Министерство высшего и среднего специального образования РСФСР

Горьковский ордена Трудового Красного Знамени
научно-исследовательский радиофизический институт (НИРФИ)

Препринт № 196

О СТАЦИОНАРНЫХ РЕШЕНИЯХ МНОГОМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ ФОККЕРА-ПЛАНКА

Ю.А.Рыжов

Горький 1985

УДК 538.56:519.25

В работе рассмотрены методы решения стационарных многомерных уравнений Эйнштейна-Фоккера-Планка-Колмогорова (ЭФПК), вытекающие из возможности записи этих уравнений в форме уравнения непрерывности жидкости, движущейся в римановом n -мерном пространстве. Эффективность методов иллюстрируется рядом примеров, связанных с теорией многократного рассеяния в плоскослоистых хаотических средах, нелинейным взаимодействием в случайных средах, теорией одномодового лазера.

1. Уравнения Эйнштейна-Фоккера-Планка-Колмогорова являются эффективным средством исследования во многих областях науки. Интерес к теории интегрирования этих уравнений значительно вырос за последние годы (см., например, [1-3] и имеющуюся там библиографию). В настоящей работе рассмотрены методы нахождения стационарных решений уравнений ЭФПК определенного класса. Эти методы существенно опираются на возможность рассматривать процессы, описываемые уравнениями ЭФПК, как броуновское движение в неэвклидовом (римановом) пространстве. В отдельных задачах связь диффузионных процессов с неэвклидовой геометрией уже отмечалась [4-6]. Существенным шагом в рассматриваемой проблеме являются соображения, позволяющие связать диффузионную матрицу g^{ij} с метрическим тензором фазового пространства [6]. Такая интерпретация, являющаяся естественным следствием инвариантности рассматриваемых уравнений по отношению к допустимым преобразованиям координат, позволяет записать любое уравнение ЭФПК в гидродинамической форме уравнения непрерывности. Последнее обстоятельство делает наглядными условия, при которых существуют стационарные решения детального равновесия, частный случай которого исследован в [7] и называется потенциальным.

2. Запишем уравнение ЭФПК в криволинейной системе координат:

$$\sqrt{g}\,\frac{\partial W}{\partial t}=-\frac{\partial A^i\sqrt{g}\,W}{\partial x^i}-\frac{\partial^2 g^{ik}\sqrt{g}\,W}{\partial x^i\partial x^k}\,. \qquad \text{(I)}$$

Величина $\sqrt{g}$ в уравнении (I) определяет элемент объема в системе $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$, так что вероятность определяется соотношением $dP = W\sqrt{g}\,dx^1 dx^2 \ldots dx^n$. Для дальнейшего существенным является условие $g' = \det|g^{ik}| \neq 0$, обеспечивающее существование матрицы g_{ik}, обратной к исходной ($g^{ik} g_{kj} = \delta^i_j$). Соответствующее уравнение будем называть невырожденным.

В случае невырожденной матрицы g^{ik} уравнение (I) можно преобразовать к виду [6]

$$\frac{\partial W}{\partial t}+\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial C^i\sqrt{g}\,W}{\partial x^i}-\Delta W=0,\quad \Delta W=\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{g}\,g^{ik}\frac{\partial W}{\partial x^k}\right). \qquad (2)$$

Здесь величина C^i является вектором и определяется соотношением

$$C^i=A^i-\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^k}-\frac{1}{2g}g^{ik}\frac{\partial g}{\partial x^k},\quad g=\det|g_{ij}|=\frac{1}{g'}. \qquad (3)$$

Доказать, что C^i является вектором, можно, представив C^i в форме $C^i=A^i-g^{\alpha k}\left\{{i \atop \alpha k}\right\}$, где $\left\{{i \atop \alpha k}\right\}$ – символ Кристоффеля второго рода [8].

Уравнение (2) содержит только инвариантные величины, в то время как инвариантный характер уравнения в форме (I) маскировался присутствием неинвариантных величин A^i и т.п.

Теперь мы замечаем, что дифференциальные операторы в (2) имеют ковариантный смысл, а само уравнение действительно определяет закон сохранения вероятности в фазовом пространстве с координатами $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$, если положить:

а) Фазовое пространство $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ является римановым.

б) Тензор $g_{ik}=g_{ki}$ является метрическим тензором этого пространства, т.е. диффузионная матрица g^{ik} определяет контравариантные компоненты метрического тензора.

в) Величина $g=\det|g_{ik}|$ естественным образом определяет элемент объёма фазового пространства.

Введенная метрика фазового пространства в конечном счете определяется многообразием решений исходных динамических уравнений. Обычно подразумевается, что фазовое пространство является эвклидовым. На самом деле характер пространства и возможности представления уравнения (2) в различных формах за счет выбора новой системы координат можно выяснить, лишь вычислив тензор кривизны фазового пространства.

3. Запишем уравнение (2) в векторной форме, окончательно уничтожив следы конкретной системы координат:

$$\frac{\partial W}{\partial t}+\operatorname{div}[\vec{C}W-\nabla W]=0. \qquad (4)$$

Здесь вектор $\vec{S}=\vec{C}W-\Delta W$ определяет плотность потока вероятности. Последний, кроме диффузионного потока (∇W) и потока, связанного с регулярным сносом A^i, содержит метрический поток, определяемый зависимостью коэффициентов диффузии от координат. Здесь мы не будем обсуждать граничные условия для S, которые зависят от конкретных физических условий. Наконец, уравнение (4) можно представить в гидродинамической форме закона сохранения массы, введя скорость потока формулой $S = \vec{v} W$:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{v} W = 0. \tag{5}$$

Мы имеем дело с гидродинамикой жидкости, в которой скорость потока зависит от его плотности: $\vec{v} = \vec{C} - \nabla\theta$, $\theta = \ln W$. Нас будут интересовать стационарные решения, удовлетворяющие уравнению

$$\operatorname{div} \vec{v} + \vec{v}(\vec{C} - \vec{v}) = 0 \tag{6}$$

или

$$\operatorname{div}(\vec{C} - \nabla\theta) + (\vec{C} - \nabla\theta)\nabla\theta = 0. \tag{7}$$

Напомним, что все операции определяются в соответствии с метрическим тензором данного пространства.

4. Выделим из уравнений (7) некоторый класс, который определим следующим образом. Представим вектор C, характеризующий уравнение, в виде

$$\vec{C} = \vec{\Pi} + \vec{R}, \tag{8}$$

где $\operatorname{rot} \vec{\Pi} = 0$, $\operatorname{div} \vec{\Pi} = \operatorname{div} \vec{C}$, $\operatorname{div} \vec{R} = 0$, $\operatorname{rot} \vec{R} = \operatorname{rot} \vec{C}$.

Покажем, что для того, чтобы функция $\theta = \int g_{ik} \Pi^k dx^i + \mathrm{const}$ (где интеграл не зависит от пути интегрирования и берется по любой кривой или ломаной линии, соединяющей точки x_0 и x фазового пространства) была решением уравнения (7), необходимо и достаточно, чтобы векторы $\vec{R}$ и $\vec{\Pi}$ были ортогональны. Действительно, если $\theta = \int g_{ik} \Pi^k dx^i + \mathrm{const}$ – решение уравнений (7), то $\nabla\theta = \vec{\Pi}$, $\operatorname{div}(\vec{C} - \vec{\Pi}) + (\vec{C} - \vec{\Pi})\vec{\Pi} = \operatorname{div}\vec{R} + (\vec{R}\vec{\Pi}) = 0$. Отсюда следует, что $(\vec{R}\vec{\Pi}) = 0$. Обратно, если $(\vec{R}\vec{\Pi}) = 0$, то легко видеть, что $\theta = \int g_{ik} \Pi^k dx^i + \mathrm{const}$ удовлетворяет уравнению (7).

Условие $(\vec{R}\vec{\Pi}) = 0$ выделяет класс уравнений, стационарное решение которых имеет вид $W = e^{\theta}$, $\theta = \int \Pi_i dx^i + \mathrm{const}$. Этот же класс уравнений можно выделить условием существования такого вектора $\vec{v}$, который обращает в нуль оба слагаемых уравнения (6) в отдельности. Частный случай $\vec{R} = 0$ исследован в [7]. Другой частный случай $\vec{\Pi} = 0$ отвечает равновероятному распределению $\theta = \mathrm{const}$. Чтобы стационарное решение W было распределением, необходимо, разумеется, потребовать, чтобы полученное решение было нормируемым.

5. Этот результат можно получить другим способом. В работе [3] предлагается метод интегрирования уравнений ЭФПК, который заключается в следующем. Если к тензору g^{ik} в (I) добавить кососимметрический тензор $\sigma^{ik} = -\sigma^{ki}$, то уравнение (I) не меняется. Новый тензор $\tilde{g}^{ik} = g^{ik} + \sigma^{ik}$ предполагается выбрать таким образом, чтобы (пользуясь языком настоящей статьи) вектор C_0^i стал потенциальным. Реализация такой идеи приводит либо к сложной системе нелинейных уравнений относительно компонент σ^{ik}, либо к системе относительно σ^{ik} и потенциала θ [I-3].

С точки зрения геометрических представлений, которые развиваются в настоящей работе, менять естественную метрику g^{ik} не целесообразно. Вместе с тем, факт инвариантности уравнений ЭФПК по отношению к замене g^{ik} на $\tilde{g}^{ik}$ можно использовать более адекватным стоящей задаче способом, приняв во внимание простые геометрические соображения. Для построения такого способа заметим, что уравнение $\mathrm{div}(\vec{C}W - \nabla W) = 0$ можно заменить на эквивалентное ему уравнение $\mathrm{div}(\vec{C}W - \nabla W + \mathrm{rot}\,\vec{A}) = 0$. Вектор $\vec{A}$ можно выбрать таким образом, чтобы скомпенсировать непотенциальную часть вектора $\vec{C}$ (т.е. положить $\vec{R}W + \mathrm{rot}\,\vec{A} = 0$). Осуществить такую компенсацию можно несколькими способами. Рассмотрим один из них на примере двумерного уравнения. Вычтем из левой части уравнения величину $\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^k} (\sqrt{g}\, \sigma^{ik} W)$, где σ^{ik} – кососимметрический тензор. Эта величина тождественно равна нулю. Её можно включить во второе слагаемое уравнения (2), определив новый вектор $\vec{C}_0$ формулой

$$C_0^i = C^i - \frac{1}{\sqrt{g}\,W} \frac{\partial}{\partial x^k} (\sigma^{ik} \sqrt{g}\, W), \quad \sigma^{ik} = \begin{Vmatrix} 0 & \varphi_1 \\ -\varphi_1 & 0 \end{Vmatrix}. \tag{9}$$

Мы потребуем, чтобы эта добавка, не изменившая уравнения, скомпенсировала непотенциальную часть вектора C^i так, чтобы выполнялись соотношения

$$R^i = \frac{1}{\sqrt{g}\,W} \frac{\partial}{\partial x^k} (\sigma^{ik} \sqrt{g}\, W), \qquad \Pi^i = \frac{1}{W} \frac{\partial W}{\partial x^i}. \tag{I0}$$

Определив из второго соотношения потенциал θ, мы найдем из первого функцию φ_1, причём условие свместности двух уравнений для φ_1 имеет вид

$$\frac{\partial\theta}{\partial x}\,\frac{\partial(\varphi_1\sqrt{g})}{\partial y}-\frac{\partial\theta}{\partial y}\,\frac{\partial(\varphi_1\sqrt{g})}{\partial x}=0. \tag{11}$$

Но это равенство не что иное, как условие ортогональности $\vec{R}$ и $\vec{\Pi}$.

Можно поступить несколько иначе. В качестве добавки возьмем величину $\frac{1}{\sqrt{g}}\,\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{g}\,\sigma^{ik}\frac{\partial W}{\partial x^k}\right)$, так что новый вектор C_0^i выразится формулой

$$C_0^i=C^i-\sigma^{ik}\frac{\partial\theta}{\partial x^k}, \qquad \sigma^{ik}=\begin{Vmatrix}0 & \varphi_2\\ -\varphi_2 & 0\end{Vmatrix}. \tag{9'}$$

Уравнения, отвечающие (10), теперь выглядят так:

$$R^i=\sigma^{ik}\frac{\partial\theta}{\partial x^k}, \qquad \Pi^i=\frac{\partial\theta}{\partial x^i}. \tag{10'}$$

Выбранная добавка не равна нулю тождественно, как в первом случае. Но если найдены θ и φ_1 из системы (10), то, в силу условия $\operatorname{div}\vec{R}=0$, они удовлетворяют соотношению, записанному для φ_2. При этом условии добавленный к уравнению член равен нулю. Нам остается заметить, что условие ортогональности в рассматриваемом случае (10') выполняется автоматически, а функции φ_1 и φ_2 могут отличаться друг от друга лишь постоянным множителем.

6. Мы исходили из предположения, что необходимое разложение вектора $C^i=\Pi^i+R^i$, где $(\vec{R}\vec{\Pi})=0$, достигнуто. Уравнение (10) можно записать относительно потенциала θ и компонент тензора σ^{ik}, не используя разложения вектора $\vec{C}$. Например, в двумерном случае имеем из (10)

$$\begin{aligned}\frac{\partial\theta}{\partial x}+g_{11}\varphi\frac{\partial\theta}{\partial y}-g_{12}\varphi\frac{\partial\theta}{\partial x}&=C_1,\\ \frac{\partial\theta}{\partial y}+g_{21}\varphi\frac{\partial\theta}{\partial y}-g_{22}\varphi\frac{\partial\theta}{\partial x}&=C_2.\end{aligned} \tag{12}$$

Если исключить из этой системы φ, то получится соотношение, эквивалентное условие ($\vec{R}\vec{\Pi}$) = 0, которое и служит уравнением для потенциала θ .

7. В задаче представления вектора C^i в виде суммы потенциальной и соленоидальной частей возникает вопрос о неоднозначности этого разложения. Если какое-либо разложение не удовлетворяет условию $R^i \Pi_i = 0$, то отсюда не следует, что искомое представление не существует. Всевозможные представления вектора C^i отличаются друг от друга градиентом гармонической функции. Действительно, если $\vec{R}$ и $\vec{\Pi}$ удовлетворяют условиям (8), то последним удовлетворяет и пара векторов Π_1 и R_1 :

$$\vec{\Pi}_1 = \vec{\Pi} - \nabla\Psi, \quad \vec{R}_1 = \vec{R} + \nabla\Psi, \quad \Delta\Psi = 0 . \tag{I3}$$

Обратно, из условий (8) для обеих пар векторов следует уравнение $\Delta\Psi = 0$. Пусть $R^i \Pi_i = \alpha \neq 0$. Потребуем ортогональности $\vec{R}_1$ и $\vec{\Pi}_1$:

$$(\nabla\Psi)^2 + (\vec{\Pi} - \vec{R})\nabla\Psi = 0, \quad \Delta\Psi = 0 . \tag{I4}$$

Условия совместности этих уравнений определяют возможность найти искомое представление. В случае двумерного эвклидова пространства целесообразно использовать функции комплексного переменного. Второму уравнению удовлетворяет реальная часть любой аналитической функции $f(z)$ в рассматриваемой области плоскости $z = x + iy$. Положив $\psi = \operatorname{Re} f(z)$, $\Phi(z) = f'(z)$, имеем вместо (I4)

$$|\Phi(z)|^2 + \kappa_1 \operatorname{Re}\Phi(z) - \kappa_2 \operatorname{Im}\Phi(z) = \alpha(x,y). \tag{I5}$$

Здесь $\kappa_i = \Pi_i - R_i$. Задача сводится к нахождению аналитической функции $\Phi(z)$, удовлетворяющей уравнению (I5). В том случае, когда $\alpha(x,y)$, $\kappa_1(x,y)$ и $\kappa_2(x,y)$ являются полиномами, функцию $\Phi(z)$ следует также искать в соответствующей форме. В трехмерных уравнениях можно использовать гармонические полиномы.

8. П р и м е р I. Рассмотрим систему стохастических уравнений, которая описывает коэффициент отражения в плоскослоистой хаотически неоднородной среде с поглощением:

$$\frac{dS}{dz} = \frac{k_0 \Delta\varepsilon}{2i}\left(Se^{-ik_0 z} + e^{ik_0 z}\right)^2 - \beta S , \tag{I6}$$

где $S = \rho e^{i\varphi}$, $\Delta\varepsilon(z) = \varepsilon - 1$ – флуктуация диэлектрической проницаемости есть нормальный δ-коррелированный процесс ($\langle\Delta\varepsilon(z_1)\Delta\varepsilon(z_2)\rangle = \langle\Delta\varepsilon^2\rangle\,\delta(z_1 - z_2)$), β – численный коэффициент, характеризующий поглощение в среде. Правая часть (16) зависит от z, и соответствующее уравнение ЭФПК для $W(\rho, \varphi, z)$ стационарного решения не имеет. Однако если флуктуации $\Delta\varepsilon$ малы, то ρ и φ являются медленными функциями z и можно воспользоваться асимптотическими методами, усреднив (16) на длине волны $2\pi/k_0$, пренебрегая, таким образом, малыми высокочастотными деталями зависимости функции $S(z)$ от z.

Процедуру усреднения можно осуществить либо в уравнении ЭФПК (усредняя периодические коэффициенты), либо записывая вместо (16) укороченные уравнения в соответствии с методикой усреднения стохастических дифференциальных уравнений [9]. В последнем случае имеем (сохраняя для усредненных значений $\tilde\rho$, $\tilde\varphi$ старые обозначения ρ и φ)

$$
\begin{gathered}
\frac{d\rho}{d\tau} = (1-\rho^4)(4\rho)^{-1} - \alpha\rho - (1-\rho^2)\,2^{-1/2}\xi_1, \\
\frac{d\varphi}{d\tau} = -2^{-1/2}(1+\rho^2)\rho^{-1}\xi_2 - 2\xi_3, \\
\sigma^2 = \frac{1}{4}k_0^2 l\langle\Delta\varepsilon^2\rangle, \quad \tau = \sigma^2 z, \quad \alpha = \beta\sigma^{-2}, \\
\langle\xi_1\xi_2\rangle = \langle\xi_1\xi_3\rangle = \langle\xi_2\xi_3\rangle = 0, \\
\langle\xi_1(\tau_1)\xi_1(\tau_2)\rangle = \langle\xi_2(\tau_1)\xi_2(\tau_2)\rangle = \langle\xi_3(\tau_1)\xi_3(\tau_2)\rangle = \delta(\tau_1 - \tau_2).
\end{gathered}
\tag{17}
$$

Таким образом,

$$A^1 = -\alpha\rho + (1-\rho^2)^2(4\rho)^{-1}, \quad A^2 = 0,$$

$$C^1 = -\alpha\rho + 3\rho(1-\rho^4)(1+10\rho^2+\rho^4)^{-1}, \quad C^2 = 0,$$

$$g^{11} = \frac{1}{4}(1-\rho^2)^2, \quad g^{12} = g^{21} = 0, \quad g^{22} = (1+10\rho^2+\rho^4)(4\rho^2)^{-1},$$

$$g' = (1-\rho^2)^2(1+10\rho^2+\rho^4)(16\rho)^{-1}.$$

Несмотря на то, что (17) приводит к простому потенциальному случаю и соответствующее распределение найдено в [10], пример интересен тем, что фазовое пространство (занимающее внутренность единичного круга на плоскости $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$) существенно неэвклидово. Для функции распределения $v(\rho,\varphi)$ (такой, что вероятность определяется в соответствии с соотношением $\Delta p = W\sqrt{g}\, d\rho\, d\varphi = v\rho\, d\rho\, d\varphi$), находим

$$\theta = \int_0^\rho g_{11} C^1 d\rho + \int_0^\rho d\rho \left(\frac{d}{d\rho} \ln \frac{\sqrt{g}}{\rho}\right) = \ln v,$$

$$v(\rho,\varphi) = \frac{2\alpha}{\pi}(1-\rho^2)^{-2} \exp\left[-2\alpha\rho^2(1-\rho^2)^{-1}\right].$$

Это распределение устанавливается вблизи предельного цикла.

Пример 2. Рассмотрим систему уравнений, используемую в качестве модели одномодового лазера [11]:

$$\dot{x} = y - ax - b(x^2+y^2)x + \xi_1,$$

$$\dot{y} = -x - ay - b(x^2+y^2)y + \xi_2,$$

$$\langle \xi_1 \xi_2 \rangle = 0, \quad \langle \xi_1(t_1)\xi_1(t_2)\rangle = \langle \xi_2(t_1)\xi_2(t_2)\rangle = \delta(t_1-t_2),$$

$$g^{11} = g^{22} = 1, \qquad g^{12} = g^{21} = 0,$$

$$C_1 = y - ax - bx^3 - bxy^2, \quad C_2 = -x - ay - bx^2y - by^3.$$

Возьмём в качестве исходного представления вектора C^i следующее:

$$\Pi_1 = -bx^3 - bxy^2, \qquad R_1 = y - ax,$$

$$\Pi_2 = -by^3 - bx^2y - 2ay, \quad R_2 = ay - x,$$

$$(\vec{R}\vec{\Pi}) = \alpha = abx^4 - aby^4 + 2axy - 2a^2y^2.$$

Легко установить, что функция $\Phi(z) = -az$ удовлетворяет уравнению (15). Таким образом, искомое представление C^i в виде ортогональных потенциальной и соленоидальной частей имеет вид

$$\Pi_1 = -bx^3 - bxy^2 - ax, \quad R_1 = y,$$

$$\Pi_2 = -by^3 - bx^2y - ay, \quad R_2 = -x.$$

Следовательно, $\theta(x,y) = -\frac{a}{2}(x^2+y^2) - \frac{b}{4}(x^2+y^2)^2$.

Пример 3. Следующая система обычно рассматривается в теории колебаний при изучении типов особых точек фазовой плоскости:

$$\dot{x} = ax + by + \xi_1, \quad \dot{y} = cx + dy + \xi_2.$$

$\langle \xi_1 \xi_2 \rangle = 0$, ξ_1 и ξ_2 – δ-коррелированные нормальные процессы. При $b = c$ имеем обычный потенциальный случай, отвечающий особым точкам типа узла или седла. Устойчивому узлу соответствует нормируемое стационарное решение ЭФПК. При $a = a_1 - a_2$, $b = a_2 - a_3$, $c = a_1 + a_2$, $d = a_2 + a_3$ получаем представление вектора C^i, удовлетворяющее условию ортогональности:

$$\Pi^1 = a_1x + a_2y, \quad R^1 = -a_2x - a_3y,$$

$$\Pi^2 = a_2x + a_3y, \quad R^2 = a_1x + a_2y,$$

$$W = C\exp\left(\frac{1}{2}a_1x^2 + \frac{1}{2}a_3y^2 + a_2xy\right).$$

Этот, более общий, тип распределения заключает в себе случай устойчивого фокуса, вблизи которого и устанавливается стационарное распределение вероятностей.

9. Заключительные замечания. Физический смысл стационарных распределений вероятности при наличии вихревых потоков вероятности $\vec{R}W$ тесно связан с наличием устойчивых особых точек (типа фокуса) или предельных циклов [3, 12]. Важно, однако, иметь в виду то обстоятельство, что для ряда систем (например, для системы (17), для генератора Ван-дер-Поля, генератора с жестким возбуждением и т.п.) стационарное распределение устанавливается лишь в приближении Ван-дер-Поля, т.е. для усредненных характеристик системы.

Рассмотреный тип стационарных распределений выделен условием $R^i\Pi_i = 0$, которое, учитывая определение скорости потока, перепишем в виде $(\nabla\theta\vec{v}) = 0$. В такой форме условие существования стационарного решения вида $\theta = \int \Pi_i dx^i + \mathrm{const}$ физически прозрачно. Скорость потока всюду ортогональна градиенту плотности и в силу этого обстоятельства не может менять эту установившуюся плотность.

10. Рассмотрим случай вырожденной матрицы $g_0^{ij}(\det|g_0^{ij}|=0)$ в уравнении

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial A^i v}{\partial x^i} - \frac{\partial^2 g_0^{ij} v}{\partial x^i \partial x^j}. \qquad (18)$$

В разд. 5 мы отметили то обстоятельство, что уравнение (18) не изменится, если к симметричному тензору g_0^{ij} добавить кососимметрический тензор σ^{ij}. Формально после такого добавления мы получаем возможность, так же как и в невырожденном случае, интерпретировать новый тензор $g^{ij} = g_0^{ij} + \sigma^{ij}$ как метрический тензор фазового пространства, в котором движение жидкости, переносящей вероятность, подчиняется уравнению

$$\sqrt{g}\frac{\partial W}{\partial t} = -\frac{\partial A^i \sqrt{g} W}{\partial x^i} - \frac{\partial^2 g^{ij} \sqrt{g}\, W}{\partial x^i \partial x^j}, \qquad (19)$$

где $g = \det|g_{ij}| \neq 0$, $\sqrt{g} W = v$, вероятность подсчитывается в соответствии с формулой $dp = W\sqrt{g}\, dx^1 dx^2 \ldots dx^n$.

В отличие от невырожденного случая фазовое пространство с введенным несимметричным тензором g^{ij} является псевдоримановым [13]. В псевдоримановом пространстве определены понятия опускания и поднятия индексов так же, как в римановом пространстве. Изменение касается лишь скалярного произведения двух векторов:

$$(\vec{\xi}\vec{\eta}) = \xi^i g_{ij} \eta^j = g^{ij} \xi_j \eta_i . \qquad (20)$$

Такое определение приводит к тому, что $(\vec{\xi}\vec{\eta}) \neq (\vec{\eta}\vec{\xi})$.

После того, как введена метрика фазового пространства уравнения (19), можно повторить все рассуждения, приводящие к гидродинамической форме уравнения (19) и к выделению определенного класса уравнений, стационарное решение которых однозначно определяется потенциальной частью вектора C^i :

$$C^i = A^i - \frac{\partial g^{ik}}{\partial x^k} - g^{ik} \frac{1}{2g} \frac{\partial g}{\partial x^k}.$$

В отличие от невырожденного случая необходимое и достаточное условие интегрируемости в указанном смысле следует писать в виде $(\vec{R}\vec{\Pi}) = 0$, отличая величину $(\vec{R}\vec{\Pi})$ от величины $(\vec{\Pi}\vec{R})$, которая при этом может быть отлична от нуля.

Введенное псевдориманово пространство с достаточно произвольной метрикой позволяет, таким образом, свести задачу интегрирования к соответствующей задаче получения подходящего представления вектора $\vec{C}$. Хотя по сравнению с невырожденным случаем здесь и значителен произвольный элемент, последний можно использовать в процессе решения конкретных задач. Можно, например, тензор σ^{ik} считать заданным. Рассмотрим пример:

$$\dot{x} = y,$$

$$\dot{y} = f(x) + \xi(t)\left[G(x) - y^2\right]^{1/2}, \qquad G(x) - y^2 \geq 0. \tag{21}$$

Здесь $\langle \xi(t_1)\xi(t_2)\rangle = \delta(t_1 - t_2)$, $f(x)$ и $G(x)$ - произвольные гладкие функции, связанные соотношением $G'_x = 2f$. Эта система при $G(x) = 2x(x - 1)$ использовалась в [14] для описания генерации второй гармоники при трехволновом взаимодействии волн в нелинейной случайно-неоднородной среде. В [14] вычислены моменты $\langle x^n y^m \rangle$ стационарной функции распределения.

Найдем стационарное распределение вероятностей вырожденной системы (21). Здесь

$$g_0^{ij} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & G(x) - y^2 \end{Vmatrix}.$$

В качестве σ^{ik} произвольно берем матрицу $\sigma^{ik} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix}$, так что

$$g_{ij} = \begin{Vmatrix} G(x) - y^2 & -1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad g' = g = 1,$$

$$C^1 = y, \quad C^2 = f + y, \quad C_1 = y(G - y^2) - f - y, \quad C_2 = y.$$

Представление $\vec{C} = \vec{R} + \vec{\Pi}$, удовлетворяющее условию интегрируемости $\vec{R}\vec{\Pi} = 0$, имеет вид

$$\Pi_1 = -f(G - y^2)^{-1}, \quad R_1 = y(G - y^2) - f - y + f(G - y^2)^{-1},$$

$$\Pi_2 = y(G - y^2)^{-1}, \quad R_2 = y - y(G - y^2)^{-1}, \quad (\vec{R}\vec{\Pi}) = 0, \tag{22}$$

$$\theta = -\ln(G - y^2)^{1/2} + \mathrm{const},$$

$$W(x,y)=\begin{cases}\frac{2}{\pi}(G-y^2)^{-1/2}, & 0\le y\le G^{1/2}(x)\\ 0, & y>G^{1/2}(x)\end{cases}$$

Получилось очень своеобразное распределение, содержащее произвольную функцию.

II. Как мы видим, метрика в вырожденном случае достаточно произвольна. Поэтому можно поставить задачу такого выбора матрицы σ^{ik}, чтобы соленоидальная часть вектора C^i обращалась в нуль. Условие $\operatorname{rot}\bar{C}=0$ приводит к нелинейному уравнению относительно компонент тензора σ^{ik}. Для двумерного случая такое уравнение имеет вид

$$\frac{\partial^2 g_0^{ij}\Phi}{\partial x^i\partial x^j}-\frac{\partial A^i\Phi}{\partial x^i}+\frac{\partial(g_0^{ik}\xi_{kj}\kappa^j\Phi^2)}{\partial x^i}=0. \qquad (23)$$

Здесь g_0^{ij} и A^i – функции, характеризующие исходное уравнение (I9), $\sigma^{ik}=\begin{Vmatrix}0 & \varphi\\ -\varphi & 0\end{Vmatrix}$, $\Phi=\varphi^{-1}$, $\xi_{kj}=\begin{Vmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{Vmatrix}$, так что

$$g_{ij}=\begin{Vmatrix}g_0^{22}\Phi^2 & -\Phi^2(g_0^{12}+\varphi)\\ -\Phi^2(g_0^{12}-\varphi) & g_0^{11}\Phi^2\end{Vmatrix},\quad g=\det|g_{ij}|=\varphi^{-2},$$

$$\kappa^i=A^i-\frac{\partial g_0^{ik}}{\partial x^k}.$$

В примере, который нами уже рассмотрен, уравнение (23) выглядит так:

$$\frac{\partial^2(G-y^2)\Phi}{\partial y^2}-y\frac{\partial\Phi}{\partial x}-\frac{\partial(f-y)\Phi}{\partial y}+\frac{\partial\left[y(G-y^2)\Phi^2\right]}{\partial y}=0.$$

Этому уравнению удовлетворяет функция $\Phi=-(G-y^2)^{-1}$, соответственно метрический тензор пространства записывается в виде

$$g_{ij}=\begin{Vmatrix}-\Phi & -\Phi\\ \Phi & 0\end{Vmatrix},\quad g=\Phi^2.$$

Вычисляя вектор C^i, имеем

$$C^1 = y, \quad C^2 = f - y, \quad C_1 = -\Phi f, \quad C_2 = \Phi y,$$

$$\theta(x,y) = \ln\left[G(x) - y^2\right]^{1/2} + \mathrm{const}.$$

Это выражение приводит к (22), если учесть, что вероятность в полученном пространстве подсчитывается по формуле

$$dp = W(x,y)\sqrt{g}\, dx\, dy, \quad \sqrt{g} = \left[G(x) - y^2\right]^{-1}.$$

В заключение заметим, что рассмотренные методы интегрирования стационарных уравнений ЭФПК полезны и при нахождении нестационарных решений уравнений ЭФПК.

Литература

1. Bach A., Dürr D. Structural Modeling of Diffusion Processes. - Zeitschrift für Physik B, 1978, v.29, N 3, p.265 - 272.
2. Hongler M.-O., Ryter D.M. Hard Mode Stationary states Generated by fluctuations. - Zeitschrift für Physik B, 1978, v.31, N 3, p.333 - 337.
3. San Miguel M., Chaturvedi S. Limit Cycles and detailed balance in Fokker-Planck equations. - Zeitschrift für Physik, 1980, v.40, N 1/2, p.167 - 174.
4. Герценштейн М.Е., Васильев В.Б. Диффузионное уравнение для статистически неоднородного волновода. - Радиотехника и электроника, 1959, т. 4, № 4, с. 612 - 617.
5. Альбер С.И., Беспалов В.И. О диффузионном уравнении для статистически неоднородного волновода. - Радиотехника и электроника, 1961, т. 6, № 3, с. 448 - 449.
6. Рыжов Ю.А. К теории распространения волн в одномерной случайно-неоднородной среде. - Изв. вузов - Радиофизика, 1973, т. 16, № 8, с. 1240 - 1248.
7. Стратонович Р.Л. Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. - М.: Сов. радио, 1961, 550 с.
8. Сокольников И.С. Тензорный анализ. - М.: Наука, 1971, 373 с.
9. Тихонов В.И., Миронов М.А. Марковские процессы. - М.: Сов. радио, 1977, 485 с.

10. Абрамович Б.С., Дятлов А.А. К теории распространения волн в одномерной случайно-неоднородной поглощающей среде в диффузионном приближении. – Изв. вузов – Радиофизика, 1975, т. 18, № 8, с. 1222 – 1224.
11. Хакен Г. Синергетика. – М.: Наука, 1980, 404 с.
12. Рытов С.М. Введение в статистическую радиофизику. – М.: Наука, 1966, 404 с.
13. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Г. Современная геометрия. – М.: Наука, 1979, 759 с.
14. Абрамович Б.С., Тамойкин В.В. Нелинейное взаимодействие волн в сильно-неоднородных средах. – ЖЭТФ, 1980, т. 78, № 2, с. 458 – 466.

Дата поступления статьи
1 марта 1985 г.

Юрий Александрович РЫЖОВ

О СТАЦИОНАРНЫХ РЕШЕНИЯХ
МНОГОМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ ФОККЕРА-ПЛАНКА

Подписано в печать 28.03.85 г. МЦ 00798. Формат 60x84/16. Бумага офсетная. Печать офсетная. Объем 1 усл.печ.л. Тираж 120. Заказ 4215. Бесплатно.

Отпечатано на ротапринте НИРФИ