Министерство высшего и среднего специального образования РСФСР
Горьковский ордена Трудового Красного Знамени
научно-исследовательский радиофизический институт (НИРФИ)

Препринт № 197

ПРИБЛИЖЁННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ВАРИАЦИОННЫХ НЕРАВЕНСТВ

Я.И.Альбер
А.И.Нотик

Горький 1985

УДК 517.988 + 519.853

Рассматриваются два метода решения вариационных неравенств

$$(Ax, z-x) \geq 0, \ \forall z \in \Omega, \ x \in \Omega, \ \Omega < B \qquad (I)$$

с монотонным (в общем случае многозначным или разрывным) оператором A, заданным на выпуклом замкнутом множестве Ω банахова пространства B .

Первый метод использует операцию проектирования под знаком оператора A, второй - опорные функционалы к множеству Ω .

Доказывается сильная сходимость этих методов к решению вариационного неравенства (I), устанавливаются неасимптотические оценки скорости сходимости.

Для задачи

$$f(x) \to \inf, \ x \in B, \qquad (2)$$

где $f(x)$ - выпуклый функционал, исследуются методы

$$x^{n+1} = x^n - \lambda_n J f'(x^n), \ n = 1, 2, \ldots, \text{если } f(x) \in C^{1,1}, \ C_1 \leq \lambda_n \leq C_2; \qquad (3)$$

$$x^{n+1} = x^n - \lambda_n \| f'(x^n) \|^{-1} J f'(x^n), \ n = 1, 2, \text{если } f(x) \in C^{1,\mu}. \qquad (4)$$

Здесь $J: B^* \to B$ — нормализованное дуальное отображение. Для метода (3) получена асимптотическая оценка скорости сходимости $f(x^n) - f^* \leq O(\frac{1}{n})$, где $f^* = \inf f(x), \ x \in B$, для метода (4) установлены неасимптотические оценки скорости сходимости по функционалу.

В работе [I] был исследован итерационный процесс

$$Ux^{n+1} = Ux^{n} - \alpha_{n+\sigma}\, y^{n}, \quad y^{n} \in Ax^{n}, \; n = 1, 2, \ldots, \; x^{n} = I\,Ux^{n} \tag{I}$$

для нахождения решения x^* уравнения $Ax = 0$ с монотонным (в общем случае многозначным или разрывным) оператором A, действующим из банахова пространства B в сопряжённое пространство B^*.

Частным случаем оператора A является (суб-)градиент $f'(x)$ функционала $f(x)$, поэтому все результаты относились к задаче минимизации выпуклых функционалов, заданных во всем пространстве (задача безусловной оптимизации).

В гильбертовых пространствах распространение метода (I) на задачи условной оптимизации ($x \in \Omega$, Ω – выпуклое, замкнутое множество ограничений) или более общую задачу решения вариационных неравенств чаще всего осуществляется путем использования оператора проектирования в правой части (I).

В банаховых пространствах доказать даже сходимость подобного метода в рамках традиционных схем исследования не представляется возможным, поскольку, в отличие от гильбертова случая, в банаховых пространствах оператор проектирования не является нерастягивающим [2]. Кроме того, значительные трудности возникают из-за того, что операция проектирования должна осуществляться здесь на образ множества Ω, и неизвестно является ли он выпуклым. И этим не исчерпываются все трудности, с которыми здесь приходится сталкиваться.

Ниже для решения вариационных неравенств рассматриваются два метода. Первый (см. (5)) использует операцию проектирования элемента x^n на Ω под знаком оператора A. Его отличительная особенность – наличие дополнительного слагаемого

$$q^{n} = \frac{2U(x^{n} - \bar{x}^{n})}{\|x^{n} - \bar{x}^{n}\|}, \quad \bar{x}^{n} = P_{\Omega} x^{n}, \quad q^{n} = 0, \text{ если } x^{n} \in \Omega, \tag{2}$$

которое играет роль своеобразного "штрафа" за выход из ограничений+). Один вариант этого метода был предложен в [3, 4]. Однако предложения, техника исследования и результаты настоящей работы и работы [3], относящиеся к методу (5), совершенно различны.

Второй метод (см. (10)) использует опорные функционалы к множеству Ω и раньше рассматривался только в гильбертовых пространствах [5] для задачи минимизации функционалов. В нашем методе (10) оператор A не обязательно является потенциальным.

В заключительной части работы приводятся два утверждения. В теореме 3 доказывается сходимость по функционалу со скоростью $O(\frac{1}{n})$ метода (12) в случае выпуклого, класса $C^{1,1}$ функционала, заданного во всём пространстве. Метод (12) использует постоянный шаговый множитель. Раньше такой результат был известен только в гильбертовых пространствах.

В теореме 4 рассматриваются выпуклые функционалы класса $C^{1,\mu}$, $0 < \mu \le 1$, а в методе (14) шаговый множитель подчиняется закону расходящихся рядов:

$$\alpha_n \ge 0, \ \alpha_n \to 0, \ \sum_{1}^{\infty} \alpha_n = \infty . \qquad (3)$$

Приводятся неасимптотические оценки скорости сходимости $f(x^n)$ к f^*. В гильбертовых пространствах аналогичных утверждений нет, хотя соответствующий метод (14) хорошо известен и широко применяется, особенно в негладком случае.

Итак, для нахождения решения x^* вариационного неравенства

$$(y, x^* - x) \ge 0, \ \forall x \in \Omega, \ y \in Ax \qquad (4)$$

применяется метод

$$Ux^{n+1} = Ux^n - \alpha_{n+e}(\|\bar{y}^n\|^{-1} y^n + q^n), \ \bar{y}^n \in A\bar{x}^n = AP_\Omega^* x^n, \ n = 1, 2, \ldots \qquad (5)$$

Здесь q^n определяется формулой (2). Пусть шаговые множители α_n подчиняются закону расходящихся рядов (3). Это представляет возможность рассмотреть негладкие и вырожденные задачи. Поэтому оператор A, как

+) Не следует отождествлять метод (5) с методом штрафных функций: между ними ничего общего нет.

и в работе [I], предполагается равномерно (суб)монотонным, т.е.

$$(y, x-x^*) \geq \Psi(\|x-x^*\|),\ y\in Ax,\ x\in\Omega\ . \tag{6}$$

Однако в отличие от [I] на функцию $\Psi(t)$ налагаются несколько более жесткие требования, а именно: $\Psi(t)$ – выпуклая, строго возрастающая функция, $\Psi(0) = 0$. Как и в [I], предположим также, что на "бесконечности" оператор A имеет произвольный порядок роста

$$\|y\| \leq \varphi(\|x-x^*\|),\ x\in\Omega,\ y\in Ax, \tag{7}$$

где $\varphi(t)$ – непрерывная неубывающая функция, $0 \leq \varphi(0) < \infty$. Из (6) и (7) следует, что $\varphi(t) \geq \Psi(t)/t$. Чтобы не повторяться, мы сохраним все обозначения теорем 3 и 4 из [I] для функций $u(t, C)$, $v(t)$, $W(t, C)$, $V(Ux)$, $\alpha(x)$, $F(x)$, $\Phi(\lambda)$ и констант a, C_0, Q, C, C_2, L, ... Кроме того, мы будем считать, что выполнено условие (P) из [6]. Тогда справедлива

Теорема I. Пусть B – равномерно выпуклое пространство, x^* – обобщённое решение вариационного неравенства (4), $\|x^*\| \leq K$, на множестве Ω выполняются неравенства (6) и (7). Пусть начальное приближение x^1 таково, что $V(Ux^1) \leq R_0$. Выберем

$$\sigma \geq \bar{\sigma} = \min\{s : \gamma(\psi^{-1}(\varphi(4K+2\sqrt{2r_s})(18\alpha_s+\max\{L, \sqrt{2r_s}+ K+(3/2)\alpha_s\}*\alpha_s^{-1}\cdot\rho_{B*}(3\alpha_s)))) \leq R_0/2\},$$

$$r_s = R_0 + 36\alpha_s^2 + 2\max\{L, K_1+3\alpha_s/2\}\rho_{B*}(3\alpha_s),$$

$$K_1 = K + \sqrt{2R_0},$$

$$\gamma(t) = 4t^2 + \max\{2L, 3K+\sqrt{2r_1}\}\rho_B(t).$$

Тогда в обозначениях и в остальных предположениях теорем 3 и 4 из [I] справедливы их утверждения о сходимости и неасимптотических оценках скорости сходимости метода (2), (3), где

$$\tilde{\omega}_n(n) = 36\alpha_n^2 + \max\{2L, 2K_1+3\alpha_\sigma\}\rho_{B*}(3\alpha_n).$$

Доказательство. Подобно теореме 3 из [I] из выпуклости функционала $V(Ux)$ имеем

$$V(Ux^{n+1}) \leq V(Ux^n) + (Ux^{n+1} - Ux^n, x^n - \bar{x}^n) + (Ux^{n+1} - Ux^n, \bar{x}^n - x^*) +$$
$$+ (Ux^{n+1} - Ux^n, x^{n+1} - x^n).$$

Оценим каждое из трех последних слагаемых :

$$(Ux^{n+1} - Ux^n, x^n - \bar{x}^n) \leq -\alpha_{n+\sigma} \|\bar{y}^n_\delta\|^{-1} (\bar{y}^n_\delta, x^n - \bar{x}^n) - \alpha_{n+\sigma} \times$$
$$\times (q^n, x^n - \bar{x}^n) \leq -\alpha_{n+\sigma} \|x^n - \bar{x}^n\| \leq 0.$$

Используя условие равномерной (суб-)монотонности оператора A и свойство оператора метрического проектирования в банаховом пространстве [7, стр. 384]

$$(q^n, \bar{x}^n - x^*) \geq 0,$$

получаем

$$(Ux^{n+1} - Ux^n, \bar{x}^n - x^*) \leq -\alpha_{n+\sigma} \|\bar{y}^n_\delta\|^{-1} \Psi(\|\bar{x}^n - x^*\|).$$

И, наконец, поскольку $\| \|\bar{y}^n_\delta\|^{-1} \bar{y}^n_\delta + q^n \| \leq 3$, то

$$(Ux^{n+1} - Ux^n, x^{n+1} - x^n) \leq 4 \|Ux^{n+1} - Ux^n\|^2 + C\rho_{B^*}(\|Ux^{n+1} - Ux^n\|) \leq$$
$$\leq 36\, \alpha^2_{n+\sigma} + C\rho_{B^*}(3\alpha_{n+\sigma}) \quad C = \max\{2L, \|x^{n+1}\| + \|x^n\|\}.$$

Таким образом

$$V(Ux^{n+1}) \leq V(Ux^n) - \alpha_{n+\sigma} (\|\bar{y}^n_\delta\|^{-1} \Psi(\|\bar{x}^n - x^*\|) + \|x^n - \bar{x}^n\|) +$$
$$+ 36\, \alpha^2_{n+\sigma} + C\rho_{B^*}(3\alpha_{n+\sigma}). \tag{8}$$

Из свойств функции $\Psi(t)$ следует, что при $t > 0$ её можно представить в виг $\Psi(t) = t\Psi_1(t)$, где $\Psi_1(t)$ – непрерывная неубывающая при $t > 0$ функция [8].

Из свойства метрической проекции и условия согласования $\varphi(t) \geq \Psi_1(t)$ вытекают соотношения

$$\|x^n - \bar{x}^n\| \leq \|x^n - x^*\|,$$

$$\Psi_1(\|x^n - \bar{x}^n\|) \leq \Psi_1(2\|x^n - x^*\|) \leq \varphi(2\|x^n - x^n\|).$$

$$\|\bar{y}^n_\delta\| \leq \varphi(\|\bar{x}^n - x^*\|) \leq \varphi(\|x^n - \bar{x}^n\| + \|x^n - x^*\|) \leq \varphi(2\|x^n - x^*\|).$$

Отсюда

$$F = \frac{\Psi(\|\bar{x}^n - x^*\|)}{\|\bar{y}^n\|} + \|x^n - \bar{x}^n\| \geq \frac{\Psi(\|\bar{x}^n - x^*\|)}{\|\bar{y}^n\|} + \frac{\Psi(\|x^n - \bar{x}^n\|)}{\psi_1(\|x^n - \bar{x}^n\|)} \geq$$

$$\geq \frac{\Psi(\|\bar{x}^n - x^*\|) + \Psi(\|x^n - \bar{x}^n\|)}{\psi(2\|x^n - x^*\|)} .$$

Вновь воспользуемся свойством выпуклости функции $\Psi(t)$. Тогда

$$F \geq \frac{2\Psi(2^{-1}\|x^n - x^*\|)}{\psi(2\|x^n - x^*\|)} .$$

Окончательно из (8) получаем неравенство

$$V(Ux^{n+1}) \leq V(Ux^n) - 2\lambda_{n+\sigma} \frac{\Psi(2^{-1}(\|x^n - x^*\|)}{\psi(2\|x^n - x^*\|)} + \omega_{n+\sigma} , \qquad (9)$$

где $\omega_{n+\sigma} = 36\lambda^2_{n+\sigma} + \max\{2\lambda, \|x^{n+1}\| + \|x^n\|\}\rho_{B*}(3\lambda_{n+\sigma})$. Далее, как и в [I], выберем x^1 из условия $V(Ux^1) \leq R_0$ и $\sigma \geq \bar{\sigma}$. Нетрудно подсчитать, что

$$\|Ux^n\| = \|x^n\| \leq K + \sqrt{2R_0} = K_2 , \quad \|Ux^{n+1}\| \leq K + \sqrt{2R_0} + 3\lambda_\sigma ,$$

$$\|x^n - x^*\| \leq 2K + \sqrt{2R_0} = K_1 , \quad \|Ux^{n+1}\| + \|Ux^n\| \leq 2K_2 + 3\lambda_\sigma .$$

Из неравенства (9) следует, что

$$V(Ux^{n+1}) \leq R_0 + 36\lambda^2_{n+\sigma} + C_n \rho_{B*}(3\lambda_{n+\sigma}), C_n = \max\{2\lambda, 2K_2 + 3\lambda_{n+\sigma}\}.$$

Откуда следует, что

$$V(Ux^{n+1}) \leq R_1, \text{ где } R_1 = R_0 + 36\lambda^2_\sigma + \max\{2\lambda, 2K_2 + 3\lambda_\sigma\}\rho_{B*}(3\lambda_\sigma).$$

Теперь, аналогично [I], можно показать, что если выбрать $\sigma \geq \bar{\sigma}$, то $V(Ux^n) \leq R_1$ при всех $n > 1$. И, следовательно, неравенство (9) можно переписать в виде

$$V(Ux^{n+1}) \leq V(Ux^n) - \tilde{\lambda}_{n+\sigma} \tilde{\Psi}(V(Ux^n)) + \tilde{\omega}_{n+\sigma} ,$$

где

$$\tilde{\lambda}_{n+\sigma} = 2\lambda_{n+\sigma}/\psi(K_3),\ \tilde{\Psi}(V(Ux^n)) = \Psi(2^{-1}\gamma^{-1}(V(Ux^n))),$$

$$\tilde{\omega}_{n+\sigma} = 36\lambda^2_{n+\sigma} + \max\{2L, 2K_2 + 3\lambda_\sigma\}\rho_{B^*}(3\lambda_{n+\sigma}).$$

Теперь сходимость и оценки скорости сходимости $V(Ux^n)$ к нулю следует из лемм I и 2 работы [6], а заключительное утверждение следует из свойства 3 функционала $V(Ux)$ [9].

Задача отыскания проекции на множество банахова пространства в общем случае является очень тяжёлой. Ниже мы предлагаем один метод решения вариационных неравенств, в котором не используется оператор метрического проектирования.

Итак, для нахождения решения x^* вариационного неравенства (4) рассмотрим метод

$$Ux^{n+1} = Ux^n - \lambda_{n+\sigma}(\varkappa y^n + (1-\varkappa)P^n),\ y^n \in Ax^n,\ n = 1, 2, \dots; \tag{I0}$$

где $\varkappa = 1$, если $x^n \in \Omega$ и $\varkappa = 0$, если $x^n \bar{\in} \Omega$, P^n – опорный функционал к множеству Ω в точке x^n, $\|P^n\| = 1$. Напомним, что опорным функционалом к множеству $\Omega \subset B$ в точке $x \in B$ называется элемент $P \in B^*$ такой, что $(P, x - y) \geq 0$, $\forall y \in \Omega$. Опорный функционал к выпуклому замкнутому множеству банахова пространства в точке, не принадлежащей этому множеству, существует всегда, поскольку они сильно отделимы, иначе говоря для любого $x \bar{\in} \Omega$

$$\inf_{y \in \Omega}(P, x - y) > 0.$$

Предположим, что опорный функционал P в точке $x \bar{\in} \Omega$ удовлетворяет условию

$$(P, x - x^*) \geq h(\|x - x^*\|), \tag{II}$$

где $h(t)$ – непрерывная строго возрастающая функция $h(0) = 0$. Обозначим $G(t) = \min_t\{h(t), \Psi(t)\}$. Функция $G(t)$ обладает теми же свойствами, что и $\Psi(t)$ (или $h(t)$).

<u>Теорема 2</u>. Пусть выполнены все предположения теоремы I:

$$\sigma \geq \bar{\sigma} = \min\left\{ s : \gamma\left(G^{-1}\left(4\alpha_s M_s^2 + \bar{c}\,\rho_{B*}(\alpha_s M_s)/\alpha_s\right)\right) \leq R_0 \right\},$$

$$\bar{c} = \max\left\{2L,\ 2(K + \sqrt{2r_s} + \alpha_s M_s)\right\},\quad M_s = \varphi\left(2K + \sqrt{2r_s}\right) + 1,$$

$$r_s = R_0 + \alpha_s\left(\varphi(K_1) + 1\right) \times \left[K_1 + 2^{-1}\alpha_s(\varphi(K_1) + 1)\right],\ K_1 = 2K + \sqrt{2R_0},$$

$$\gamma(t) = 4t^2 + \max\left\{2L, \sqrt{2r_1} + 2K\right\}\rho_B(t).$$

Тогда для метода (I) справедливы утверждения теорем 3 и 4 из [I] о сходимости и неасимптотических оценках скорости сходимости. При этом

$$\omega_n = 4\alpha_n^2(4M_\sigma + 1)^2 + \max\left\{2L, M_\sigma + \alpha_\sigma\left(\varphi(M_\sigma + 1)\right)\right\}\rho_{B*}\left(\alpha_n(M_\sigma + 1)\right),$$

$$M_\sigma = 2K + \sqrt{2r_\sigma},\ \tilde{\Psi}(\lambda) = G(\gamma^{-1}(\lambda)).$$

<u>Доказательство</u>. Из выпуклости функционала $V(Ux)$ следует

$$V(Ux^{n+1}) \leq V(Ux^n) + (Ux^{n+1} - Ux^n, x^{n+1} - x^n) + (Ux^{n+1} - Ux^n, x^n - x^*) \leq$$

$$\leq V(Ux^n) - \alpha_{n+\sigma}\, \varkappa(y^n, x^n - x^*) - \alpha_{n+\sigma}(1-\varkappa)(P^n, x^n - x^*) +$$

$$+ 4\alpha_{n+\sigma}^2 S_n^2 + \max\left\{2L, \|x^{n+1}\| + \|x^n\|\right\}\rho_{B*}(\alpha_{n+\sigma} S_n),$$

$$S_n = \|\varkappa y^n + (1-\varkappa)P^n\| \leq \varphi(\|x^n - x^*\|) + 1.$$

Из неравенств (6) и (II) следует, что

$$\alpha_{n+\sigma}\,\varkappa(y^n, x^n - x^*) + \alpha_{n+\sigma}(1-\varkappa)(P^n, x^n - x^*) \geq \alpha_{n+\sigma} G(\|x^n - x^*\|).$$

Таким образом

$$V(Ux^{n+1}) \leq V(Ux^n) - \alpha_{n+\sigma} G(\|x^n - x^*\|) + \tilde{\omega}_{n+\sigma},$$

$$\tilde{\omega}_{n+\sigma} = 4\alpha_{n+\sigma}^2 g_n^2 + \max\left\{2L, \|x^{n+1}\| + \|x^n\|\right\}\rho_{B*}(g_n \alpha_{n+\sigma}),$$

$$g_n = \varphi\left(\|x^n - x^*\|\right) + 1.$$

Как обычно, пусть $V(Ux^n) \leq R_0$, тогда $V(Ux^{n+1}) \leq R_1$,

$$R_1 = R_0 + \lambda_G(\psi(K_1)+1)\ \left[K_1 - 2K + 2^{-1}\lambda_G(\psi(K_1)+1)\right].$$

Далее повторяются те же рассуждения, что и в теореме I.

Приведём примеры задач, для которых можно выписать опорный функционал.

I. Задача математического программирования

$$f(x) \to \inf,\ g_i(x) \le 0,\ i=\overline{1,m}$$

Если $g_i(x)$ – выпуклые функционалы, то опорный к множеству $\Omega = \{x \in B \mid g_i(x) \le 0, i=\overline{1,m}\}$ в точке x будет вычисляться по формуле $P = \partial\bar{g}(x)$, где $\partial\bar{g}(x)$ – субдифференциал выпуклого функционала $\bar{g}(x) = \max\limits_{1\le i\le m} g_i(x)$. Если $g_i(x)$ – равномерно выпуклые функционалы с модулями выпуклости $h_i(t)$, то опорный функционал P удовлетворяет неравенству (II), где $h(t) = \min\limits_{1\le i\le m} h_i(t)$.

2. Задача оптимального управления

Рассмотрим простейшую задачу:

$$f(u) = \int_0^T F(u,x,t)\,dt + \Phi(x(T)) \to \inf,$$

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu.$$

$x(0)$ и T фиксированы, при ограничениях $g(x(t)) \le 0$. Здесь $x(t)$ и $u(t)$ – r-мерные вектор-функции. Предположим, что $u(t) \in L_r^p$, $1 < p < \infty$. Тогда нормализованное дуальное отображение $U: L_r^p \to L_r^q$, $p^{-1}+q^{-1} = 1$ записывается в виде $Ux(t) = \|x(t)\|^{2-p}|x(t)|^{p-2}x(t)$.
Метод (I0) примет вид

$$Uu^{n+1}(t) = Uu^n(t) - \lambda_{n+G}(\varkappa y^n(t) + (1-\varkappa)P^n(t)),$$

где $y^n(t) = B^*\Psi(t) - F_u(x^n, u^n, t)$, $\dfrac{d\Psi}{dt} = -A^*\Psi + F_x(x^n, u^n, t)$,

$\Psi(T) = -\Phi'(x^n(T))$, если $g(x^n(t)) \le 0,\ 0 \le t \le T$,

$$P^n(t)=B^*\Psi(t),\ \frac{d\Psi}{dt}=-A^*\Psi,\ 0\le t\le t_n,\ \Psi(t_n)=q'(x^n(t_n)),$$

$$\Psi(t)\equiv 0,\ 0\le t\le T,\ \text{если}\ q(x^n(t))=\max_{0\le t\le T} q(x^n(t))>0.$$

Здесь через $F_x(x,u,t)$, $F_u(x,u,t)$, $\varphi'(x)$ и $q'(x)$ обозначены опорные вектора к функциям $F(x,u,t)$, $\varphi(x)$, $q(x)$ соответственно. Если $F(x,u,t)$ – выпуклая функция по "x" и равномерно выпуклая по "u", $\varphi(x)$ – выпуклая функция, а $q(u)=\max_{0\le t\le T} q(x(t))$ – равномерно выпуклая функция, то имеют место утверждения теоремы 2 о сходимости и оценках скорости сходимости метода (10).

В теоремах 1 и 2 оператор A предполагается равномерно (суб-)монотонным, а пространство, в котором он действует, равномерно выпуклым. Если отказаться от этих требований, то в общем случае нельзя гарантировать сильную сходимость итерационной процедуры (1). Но можно рассмотреть задачу о сходимости по функционалу, если A – градиент некоторого выпуклого функционала $f(x)$.

Итак, пусть выпуклый функционал $f(x)$, заданный в рефлексивном банаховом пространстве B, принадлежит классу $C^{1,1}$, т.е. градиент этого функционала удовлетворяет условию Липшица:

$$\|f'(x)-f'(y)\|\le L\|x-y\|,\quad L>0.$$

Для решения задачи

$$f(x)\to\inf_{x\in B}$$

рассмотрим метод

$$x^{n+1}=x^n-\alpha_n J f'(x^n),\ 0<\varepsilon_1\le\alpha_n\le\frac{2}{L}(1-\varepsilon_2),\ 1>\varepsilon_2>0,\ n=1,2\ldots,\quad (12)$$

где $J:B^*\to B$ – нормализованное дуальное отображение в пространстве B^*. Обозначим $f^*=\inf_{x\in B} f(x)$, $M^*=\{x^*\in B\mid f(x^*)=f^*\}$.

<u>Теорема 3</u>. Пусть B – рефлексивное банахово пространство, $f(x)$ – выпуклый функционал, принадлежащий классу $C^{1,1}$, множество M^* непусто и ограничено, тогда для метода (12) справедливы соотношения

$$\lim_{n\to\infty} f(x^n)=f^*,\quad \lim_{n\to\infty}\|f'(x^n)\|=0,\quad f(x^n)-f^*\le O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Доказательство. Из (I2) и формулы Лагранжа следует

$$f(x^{n+1})-f(x^n)=\int_0^1(f'(x^n+t(x^{n+1}-x^n)),x^{n+1}-x^n)\,dt=$$

$$=\int_0^1(f'(x^n),x^{n+1}-x^n)\,dt+\int_0^1(f'(x^n+t(x^{n+1}-x^n))-f'(x^n),x^{n+1}-x^n)\,dt\leq$$

$$\leq-\alpha_n\|f'(x^n)\|^2+2^{-1}\alpha_n^2L\|f'(x^n)\|^2.$$

Если $0<\varepsilon_1\leq\alpha_n\leq 2(1-\varepsilon_2)L^{-1}$, то $f(x^{n+1})\leq f(x^n)\leq f(x^1)$, иначе говоря x^n принадлежит множеству Лебега

$$M(x^1)=\{x\in B\,|\,f(x)\leq f(x^1)\}.$$

Отсюда вытекает, что $\|f'(x^n)\|\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$ и $\lim\limits_{n\to\infty}f(x^n)=f^*$. Покажем теперь, что последовательно x^n ограничена, если ограниче о множество M^*. Предположим, что это не так. Тогда найдётся подпоследовательность x^{n_k}, такая, что $\|x^{n_k}\|\to\infty$ и $\|f'(x^{n_k})\|\to 0$, $n_k\to\infty$. Так как монотонный оператор f' задан во всем пространстве B и Липшиц-непрерывный, то он максимально монотонный [I0]. Тогда, согласно [I0], нуль есть граничная точка области определения обратного оператора $[f']^{-1}$, который (см. [I0]) так же максимально монотонный. Следовательно, в точке "0" оператор $[f']^{-1}$ содержит полулинию, что противоречит ограниченности множества M^*. Итак, последовательность x^n ограничена, значит

$$C\|f'(x^n)\|\geq\|x^n-x^*\|\,\|f'(x^n)\|\geq(f'(x^n),x^n-x^*)\geq f(x^n)-f^*,\ C>0$$

и

$$f(x^{n+1})-f^*\leq f(x^n)-f^*-\alpha_n C^{-2}(f(x^n)-f^*)^2. \qquad (I3)$$

Из (I3) следует, что $f(x^n)-f^*\leq O\left(\frac{1}{n}\right)$.

Замечание I. Если $f(x)\in C^{1,\mu}$, $0<\mu\leq I$, то для доказательства сходимости по функционалу с оценкой $O(\frac{1}{n^\mu})$ необходимо рассмотреть метод

$$x^{n+1}=x^n-\alpha_n\|f'(x^n)\|^{\varkappa}Jf'(x^n),\ n=1,2,\dots,\ \varkappa=\frac{1-\mu}{\mu}.$$

Замечание 2. Если дополнительно предположить, что $f(x)\to\infty$ при $\|x\|\to\infty$, тогда ограничено Лебегово множество $M(x^1)=\{x\in B\,|\,f(x)\leq$

$\leq f(x^1)\}$ [11] , следовательно ограничена и последовательность x^n. Поэтому имеет место утверждение теоремы 3 о скорости сходимости метода (I2). В конечномерном пространстве из ограничённости множества M^* следует, что множество $M(x)$ ограничено для любого x [I2]. В этом случае имеет место утверждение о скорости сходимости метода (I2) без предположения, что $f(x)\to\infty$ при $\|x\|\to\infty$.

Следующее утверждение дает неасимптотические оценки скорости сходимости метода

$$x^{n+1}=x^n-\alpha_n\frac{J f'(x^n)}{\|f'(x^n)\|},\ n=1,2,\ldots,\ x^1\in S(R_0,x^*). \qquad (I4)$$

Введем обозначения

$$u(x,c)=\exp\left\{\ln C+a(\bar F(x)-\bar F(2))\right\},\ a=(C_0-1)/C_0,\ C_0>1,$$

$$v(x)=\left(\frac{C_0}{\bar\alpha(x-1)}+1\right)\bar\alpha^{-1+\mu}(x-1),\ C_1=v(2),$$

$$Q=\exp\left\{\ln R_0=a\left(\bar F(2)-\bar F(1)\right)\right\},$$

где $\bar\alpha(x)$ - непрерывная, невозрастающая функция, совпадающая при $x=n$ с $\bar\alpha_n=\alpha_n(R_0+\sum_1^{n-1}\alpha_k)^{-1}$. $\bar F(x)$ - какая-либо первообразная от $\bar\alpha(x)$. Считаем, что выполнено условие (P) из [6].

<u>Теорема 4</u>. Предположим, что выпуклый функционал $f(x): B\to R^1$, где B - рефлексивное банахово пространство, принадлежит классу $C^{1,\mu}$, $0<\mu\leq I$, α_n - подчиняются закону "расходящихся рядов" (3). Тогда для метода (I4) имеют место утверждения

I) Если $u(x,c)\geq v(x)$ при $x\to\infty$ и C_0 выбрано так, что $u(x,C_1)\geq v(x)$ при $x\to 2$, то при всех $n>I$ справедлива оценка

$$f(x^n)-f^*\leq u(n,c),\ c=\max\left\{Q,C_1\right\}.$$

2а) Если $u(x,c)\leq v(x)$ при $x\to\infty$, $Q\leq C_1$ и C_0 выбрано так, что при $x\to 2$ $u(x,C_1)\geq v(x)$, то при всех $n>I$

$$f(x^n)-f^*\leq v(n).$$

2б) Во всех остальных случаях

$$f(x^n)-f^*\leq u(n,c),\ C=\max\{Q,C_1\},\ 1<n\leq\bar x,$$

$$f(x^n)-f^*\le v(n),\quad n>\bar{x};$$

где $\bar{x}$ – единственный на интервале $(2,\infty)$ корень уравнения $u(x,\bar{c})=v(x)$.

<u>Доказательство</u>. Так как $f(x)\in C^{1,\mu}$, то из (I4) следует, что

$$f(x^{n+1})-f^*\le f(x^n)-f^*-\alpha_n\|f'(x^n)\|+(1+\mu)^{-1}\alpha_n^{1+\mu}L.$$

Из выпуклости функционала $f(x)$ имеем

$$\alpha_n\|f'(x^n)\|\|x^n-x^*\|\ge\alpha_n(f'(x^n),x^n-x^*)\ge\alpha_n(f(x^n)-f^*),$$

принимая во внимание, что $\|x^n-x^*\|\le\|x^1-x^*\|+\sum_1^{n-1}\alpha_k\le R_0+\sum_1^{n-1}\alpha_k$ получим

$$\lambda_{n+1}\le\lambda_n-\frac{\alpha_n}{R_0+\sum_1^{n-1}\alpha_k}\lambda_n+L(1+\mu)^{-1}\alpha_n^{1+\mu},\ \lambda_n=f(x^n)-f^*.$$

Обозначим $\bar{\alpha}_n=\alpha_n(R_0+\sum_1^{n-1}\alpha_k)^{-1}$; по признаку Абеля-Дини из расходимости ряда $\sum_1^\infty\alpha_k$ следует, что $\sum_1^\infty\bar{\alpha}_k=\infty$. Если предположить, что $\alpha_n^\mu\sum_{k=1}^{n-1}\alpha_k\to0$ при $n\to\infty$, то из лемм I и 2 работы [6] следует, что $\lambda_n\to0$, $n\to\infty$ и оценки скорости сходимости, приведённые в утверждении теоремы 4.

<u>Замечание 3</u>. Предположим, что функционал $f(x)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 4 и, кроме того, $f(x)\to\infty$, $\|x\|\to\infty$, тогда в условиях теоремы 4 имеют место утверждения о сходимости и оценках скорости сходимости метода (I4), где $\bar{\alpha}(x)=\alpha(x)$, а $\bar{F}(x)=F(x)$, $F(x)$ – первообразная функции $\alpha(x)$.

<u>Замечание 4</u>. Положим в методе (I4) $\alpha_n=\frac{\alpha}{n}$, $\alpha>0$. Тогда $\bar{\alpha}_n=$

$$=\frac{1}{n(\ln n+\bar{c})},\ \bar{c}=\frac{R_0}{\alpha}+1,\ \bar{F}(x)=\ln(\ln(x-1)+\bar{c}),$$

$$u(x,c)=C\left(\frac{\ln 2+\bar{c}}{\ln x+\bar{c}}\right)^a,\ v(x)=\frac{\alpha^{1+\mu}(C_0(x-1)(\ln(x-1)+\bar{c})+1)}{(x-1)^{\mu+1}}.$$

Очевидно, что $u(x,c)\ge v(x)$ при $x\to\infty$. Условие (P) имеет место, если $a<\bar{c}^{-1}(\mu\bar{c}-1)$. Теперь из теоремы 4 следует, что

$$f(x^n)-f^*\le u(n,c),\ n>1,\ C=\max\left\{R_3\left(\frac{\bar{c}}{\ln\bar{c}+\bar{c}}\right)^a,\ \alpha^{1+\mu}(C_0\bar{c}+1)\right\}.$$

Литература

1. Альбер Я.И., Нотик А.И. - ДАН СССР, 1984, т. 276, № 5, с. 1033 - 1037.
2. Reich S. - J.of Functional Analysis, 1977, v.26, N 4, p.378 - 395.
3. Немировский А.С. - Э.М.М, 1981, т. 17, в. 2, с. 344 - 359.
4. Немировский А.С., Юдин Д.Б. Сложность задач и эффективность методов оптимизации. - М.: Наука, 1979, 383 с.
5. Поляк Б.Т. - ДАН.СССР, 1967, т. 174, № 1, с. 33 - 36.
6. Альбер Я.И. - ДАН СССР, 1983, т. 270, № 1, с. 11 - 17.
7. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. - М.: Мир, 1972.
8. Вайнберг М.М. Вариационный метод и метод монотонных операторов.- М.: Наука, 1972, 415 с.
9. Альбер Я.И., Нотик А.И. - Препринт НИРФИ № 170, 1983, с. 1 - 20.
10. Rockafellar R.T. - Michigan Math.J., 1969, v.16, N 4, p.397 - 407.
11. Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач. - М.: Наука, 1981, 399 с.
12. Демьянов В.Ф., Васильев Л.В. Недифференцируемая оптимизация. - М.: Наука, 1981, 384 с.

Дата поступления статьи
4 апреля 1985 г.