t D_t(ik; f) \} \quad (4.11)$$

должна, согласно обобщенным флуктуационно-диссипационным соотношениям [34-35], удовлетворять равенству

$$D_t(ik - \frac{f}{\tau}; f) = D_t(-ik; f). \quad (4.12)$$

Здесь  $T$  - температура системы (термостата),  $\langle \dots \rangle$  - обозначает усреднение по ансамблю начальных, в момент  $t = 0$ , условий эволюции системы;  $\Delta r(t)$  - проекция перемещения на направление силы.

Считая возмущение достаточно слабым, предположим, что, спустя конечное время после выключения, устанавливается устойчивое стационарное неравновесное состояние, в котором при  $\frac{t}{\tau} \rightarrow \infty$   $\Delta r(t)$  является процессом со стационарными приращениями. Тогда при больших  $t$  функция (II) должна асимптотически терять зависимость от  $t$ , причем при  $f = 0$  она должна переходить в (2):  $D_{\pm}(ik; 0) = \Delta_{\pm}(ik)$ .

Удовлетворяющая этим требованиям и (12) функция имеет вид

$$D_{\pm}(ik; f) = Z - Z A(t) \ln(1 - \frac{B}{D} Z t), \quad (4.13)$$

где

$$Z = Z(ik; f) \equiv D ik(ik + \frac{f}{\tau}) = D(-k^2 + ik \frac{f}{\tau}). \quad (4.14)$$

XФ (II)-(14) описывает одновременно как диффузионную составляющую движения частицы, так и его дрейфовую составляющую вместе с "1/f - флуктуациями текущей подвижности" [39]. Принципиально эти два составляющие не отличаются друг от друга, поскольку их микроскопические механизмы тождественны. Нетрудно видеть, что

$$\langle \Delta r(t) \rangle = \frac{Df}{\tau} t; \quad (4.15)$$

$$\langle \Delta r(t), \Delta r(t) \rangle = 2Dt + 2 \frac{DBf^2}{\tau^2} t^2 A(t). \quad (4.16)$$

Величина  $\frac{D}{\tau}$  представляет собой среднее по ансамблю значение подвижности в слабонеравновесном состоянии, параметр  $B$  определяет интенсивность фликкерных флуктуаций подвижности.

При достаточно большом  $t$ , как следует из (16), статистика перемещения определяется, в основном, его неравновесной дрейфовой компонентой. Пренебрегая диффузионной компонентой, можно заметить в (13), (14)  $Z$  на  $ik \frac{Df}{\tau}$ . Тогда XФ (II) перейдет в XФ асимметричного блуждания Коши (3.44):

$$\langle e^{ik \Delta r(t)} \rangle \rightarrow \exp\{ik \bar{v} t - ik \bar{v} t A(t) \ln(1 - ik \bar{v} t)\} \quad (4.17)$$

где  $\bar{v} \equiv \frac{Df}{\tau}$  - усредненная по ансамблю скорость дрейфа,  $\bar{v} \equiv \frac{Bf}{\tau}$ . Здесь выделяется характерная для слабонеравновесного состояния дл-

нейная зависимость параметров  $\bar{v}$  и  $\bar{v}$  от возмущающей силы.

#### 4.3. 0 нестационарном (неэргодическом) $1/f$ - шуме

I. XФ вида (17) была получена выше как следствие масштабной инвариантности

$$\Delta r(\lambda t) \sim \lambda \Delta r(t) . \quad (4.18)$$

XФ равновесного блуждания (2.3), (2) отвечает другому типу масштабной инвариантности [I-4]:

$$\Delta r(\lambda t) \sim \sqrt{\lambda} \Delta r(t) \quad (4.19)$$

XФ (13), (14) объединяет эти два типа масштабного преобразования в один. Он получается, если учесть зависимость статистики перемещения  $\Delta r(t)$  не только от интервала времени  $t$ , но и от силы  $f$  и написать  $\Delta r = \Delta r(t, f)$ . Из (11), (12) следует, что комбинация  $\frac{f}{t}$  преобразуется так же, как и переменная  $ik$ , т.е. как  $\Delta r^{-1}$ . Поэтому при  $f \neq 0$  вместо (19) имеем

$$\Delta r(\lambda t, \frac{f}{\lambda}) \sim \sqrt{\lambda} \Delta r(t, f) . \quad (4.20)$$

Если  $f = 0$ , то это выражение переходит в (19). Если  $f \neq 0$  и рассматривается только дрейфовая компонента перемещения, преобладающая при достаточно большом  $t$ , когда

$$\frac{Df}{t} t \gg \sqrt{Dt} , \quad \frac{Df^2}{t^2} t \gg 1 , \quad (4.21)$$

то  $\Delta r$  пропорционально  $f$  (напомним, что XФ (13), (14) относится к слабонеравновесному состоянию). Поэтому можно написать

$$\Delta r(t, f) = \frac{f}{f_0} \Delta r(t) , \quad (4.22)$$

где  $f_0$  - произвольный фиксированный масштаб. А отсюда и из (20) вытекает, очевидно, соотношение (18).

Таким образом, закон (19) соответствует "белому" равновесному шуму ( у которого, однако, текущая спектральная интенсивность испытывает  $1/f$  - флуктуации), закон (20) - неравновесному шуму, включаемому как белый (диффузионный), так и  $1/f$  - компоненту ( дрейфо-

вую, а закон (18) — собственно  $1/f$  — шуму. С ростом  $t$  при условии (21) происходит переход от квазигaussianовской статистики перемещения к статистике типа Коши.

Подчеркнем, что сам по себе закон типа (18) не связан с неравновесностью. Соотношения масштабной инвариантности (3.1)–(3.3) выполняются и в равновесной ситуации, если, например,  $\Delta Q(t) = \int_{t_0}^{t_0+t} I(t') dt'$ , где  $I(t)$  — текущая интенсивность равновесного шума. Эти соотношения не требуют какой-либо определенной зависимости рассматриваемой кинетической характеристики от параметров неравновесности. Они, однако, отражают стационарность флуктуаций. Посмотрим, как они изменятся при учете нестационарности, возможной в неравновесной системе.

2. Пусть  $\Delta Q(t)$  — заряд, перенесенный за время  $t$  через проводник, к которому приложена постоянная разность потенциалов  $X$ . Если проводник обладает конечной статической проводимостью, то справедливо аналогичное (20) масштабное соотношение

$$\Delta Q(\lambda t, \frac{X}{\sqrt{\lambda}}) \sim \sqrt{\lambda} \Delta Q(t, X) \quad (4.23)$$

Оно является следствием двух обстоятельств. Первое — это то, что равновесный шум имеет равномерный спектр на низких частотах. Второе заключается в том, что в силу флуктуационно-диссипационных соотношений (см. [34–35] и [2–4]), аналогичных (12), при изменении масштаба величины  $\Delta Q$  величина  $\frac{X}{T}$  ( $T$  — температура термостатной части системы) тоже должна преобразовываться, причем подобно  $\Delta Q^{-1}$ .

Пусть величина  $X$  настолько мала, что проводимость можно считать омической. Обозначим через  $g$  линейную проводимость  $g = \frac{S}{2T}$ , где  $S$  — среднее по ансамблю значение спектральной мощности равновесного белого шума. При аналогичном (21) условии

$$\frac{g X^2}{TN} t \gg 1 \quad (4.24)$$

когда статистика  $\Delta Q(t)$  принимает "фликкерный" характер, рассмотрим относительные флуктуации

$$\delta Q(t, X) \equiv \frac{\Delta Q(t, X)}{gX}$$

(эта замена аналогична (22)). Для них из (23) имеем

$$\delta Q(\lambda t, \frac{x}{\sqrt{\lambda}}) \sim \lambda \delta Q(t, x) \quad (4.25)$$

При  $X \rightarrow 0$  величина  $\delta Q(t, x)$  по своему определению не зависит от  $X$ , статистически воспроизводя фликкерные флуктуации мощности равновесного шума. Поэтому и при конечном, но достаточно малом  $X$ , "амплитуда" флуктуаций  $\delta Q(t, x)$  должна быть нечувствительна к  $X$ . Однако это еще не означает, вообще говоря, независимости от  $X$  спектрально - временных и вероятностных характеристик относительных флуктуаций диссипативного тока.

Возможен механизм, связанный с неравновесностью токового состояния и приводящий к "дополнительной свободе" реализаций переноса заряда. По крайней мере, один такой механизм всегда существует - это диссипация энергии и вызванные ею тепловые процессы в проводнике, а также теплообмен проводника с окружением и прочие сопутствующие явления.

Естественно думать, что эффекты неравновесности изменяют статистику переноса лишь в сторону нестационарности, т.е. в сторону ухудшения самоусредняемости по времени. Действительно, уже равновесный  $1/f$  - шум является почти нестационарным. Для того, чтобы изменить его в сторону лучшей стационарности, нужно было бы ввести бесконечно долгоживущие корреляции. Если связанные с неравновесностью флуктуационные процессы имеют конечную память о прошлом, то остается лишь обратная возможность.

В частности, дополнительный элемент случайности, вносимый диссипацией энергии (и порожденными ею возмущениями), должен приводить к нестационарности  $1/f$  - шума, к его неэргодичности (неусредняемости реализаций процесса переноса во времени). Подчеркнем, что по скольку речь идет о нестационарности кинетического поведения (на временных масштабах, превышающих длительность реальных термодинамических корреляций), то эта нестационарность вовсе не тождественна нестационарности термодинамического состояния системы.

Последнее может оставаться неизменным во времени, создавая тем не менее условия для нестационарной зависимости усредненной по времени скорости переноса от длительности усреднения. При этом конкретная нестационарная реализация переноса складывается из множества событий, происходящих в одной и той же обстановке. Положение точки

отсчета  $t_0$  для  $\Delta Q(t) = \int_{t_0}^{t_0+t} I(t') dt'$  на шкале времени не имеет значения. Однако при любом ее выборе зависимость  $\Delta Q(t)$  от  $t$  нестационарна (т.е. вероятные вариации  $\Delta Q(t)$  нарастают быстрее, чем по линейному закону).

В принципиальном отношении эта картина не отличается от рассмотренного случая стационарного  $1/f$  - шума. Главное здесь - та же потеря корреляций и безразличие термодинамического состояния системы к интегральным характеристикам переноса.

Физический смысл (25) становится более понятным, если записать величину  $\delta Q$  как (случайную) функцию  $t$  и  $E = g x^2 t$  - энергии, диссипированной за время  $t$ . Тогда (25) принимает вид

$$\delta Q(\lambda t, E) \sim \lambda \delta Q(t, E) \dots \quad (4.26)$$

Согласно (26), величины  $\delta Q(\lambda t)$  и  $\lambda \delta Q(t)$  статистически эквивалентны, если энергия  $E$ , рассеянная за соответствующие промежутки времени, одинакова. Независимость от  $E$  приводит к (3.1)-(3.3). Посмотрим, к чему приводит возможная зависимость от  $E$ .

3. Хотя масштабные соотношения (25), (26) позволяют рассмотреть структуру  $X_f$  случайной величины  $\delta Q(t)$  (разумеется, снова с учетом нарушения инвариантности на малых масштабах), ограничимся здесь качественным анализом спектральной плотности  $S(\omega) \equiv S(\omega; x)$  относительных флуктуаций диссипативного тока. Из (25) или (26) следует, что

$$\frac{1}{\lambda} S\left(\frac{\omega}{\lambda}; \frac{x}{\lambda}\right) = S(\omega; x) \quad (4.27)$$

в приближении точной масштабной инвариантности. Отсюда имеем

$$S(\omega; x) = \frac{1}{\omega} \Psi\left(\frac{x^2}{\omega}\right), \quad (4.28)$$

где  $\Psi(Z)$  - формально произвольная функция.

Удобно перейти в (28) к безразмерному аргументу

$$\varepsilon \equiv \frac{g x^2 2\pi}{C T \omega}$$

где  $C$  - теплоемкость проводника, и записать (28) в виде

$$S(\omega; x) = \frac{1}{\omega} \Psi(\varepsilon) \quad (4.29)$$

Величина  $\varepsilon$  равна количеству рассеянной за период  $\frac{2\pi}{\omega}$  энергии (выраженной в единицах  $T$ ) в расчете на одну микроскопическую степень свободы проводника и является естественной грубой мерой тепловой неравновесности.

На достаточно низких частотах  $\varepsilon \gg 1$ . Условие (24) преобладания фликкерной компоненты шума над белой, при котором справедливы соотношения (25), (26), означает, что рассматриваемые частоты должны удовлетворять неравенству

$$\frac{gX^2}{TN} \cdot \frac{2\pi}{\omega} = \frac{c}{N} \varepsilon \gg 1. \quad (4.30)$$

Здесь  $N$  - число независимо шумящих подсистем (однородной проводящей среде  $N$  - приблизительно число свободных носителей заряда [4,5]). В случае металла  $\frac{c}{N} \sim 1$ , и, таким образом,  $1/f$ -шум всегда наблюдается в условиях существенной тепловой неравновесности (см. также [4]),  $\varepsilon \gg 1$ .

Если при  $\varepsilon \rightarrow \infty$  функция  $\Psi(\varepsilon) \rightarrow \text{const}$ , то шум остается стационарным (в смысле квадратично - корреляционных характеристик). В противном случае, когда  $\Psi \rightarrow \infty$ , естественно предположить, что  $\Psi(\varepsilon) \sim \varepsilon^\beta$ , и из (29) имеем

$$S(\omega; x) \sim \frac{1}{\omega} \left( \frac{gX^2}{cT} \cdot \frac{2\pi}{\omega} \right)^\beta \sim \frac{1}{\omega^{1+\beta}} \quad (4.31)$$

с некоторым показателем  $\beta$  (из вышеприведенных рассуждений следует, что  $\beta > 0$ ). Поскольку нестационарность шума обусловлена неравновесностью, то этот показатель не является чисто "внутренней" характеристикой системы и должен быть функцией неравновесности, завися от величины возмущения  $X$ .

Вид этой зависимости (при малых  $x$ ) следует из того, что при  $X \rightarrow 0$  спектр на сколь угодно низких частотах (для произвольно больших  $\varepsilon \gg 1$ ) должен стремиться к "равновесному" стационарному выражению  $\sim \frac{1}{\omega}$ , не зависящему от  $X$ . Следовательно при  $X \rightarrow 0$  показатель  $\beta = \beta(x)$  уменьшается по такому закону, что  $(X^2)^{\beta(x)} \rightarrow \text{const}$ . Отсюда находим

$$\beta(x) = d (\ln \frac{X_0^2}{X^2})^{-1}, \quad (4.32)$$

где  $d$  - некоторая константа;  $X_0$  - характерный масштаб  $X$ ;  $X^2 \ll X_0^2$ .

Из (31), (32) получаем



$$S(\omega, x) \sim \frac{1}{\omega} \left( \frac{2\pi}{\omega \tau_T} \right)^{\beta(x)}, \quad (4.33)$$

$$\text{где} \quad \tau_T = \frac{CT}{gX_0^2}, \quad (4.34)$$

Таким образом, зависимость спектра относительных флуктуаций тока от величины напряжения проявляется лишь через показатель спектра

$$\gamma = 1 + \beta(x) > 1.$$

4. Неуниверсальный параметр  $\tau_T$  не может быть установлен из данного качественного рассмотрения. Однако физический смысл характерного временного масштаба  $\tau_T$  представляется ясным. Коль речь идет о тепловых процессах, то на эту роль может претендовать только время, в течение которого рассеивается (за счет контакта с окружением) тепловое возмущение проводника. При этом нестационарная частотная зависимость (33) должна начинаться с частот порядка обратного времени тепловой релаксации. Однако множитель  $\left( \frac{2\pi}{\omega \tau_T} \right)^{\beta(x)}$  должен оставаться при понижении частоты несущественным вплоть до частот, при которых  $\varepsilon \geq 1$  (заметим, что невыписанный коэффициент в (33) не зависит от  $x$  и, следовательно, примерно таков же, как и в стационарном случае). Как видно из построения (33), масштаб (34) удовлетворяет этим физическим требованиям и его действительно можно отождествить (по порядку величины) со временем тепловой релаксации.

Введем также "время Джоулева нагрева проводника"  $t_0(x) \approx \frac{CT}{gX^2}$ . Сформулированное требование означает, что на том или ином интервале длиной  $t \leq t_0(x)$  наблюдается прежняя "стационарная" статистика переноса (подобная статистике устойчивого случайного блуждания с показателем  $d = 1 - A(t)$ ). Но, начиная с  $t \sim t_0(x)$ , при увеличении времени наблюдения  $t$  будет сказываться "разусреднение" и происходить переход к новой статистике, отвечающей (31). При  $\omega \approx \frac{2\pi}{t_0(x)}$  (и  $x \rightarrow 0$ ) "нестационарный" множитель в (33) примерно равен  $e^d$ . Поскольку это число должно иметь еще порядок единицы, получаем, что  $d \leq 1$ .

Учтем, что  $\frac{gX^2}{CT} \tau_T \approx \frac{\Delta T}{T}$ , где  $\frac{\Delta T}{T}$  - относительное изменение температуры проводника вследствие Джоулева нагрева. Поэтому приходим к следующей оценке показателя спектра  $\gamma$  (при  $x^2 \ll x_0^2 = \frac{CT}{g\tau_T}$ ):

$$\gamma - 1 \lesssim \left( \ln \frac{t_0(x)}{\tau_T} \right)^{-1} \approx \left( \ln \frac{T}{\Delta T} \right)^{-1}. \quad (4.35)$$

Экспериментально взаимозависимость  $\gamma$  и теплового режима пока не исследовалась.

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Перечислим основные утверждения, методические положения и итоги работы.

1. Шум и диссипация возможны и сосуществуют благодаря потере физической системой памяти о прошлых событиях. Кинетические величины, характеризующие шум и диссипацию, являются по своей природе нелокальными по времени характеристиками системы. Они определяются совокупностью событий, занимающих время, много большее длительности памяти системы о прошлом: теоретически — бесконечное время, а практически — все время наблюдения и измерения. Поэтому кинетические характеристики находятся "вне поля зрения" самой системы и принципиально не могут количественно контролироваться системой. Эта неконтролируемость приводит к случайному "плаванию" текущих (эмпирических) кинетических характеристик и, тем самым, — к  $1/f$  — шуму.

2. Всякая конкретная реализация процесса переноса ведет к своим индивидуальным кинетическим характеристикам (сопротивлению или средней по времени, диссипативной составляющей тока, спектральной мощности шума и т.п.). Результат усреднения кинетического поведения по (конечному) времени вдоль конкретной реализации отличается от результата усреднения по ансамблю реализаций процесса переноса. При этом (если система имеет конечную среднюю по ансамблю статическую проводимость) степень отличия либо логарифмически медленно убывает с ростом времени усреднения (эргодический случай), либо даже увеличивается (неэргодическая ситуация). Первый случай отвечает стационарным  $1/f$  — флуктуациям текущих кинетических характеристик (скорости переноса, текущей спектральной интенсивности шума), второй — нестационарному  $1/f$  — шуму с показателем спектра  $\gamma > 1$ .

3. Физически (с микроскопической динамической точки зрения)  $1/f$  — шум — это другая сторона "белого шума". Она заключается в том, что случайный поток нескоррелированных друг с другом кинетических событий, образующих белый шум, не имеет наперед определенной средней по времени частоты событий. Эта кинетическая характеристика сама определяется случаем.

Если событие некоторого рода (или комплекс событий) не изменяет, в конечном счете, термодинамическое состояние системы (забывается), то вероятные вариации количества таких событий — при пере-

ходе от одной реализации к другой — растут пропорционально времени наблюдения (однородно накапливаются), либо еще быстрее. При наблюдении конкретной реализации это выражается в том, что амплитуда флуктуаций средней по времени частоты событий не убывает с ростом времени усреднения. Это свойство характерно для флуктуаций со спектром типа  $1/f$ .

Фликкерные флуктуации обнаруживает только та или иная интегральная по времени (или спектральная) характеристика (частота событий). Локальные же характеристики (такие, как число свободных носителей и др.) претерпевают лишь совершенно случайные, белопумовые изменения.

4. Основное статистическое свойство совершенно случайного потока событий — это "априорная неосведомленность" конкретной реализации потока о вероятностях (событий или их сочетаний), проявляющихся лишь в бесконечном ансамбле реализаций. В силу этого обстоятельства действительные реализации теплового шума не могут быть смоделированы методом "бросания игральной кости", подменяющим реальные — совершенно случайные — потоки событий потоками пуассоновского типа.

5. Поскольку статистика процессов переноса (и, вообще, статистика совершенно случайных потоков событий) является результатом потери корреляций, то она в определенном смысле независима от специфики микроскопических механизмов переноса и качественно универсальна.

Крупномасштабная (низкочастотная) статистика процессов переноса (и вообще, совершенно случайных потоков событий) принципиально негауссова. Причем, негауссовость флуктуаций эмпирических кинетических характеристик тем ярче выражена, чем больше время наблюдения и усреднения и чем меньше эффективное число независимых шумящих подсистем.

Наблюдение  $1/f$  — шума есть не что иное, как наблюдение негауссовости статистики белого шума. Уровень относительных  $1/f$ -флуктуаций пропорционален степени негауссовости (спектральных компонент шума).

6. Найдено и проанализировано вероятностное распределение относительных флуктуаций кинетических характеристик отдельных подсистем (или систем с малым числом независимых частей), близкое к асимметричному распределению Коши (обрезанному в области больших флуктуаций) либо к асимметричному устойчивому распределению с  $\alpha < 2$  —

характеристическим показателем  $\alpha = 1 - A$ , где  $A = (\ln \frac{t}{\tau_0})^{-1}$ ,  $t$  - время наблюдения (усреднения),  $\tau_0$  - некоторый корреляционный масштаб времени (длительность "памяти" системы). Таким образом,  $1/f$  - шум неразрывно сопряжен со "статистикой Коши".

- Благодаря негауссовости шума спектр  $1/f$  сосуществует с бесконечной (в макромасштабе времени) изрезанностью реализаций  $1/f$  - шума (на всяком интервале времени он принимает почти любое значение). Спектр  $1/f$  и статистика "типа Коши" составляют единое целое, возникающая всегда вместе как итог потери корреляций.

7. Важная черта статистики Коши - чрезвычайно большой, по сравнению с гауссовой статистикой, вероятностный вес больших флуктуаций, причем, медленно - по степенному (примерно квадратичному) закону - убывающий с ростом их амплитуды. Наличие у вероятностного распределения длинного степенного хвоста отражает масштабно-инвариантную структуру реализаций процесса переноса, обязанную потере корреляций, и, в свою очередь, служит статистической причиной наблюдаемых при спектральных измерениях фликкерных флуктуаций.

8. Наиболее вероятные характеристики реализаций  $1/f$  - шума всегда отличаются от его среднестатистических характеристик. Последние определяются преимущественно нетипичными (наименее усредняющимися по времени), сравнительно маловероятными реализациями. Наиболее вероятные значения кинетических величин (сопротивления, спектральной мощности шума) всегда меньше их среднего по ансамблю значения.

Корреляционная функция  $1/f$  - шума несет лишь информацию о вероятности сравнительно нетипичных реализаций (и не имеет отношения к долгоживущим причинным связям на отдельной реализации).

9. Выводы построенной теории согласуются как в качественном, так и в количественном плане с данными экспериментальных исследований статистики  $1/f$  - шума, включая измерение вероятностного распределения (в аномально сильно шумящих системах, где реальные вероятностные свойства шума доступны измерениям). Используемое для количественных сравнений с опытом теоретическое вероятностное распределение не содержит каких-либо "подгоночных" параметров и зависит лишь от величины  $A = (\ln \frac{t}{\tau_0})^{-1}$ , которая находится из эксперимента.

10. Различного рода эффекты неравновесности ухудшают усредняемость по времени реализаций процесса переноса и делают кинетическое поведение неэргодическим, а  $1/f$  - шум - нестационарным. В частности,

к этому приводит диссипация энергии и вызванные ею процессы теплообмена.

В случае слабой неравновесности ( в области омической проводимости ) получена оценка показателя спектра  $\bar{\nu}$  :

$\bar{\nu} \approx 1 + \left( \ln \frac{T}{\Delta T} \right)^{-1}$ . где  $\frac{\Delta T}{T}$  - обусловленное Джоулевым нагревом относительное изменение температуры проводника.

II. Результаты, касающиеся статистики, справедливы не только в отношении собственно процессов переноса, но и других совершенно случайных потоков событий. Всякий такой поток автоматически обнаруживает  $1/f$  - флуктуации скорости генерации событий . Достаточным условием совершенной случайности является безразличие генерирующего механизма к результирующему полному числу событий.

В данной работе мы стремились показать, что принцип возникновения  $1/f$  - шума лежит в самом динамическом фундаменте кинетических явлений. Этот физический принцип прост, его удастся понять и с пользой эксплуатировать даже без обращения к детальной микроскопической теории  $1/f$  - шума. С целью же более строгого количественного анализа уровня  $1/f$  - шума и его зависимости от физического состояния системы необходимо развитие микроскопических методов . Здесь трудно рассчитывать на точные результаты. Необходимы приближенные методы, которые, однако, должны избегать обычных кинетических огрублений, вызванных преждевременным усреднением по ансамблю (см. раздел 2). Можно надеяться и на пользу стохастического модельного подхода, основанного на знании конкретной физической природы тех или иных "совершенно случайных потоков событий".

## Литература

1. Кузовлев Ю.Е., Бочков Г.Н. - Письма в ЖТФ, 1982, т.8, с.1260.
2. Кузовлев Ю.Е., Бочков Г.Н. - Препринт № 157, - Горький: НИИФМ, 1982.
3. Кузовлев Ю.Е., Бочков Г.Н. - Изв.вузов-Радиофизика, 1983, т.26, с.310
4. Бочков Г.Н., Кузовлев Ю.Е. - УФН, 1983, т.14, с.151.
5. Hooge F.H., Kleinpenning T.G.M., Vandamme L.K.J. - Rep. Progr.Phys., 1981, v.44, p.479.
6. Dutta P., Horn P.M. - Rev.Mod.Phys., 1981, v.53, p.497.
7. Brophy J.J. - Phys.Rev., 1968, v.166, p.827.
8. Brophy J.J. - J.Appl.Phys., 1969, v.40, p.3551.
9. Brophy J.J. - J.Appl.Phys., 1970, v.41, p.2913.
10. Greenstein L.J., Brophy J.J. - J.Appl.Phys., 1969, v.40, p.682.
11. Brophy J.J. - J.Appl.Phys., 1969, v.40, p.567.
12. Purcell W.E. - J.Appl.Phys., 1972, v.43, p.2890.
13. Moore W.J. - J.Appl.Phys., 1974, v.45, p.1896.
14. Restle P.J., Weissman M.B., Black R.D. - J.Appl.Phys., 1983, v.54, p.5844.
15. Black R.D., Restle P.J., Weissman M.B. - Phys.Rev., 1983, v.B28, p.1935.
16. Pellegrini B. et al. - Phys.Rev., 1983, v.B27, p.1233.
17. Коган Ш.М., Нараев К.Э. - Письма в ЖТФ, 1984, т.10, с.313.
18. Kosyó B.И. - ЖТФ, 1984, т.86, с.2239.
19. Marinari E., Parisi G., Ruelle D., Windey P. - Phys.Rev. Lett., 1983, v.50, p.1227
20. Marinari E., Parisi G., Ruelle D., Windey P. - Commun. Math.Phys., 1983, v.89, p.1.
21. Procaccia I., Schuster H. - Phys.Rev., 1983, v.A28, p.1210.
22. Montroll E.W., Shlesinger M.F. - J.Statist.Phys., 1983, v.32, p.209.
23. Nelkin M., Harrison A.K. - Phys.Rev., 1982, v.B26, p.6696.
24. Arecchi F.T., Lisi J. - Phys.Rev.Lett., 1982, v.49, p.94.
25. Voss R.F., Clarke J. - Phys.Rev., 1976, v.B13, p.556.
26. Beck H.G.K., Spruit W.P. - J.Appl.Phys., 1978, v.49, p.3384.

27. Nelkin M., Tremblay A.M.S. - J.Statist.Phys., 1981, v.25, p.253.
28. Tremblay A.M.S., Nelkin M. - Phys.Rev., 1981, v.B24, p.2551.
29. Потаевкин В.В., Степанов А.В. - Радиотехника и электроника, 1984, т.29, с.101.
30. Mikulinsky M.A. - Physica, 1978, v.94A, p.355.
31. Бфремов Г.Ф. - ЭТФ, 1968, т.55, с.2322.
32. Стратонович Р.Л. - ЭТФ, 1970, т.58, с.1612.
33. Бункин Ф.В. - Радиотехника и электроника, 1961, т.6, с.3; Изв. вузов - Радиофизика, 1962, т.5, с.83.
34. Voshkov G.H., Kuzovlev Yu.E. - Physica, 1981, v.A106, p.443.
35. Бочков Г.Е., Кузовлев Ю.Е. - ЭТФ, 1977, т.72, с.238; ЭТФ, 1979, т.76, с.1071.
36. Фаллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т.2 - М.: Мир, 1967.
37. Золотарев В.М. Одномерные устойчивые распределения. - М.: Наука, 1983.
38. Кац М. Несколько вероятностных задач физики и математики. - М.: Наука, 1967.
39. Бочков Г.Н., Кузовлев Ю.Е. - Изв.вузов - Радиофизика, 1984, т.27, с.1151.
40. Hughes R.D., Montroll E.W., Shlesinger M.F. - J.Statist.Phys., 1982, v.28, p.111.
41. Saarloos W., Llebot J.E., Rubi J.M. - Physica, 1983, v.B122, p.246.
42. Rails K.S., Skocpol W.J. et al. - Phys.Rev.Lett., 1984, v.52, p.228.
43. Честер Дж. Теория необратимых процессов. - М.: Наука, 1966.
44. Лифшиц Б.М., Питаевский Л.П. Физическая кинетика. - М.: Наука, 1979.
45. Геллаум Б., Олмстед Дж. Контрпримеры в анализе. - М.: Мир, 1967.
46. Стратонович Р.Л. Теория информации. - М.: Сов.радио, 1975.
47. Akimenko A.I., Verkin A.V., Yanson I.K. - J.Low Temp.Phys., 1984, v.54, p.247.
48. Александров А.А., Бочков Г.Н., Дубков А.А., Чикин А.И. Измерение вероятностного распределения мощности  $1/f$  - шума. - Изв.вузов - Радиофизика ( в печати).

# СО Д Е Р Ж А Н И Е

## ЧАСТЬ I

1.	ВВЕДЕНИЕ . . . . .	3
1.1.	Модели $1/f$ - шума в работах последнего времени. . . . .	5
1.2.	Эксперименты Броуна, Пурселла и др. Измерения негауссовых статистических характеристик $1/f$ - шума . . . . .	9
1.3.	Что такое корреляционная функция $1/f$ - шума . . . . .	17
2.	$1/f$ - ШУМ - ЕСТЕСТВЕННЫЙ ТЕПЛОВОЙ ШУМ . . . . .	19
2.1.	Что такое сопротивление. "Флуктуации сопротивления" . . . . .	19
2.2.	Почему кинетическая теория потеряла $1/f$ - шум. . . . .	24
2.3.	Затухание корреляций - причина $1/f$ - шума. . . . .	27
2.4.	$1/f$ - шум в совершенно случайных потоках событий . . . . .	33
2.5.	Фрактальная структура реализаций $1/f$ - шума. . . . .	38
2.6.	Теоретико-информационный аспект $1/f$ - шума . . . . .	44

## ЧАСТЬ II

3.	СТАТИСТИКА $1/f$ - ШУМА . . . . .	51
3.1.	Постановка математической задачи . . . . .	51
3.2.	$1/f$ - шум и статистика Коши. . . . .	54
3.3.	Асимметричное устойчивое случайное блуждание с характеристическим показателем $\alpha = 1 - A$ ( $A > 0$ ) . . . . .	58
3.4.	Различия между наиболее вероятными и среднестатистическими характеристиками $1/f$ - шума . . . . .	67
3.5.	Вероятностное распределение $1/f$ - шума . . . . .	72
3.6.	Сравнение с экспериментами Броуна . . . . .	77
3.7.	$1/f$ - шум $1/f$ - шума. . . . .	81
4.	РАВНОВЕСНОЕ И НЕРАВНОВЕСНОЕ БРОУНОВСКОЕ ДВИЖЕНИЕ. . . . .	83
4.1.	Квазигассово равновесное случайное блуждание. Уравнение Эйнштейна и $1/f$ - шум . . . . .	83
4.2.	Единое описание равновесного и стационарного неравновесного броуновского движения . . . . .	89
4.3.	О нестационарном (неэргодическом) $1/f$ - шуме . . . . .	92
5.	ЗАКЛЮЧЕНИЕ. . . . .	98
	ЛИТЕРАТУРА. . . . .	102