Министерство высшего и среднего специального образования
Р С Ф С Р
Горьковский ордена Трудового Красного Знамени
научно-исследовательский радиофизический институт (НИРФИ)

П р е п р и н т № 199

ПРИНЦИП МАКСИМУМА ДЛЯ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ СКОЛЬЗЯЩИМИ РЕЖИМАМИ В РАЗРЫВНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

М.И.СУМИН

Горький 1985

Введение

Изучение многих оптимизационных проблем физики, механики, техники [1 - 4] приводит к необходимости рассмотрения задач оптимального управления системами обыкновенных дифференциальных уравнений с разрывной правой частью. В своих наиболее общих постановках задачи оптимального управления разрывными динамическими системами требуют учета того обстоятельства, что траектории разрывных систем (в том числе и оптимальная) могут произвольным образом скользить вдоль поверхности разрыва правой части. Такая произвольность скольжения траекторий вдоль поверхности разрыва самым существенным образом усложняет решение оптимизационной разрывной задачи и делает невозможным прямое применение для получения необходимых критериев оптимальности традиционных и хорошо разработанных регулярных методов.

В настоящей статье предлагается новый метод получения необходимых условий оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина для достаточно общей задачи оптимального управления динамической системой с разрывной правой частью в случае, когда оптимальная траектория системы произвольным образом скользит вдоль поверхности S разрыва правой части. Решение разрывной системы понимается в смысле Филиппова [5], а в качестве допустимых управлений рассматриваются измеримые по Лебегу управления. Предлагаемый метод не требует сколь-нибудь жестких ограничений на правую часть управляемой системы и функционалы. Он заключается в аппроксимации с помощью вариационного принципа [6] разрывной задачи последовательностью также разрывных задач, в которых множества $S_x = \{t \mid x(t) \in S\}$ моментов времени скольжения траекторий вдоль поверхности разрыва S состоят лишь из конечного числа отрезков и точек. Основное предположение метода: оптимальная траектория входит на поверхность S и выходит с неё под "ненулевыми углами".

Близкая по постановке задача оптимального управления, но при сильном предположении выпуклости вектограммы управляемой системы, рассматривалась в [7]. При этом метод [7] приводит к необходимым условиям, для записи которых используется мера Лебега-Стильтьеса, сосредоточенная на S_{x_0}, где $x_0(t)$ – оптимальная траектория, и в случае, когда S_{x_0} представляет собой отрезок. Последнее обстоятельство затрудняет применение результатов [7] для решения конкретных задач.

Следует особо отметить весьма важный для приложений [I-4] частный случай рассматриваемой задачи, когда множества S_x состоят лишь из конечного числа отрезков и точек [8, 9]. В этом случае необходимые условия оптимальности естественно получаются и более простым, близким к традиционному способом и являются удобными для решения конкретных прикладных задач [8, 9]. При более жестких ограничениях на входные данные задачи аналогичный частный случай рассмотрен также в [I0].

Приведем список основных обозначений: $R^{m\times n}$ $(R^{m\times 1}\equiv R^m)$ арифметическое $(m\times n)$-мерное пространство $(m\times n)$-мерных матриц с евклидовой нормой; $C^m_n(G)$ – пространство m раз непрерывно дифференцируемых функций $x: G\to R^n$, $G\subset R^l$; $V_{1,n}[0,1]$ – пространство абсолютно-непрерывных функций $x:[0,1]\to R^{n}$; $L_{p,m\times n}[0,1]$ – пространство (классов) измеримых по Лебегу функций $f:[0,1]\to R^{m\times n}$ с нормой $\|f\|_{L_{p,m\times n}[0,1]}\equiv\|f\|_{L_{p,m\times n}}\equiv\left(\int_0^1|f|^p dt\right)^{1/p}$, $L_{p,m}\equiv L_{p,m\times 1}$, $\|f\|_{L_{\infty,m\times n}}\equiv\operatorname{vraisup}\limits_{t\in[0,1]}|f|$, $p=\infty$; $C_{m\times n}[0,1]$ – пространство непрерывных функций $f:[0,1]\to R^{m\times n}$ с нормой $\|f\|_{C_{m\times n}[0,1]}\equiv\|f\|_{C_{m\times n}}\equiv\max\limits_{t\in[0,1]}|f|$, $C_{m\times 1}\equiv C_m$; $f(A)\equiv\{f(x)\,|\,x\in A\}$, $d(A,B)\equiv\inf\limits_{a\in A,\,b\in B}|a-b|$, $A,B\subset R^n$; ∂S – граница множества S; $m_-\varphi(x)\equiv\lim\limits_{\delta\to 0}\operatorname{vraimin}\limits_{x'\in(x-\delta,x)}\varphi(x')$, $m_+\varphi(x)\equiv\lim\limits_{\delta\to 0}\operatorname{vraimin}\limits_{x'\in(x,x+\delta)}\varphi(x')$, $\varphi:R^1\to R^1$ – измеримая по Лебегу функция; п.в. – почти всюду. Все векторы, не снабженные знаком транспонирования $*$ (даже если они записаны в строчку), считаются столбцами.

I. Постановка задачи

Пусть ограниченная область $G\subset R^n$ разделена гладкой неособой поверхностью $S\equiv\{x\in R^n\,|\,g(x)=0\}$, $g\in C^2_1(R^n)$, $\nabla_x g(x)\neq 0$ при $x\in S$, на области G^- и G^+. Пусть функция $f:[0,1]\times G\times R^m\to R^n$ определена равенством

$$f(t,x,u) \equiv \begin{cases} f^-(t,x,u), & x \in G^- \\ f^+(t,x,u), & x \in G^+ \end{cases},$$

где $f^-, f^+ : [0,1] \times R^n \times R^m \to R^n$ - непрерывные по (t, x, u) вместе с первыми производными $\partial f_i^- / \partial x_j$, $\partial f_i^+ / \partial x_j$, $i, j = \overline{1,n}$ ($f \equiv (f_1, \dots, f_n)$, $x \equiv (x_1, \dots, x_n)$) функции.

Рассмотрим нелинейную управляемую разрывную систему

$$\dot{x} = f(t, x, u(t)) \tag{I.I}$$

с начальным условием

$$x(0) = a, \tag{I.2}$$

где $a \in G$ - заданный вектор, $u : [0,1] \to R^m$ - измеримые по Лебегу управления, принимающие значения из ограниченного множества $U \subset R^m$.

Решение $x[u](t)$, $x[u](t) \in G$, $0 \leq t \leq$ I, системы (I.I) будем понимать в смысле А.Ф.Филиппова [5].

Будем также считать, что правая часть f системы (I.I) такова, что на множестве $[0, I] \times G$ имеет место правосторонняя единственность решения (при условии его существования) для любого управления $u(t)$. Условия, достаточные для выполнения этого требования, можно найти в § 7 работы [5] (см. теорему I4 и её доказательство).

Поставим следующую оптимизационную задачу: минимизировать функционал

$$I_0(u) \tag{I.3}$$

при ограничениях

$$I_i(u) \leq 0, \ i = \overline{1, æ_1}; \qquad I_i(u) = 0, \ i = \overline{æ_1 + 1, æ}, \tag{I.4}$$

где

$$I_i(u) \equiv h_i(x[u](1)) + \int_0^1 F_i(t, x[u](t), u(t))\, dt, \ i = \overline{0, æ}. \tag{I.5}$$

В (I.5) функции $h_i : R^n \to R^1$, $F_i : [0,1] \times R^n \times R^m \to R^1$ и их производные $\partial h_i / \partial x_j$, $\partial F_i / \partial x_j$, $i = \overline{0, æ}$, $j = \overline{1, n}$ непрерывны соответственно по x и по (t, x, u). Кроме того, будем считать, что выполняются неравенства, $i=\overline{0,\varkappa}$,

$$|f^-|, |f^+|, |\nabla_x f^-|, |\nabla_x f^+|, |F_i|, |\nabla_x F_i| \leq K, \quad |h_i|, |\nabla_x h_i| \leq K \qquad (1.6)$$

при $(t,x,u) \in [0,1] \times G \times U$ и при $x \in G$ соответственно; $K>0$ - постоянная.

Будем пользоваться обозначениями работы [5] : буквой со значком N, например, f^+_N , будем обозначать проекцию (со знаком) соответствующего вектора f^+ на нормаль к поверхности S в точке (t, x, u) ; положительное направление нормали всегда от G^- к G^+. Обозначим также (в случае, когда $(\nabla_x g(x), f^-(t,x,u)-f^+(t,x,u)) \neq 0$): $\alpha(t,x,u) \equiv$ $\equiv (\nabla_x g(x), f^-(t,x,u)) / (\nabla_x g(x), f^-(t,x,u) - f^+(t,x,u))$, $f^0(t,x,u) \equiv$ $\equiv \alpha(t,x,u) f^+(t,x,u) + (1-\alpha(t,x,u)) f^-(t,x,u)$. Очевидно, $\alpha(t,x,u) \equiv$ $\equiv f^-_N(t,x,u) / (f^-_N(t,x,u) - f^+_N(t,x,u))$ при $x \in S$.

2. Основные результаты и их обсуждение

Ниже при формулировке и доказательстве необходимых условий оптимальности нам потребуются следующие два условия:

Условие А. Пусть μ_0 , $\mu_1 > 0$ - некоторые постоянные и

$$U = U_- \cup U_0 \cup U_+, \qquad (2.1)$$

$$d(U_-, U_0) \geq \mu_0, \quad d(U_-, U_+) \geq \mu_0, \quad d(U_0, U_+) \geq \mu_0, \qquad (2.2)$$

$$f^-_N(t,x,u) \geq \mu_1, \quad f^+_N(t,x,u) \geq \mu_1, \quad \forall (t,x,u) \in [0,1] \times S \cap G \times U_-, \qquad (2.3)$$

$$f^-_N(t,x,u) \geq \mu_1, \quad f^+_N(t,x,u) \leq -\mu_1, \quad \forall (t,x,u) \in [0,1] \times S \cap G \times U_0, \qquad (2.4)$$

$$f^-_N(t,x,u) \leq -\mu_1, \quad f^+_N(t,x,u) \leq -\mu_1, \quad \forall (t,x,u) \in [0,1] \times S \cap G \times U_+. \qquad (2.5)$$

Условие В. Пусть $u_0(t)$, $0 \leq t \leq 1$ - некоторое управление, $x_0(t)$, $0 \leq t \leq 1$ - соответствующее ему единственное решение задачи (1.1), (1.2), $A^0 \equiv \{t \in [0,1] \,|\, x_0(t) \in S\}$ не пусто, $\mu_2 > 0$ - постоянная и

$$f^-_N(t,x,u) \geq 0, \quad f^+_N(t,x,u) \leq 0$$

при п.в. $t \in A^0$ для всех $x \in S_t$, где S_t - кусок поверхности (открытая область на поверхности S), $x_0(t)\in S_t$, $\inf\limits_{t\in A^0} d(x_0(t),\partial S_t)\geq\mu_2$ и, кроме того,

$$m_- f_N^-(t^1, x_0(t^1), u_0(t^1))\geq\mu_2, \quad m_+ f_N^+(t^2, x_0(t^2), u_0(t^2))\geq\mu_2$$

для всех t^1, t^2 таких, что $x_0(t^1)\in S$, $x_0([t^1-\delta_{t_1}, t_1))\subset G^-$ и $x_0(t^2)\in S$, $x_0((t^2, t^2+\delta_{t_2}])\subset G^+$, где δ_{t_1}, $\delta_{t_2}>0$ - достаточно малые числа.

Пусть далее $u_0(t)$, $0\leq t\leq 1$ - управление такое, что для соответствующего ему решения $x_0(t)$, $0\leq t\leq 1$, $x_0(0)=a\in G^-$, $x_0(1)\in G^+$. Обозначим: $A^-\equiv\{t\in[0,1]\,|\,x_0(t)\in G^-\}$, $A^0\equiv\{t\in[0,1]\,|\,x_0(t)\in S\}$, $A^+\equiv\{t\in[0,1]\,|\,x_0(t)\in G^+\}$. Из открытости множества $A^-\cup A^+$ следует, что оно представимо в виде объединения конечного или счетного числа открытых интервалов: $A^-\cup A^+=\bigcup\limits_i A_i$, $A_i\equiv(\alpha_i,\beta_i)$, $\alpha_i<\beta_i$, $i=1,2,\ldots$. Пусть $\alpha_1=0$, $\beta_2=1$; $A^l\equiv\bigcup\limits_{i=1}^{l} A_i$, $A_\gamma^l\equiv\bigcup\limits_{i=1}^{l}(\alpha_i+\gamma,\beta_i-\gamma)$, $0<\gamma<(\beta_i-\alpha_i)/2$, $i=\overline{1,l}$; $\inf\limits_{x\in G\cap S} d(x, x_0(A_\gamma^l))\equiv\mu_\gamma^l$, $l=1,2,\ldots$

В свою очередь из замкнутости множества A^0 в силу теоремы Линделёфа ([II], с. 53) следует, что $A^0=A_1^0\cup A_2^0$, где A_1^0 - либо пустое множество, либо представляет собой объединение не более чем счетного числа попарно непересекающихся и без общих концов открытых интервалов, а A_2^0 - множество, не содержащее ни одного интервала: $A_1^0=\bigcup\limits_i A_i^0$, $A_i^0\equiv(\alpha_i^0,\beta_i^0)$, $\alpha_i^0<\beta_i^0$, $i=1,2,\ldots$ Обозначим: $A_1^{0,l}\equiv\bigcup\limits_{i=1}^{l} A_i^0$, $A_{1\gamma}^{0,l}\equiv\bigcup\limits_{i=1}^{l}(\alpha_i^0+\gamma,\beta_i^0)$, $\gamma<\beta_i^0-\alpha_i^0$, $i=\overline{1,l}$; $l=1,2,\ldots$

Справедливы следующие две теоремы:

Т е о р е м а 2.I. Пусть $u_0(t)$, $0\leq t\leq 1$, - оптимальное управление в разрывной оптимизационной задаче (I.I)-(I.4) и выполняется условие А. Пусть τ_0 - верхняя грань множества всех моментов времени входа оптимальной траектории $x_0(t)$, $0\leq t\leq 1$, на поверхность S. Тогда существуют вектор $\lambda\in R^{\varkappa+1}$,

$$\lambda_i\geq 0,\quad i=\overline{0,\varkappa_1};\ \lambda_i I_i(u_0)=0,\ i=\overline{1,\varkappa_1},\ |\lambda|=1, \tag{2.6}$$

и функции скачков $\chi_i\in L_{\infty,n}[0,1]$, $i=\overline{0,\varkappa}$, принимающие постоянные значения на каждом из интервалов (α_r,β_r), (α_r^0,β_r^0), $r=1,2,\ldots$; $\chi_i(t)\equiv 0$ при $t>\tau_0$, такие, что при п.в. $t\in\bigcup\limits_r(\alpha_r,\beta_r)\cup\cup(\alpha_r^0,\beta_r^0)$

$$\sum_{i=0}^{\varkappa}\lambda_i\{H_i(t,x_0(t),u_0(t),\psi_i(t))+(\chi_i(t),(E+\Phi^*(t))f(t,x_0(t), \tag{2.7}$$

$$u_0(t)))\} = \sup_{v \in W_t} \sum_{i=0}^{\varkappa} \lambda_i \{H_i(t, x_0(t), v, \psi_i(t)) + (\chi_i(t), (E + \Phi^*(t)) f(t, x_0(t), v))\},$$

где $H_i(t,x,u,\psi) \equiv (\psi, f(t,x,u)) - F_i(t,x,u)$; E – единичная $(n \times n)$-матрица; $f = f^+$, $W_t = U$, $\Phi(t) = \Phi_r^+(t)$, если $t \in (\alpha_r, \beta_r) \subset A^+$; $f = f^-$, $W_t = U$, $\Phi(t) = \Phi_r^-(t)$, если $t \in (\alpha_r, \beta_r) \subset A^-$; $f = f^0$, $W_t = U_0$, $\Phi(t) = \Phi_r^0(t)$, если $t \in (\alpha_r^0, \beta_r^0)$, $r = 1, 2, \ldots$, а вектор-функции $\psi_i(t)$, $0 \le t \le 1$, $i = \overline{0, \varkappa}$, и матричные функции $\Phi_r^+(t)$, $\Phi_r^-(t)$, $\Phi_r^0(t)$ есть, соответственно, решения систем

$$\dot\psi_i(t) = -\nabla_x^* f(t, x_0(t), u_0(t)) \psi_i(t) + \nabla_x F_i(t, x_0(t), u_0(t)),$$
$$\psi_i(1) = -\nabla_x h_i(x_0(1)); \tag{2.8}$$

$$\dot\Phi_r(t) = -\nabla_x^* f(t, x_0(t), u_0(t)) \Phi_r(t) - \nabla_x^* f(t, x_0(t), u_0(t)), \tag{2.9}$$
$$\Phi_r(\beta_r) = 0, \quad \alpha_r \le t \le \beta_r;$$

$$\dot\Phi_r^0(t) = -\nabla_x^* f(t, x_0(t), u_0(t)) \Phi_r^0(t) - \nabla_x^* f(t, x_0(t), u_0(t)), \tag{2.10}$$
$$\Phi_r^0(\beta_r^0) = 0, \quad \alpha_r^0 \le t \le \beta_r^0,$$

в которых измеримая на $[0, 1]$ матричная функция $\nabla_x f(t, x_0(t), u_0(t))$ равна: $\nabla_x f^-(t, x_0(t), u_0(t))$ при $t \in A^-$; $\nabla_x f^+(t, x_0(t), u_0(t))$ при $t \in A^+$; $\nabla_x f^0(t, x_0(t), u_0(t))$ при $t \in A_1^0$.

Т е о р е м а 2.2. Пусть $u_0(t)$, $0 \le t \le 1$ – оптимальное управление в разрывной оптимизационной задаче (1.1)–(1.4), и для него выполняется условие B. Пусть $U_t^0 \equiv \{v \in U \mid \exists$ открытая область S_v на поверхности S, $x_0(t) \in S_v$, такая, что $f_N^-(t, x, v) \ge 0$, $f_N^+(t, x, v) \le 0$ для всех $x \in S_v\}$ при $t \in A_1^0$. Тогда существуют вектор $\lambda \in \in R^{\varkappa+1}$, удовлетворяющий соотношениям (2.6), и функции скачков $\chi_i \in \in L_{\infty,n}[0,1]$, $i = \overline{0, \varkappa}$, совпадающие по своим свойствам с функциями скачков из теоремы 2.1, такие, что при п.в. $t \in \bigcup_r (\alpha_r, \beta_r) \bigcup_r (\alpha_r^0, \beta_r^0)$ выполняется равенство (2.7), в котором $W_t \equiv U$ при $t \in A^- \cup A^+$, $W_t \equiv \equiv U_t^0$ при $t \in A_1^0$, а вектор-функции $\psi_i(t)$ и матричные функции $\Phi_r^+(t)$, $\Phi_r^-(t)$, $\Phi_r^0(t)$ удовлетворяют уравнениям (2.8) – (2.10).

Доказательство теоремы 2.1. приводится в разд. 4. Остановимся здесь кратко лишь на его основных моментах (см. также [12]). Сначала (п. 4.1) с помощью вариационного принципа [6] строится последовательность вспомогательных оптимизационных задач, в каждой из которых множество моментов времени $\{t \in [0,1] \mid x_\kappa(t) \in S\}$, где $x_\kappa(t), 0 \le t \le 1$, – оптимальная траектория κ -ой вспомогательной задачи, состоит лишь из конечного числа отрезков и точек. В каждой такой задаче с помощью суперпозиции обычной импульсной (игольчатой) вариации и специальной новой [I2] вариации оптимального управления $v_\kappa(t)$ в моменты входа траектории $x_\kappa(t)$ на поверхность S (п. 4.2) оказывается возможным получить последовательно нужные интегральные представления для приращений функционалов (п. 4.3), их первые вариации (п. 4.4) и, как следствие, необходимые условия оптимальности управления $v_\kappa(t)$ (пп. 4.5, 4.6). Следует отметить, что, если получение в каждой вспомогательной задаче интегральных представлений приращений и первых вариаций функционалов проводится согласно общей оптимизационной методике [I3], то затем для доказательства κ -го вспомогательного принципа максимума в работе применяется новый [I2] прием, связанный с вариационным принципом [6] и вспомогательным функционалом типа максимума $J_\varepsilon(u)$ (п. 4.I), совпадающим по форме с соответствующим функционалом работы [I4]. Получение необходимых условий оптимальности управления $u_0(t)$ первоначальной разрывной задачи заканчивается предельным переходом при $\kappa \to \infty$ (п. 4.7) в семействе вспомогательных необходимых условий.

Доказательство теоремы 2.2 проводится в основном аналогично доказательству теоремы 2.I и по этой причине не приводится в статье. Теоремы 2.I и 2.2 отличаются условиями А и В. Условие А выражает тот факт, что все траектории оптимизационной разрывной задачи входят на поверхность S и выходят с неё под ненулевым углом, равномерно ограниченным снизу некоторой большей нуля постоянной. Следствием условия А является невыпуклость множества управляющих параметров U. В отличие от условия А условие В требует, чтобы под ненулевыми углами (также равномерно ограниченными снизу некоторой большей нуля постоянной) входила на S и выходила с S лишь оптимальная траектория $x_0(t)$. В этом случае множество U может быть, вообще говоря, и выпуклым.

3. Вспомогательные леммы

Сформулируем и докажем ряд вспомогательных лемм, необходимых для доказательства основных результатов. Первые две из этих лемм представляют собой простую переформулировку на случай управляемых систем лемм 3, 8 из [5] соответственно.

Л е м м а 3.I. Пусть $x \in V_{1,n}[0,1]$; $x(t) \in S$, $f_N^-(t, x(t), u(t)) \geq 0$, $f_N^+(t,x(t),u(t)) \leq 0$, $f_N^- - f_N^+ > 0$ при $t \in [t^1, t^2] \subset [0,1]$. Для того, чтобы $x(t)$ было решением системы (I.I) при $t \in [t^1, t^2]$, соответствующим управлению $u(t)$, необходимо и достаточно, чтобы при п.в. $t \in [t^1, t^2]$

$$\frac{dx(t)}{dt} = f^0(t,x(t),u(t)),$$

где $f^0 \equiv \alpha(t) f^+ + (1-\alpha(t)) f^-$, $\alpha(t) \equiv \alpha(t,x(t),u(t)) \equiv \dfrac{f_N^-}{f_N^- - f_N^+}$.

Л е м м а 3.2. Если $f_N^+(t,x,u(t)) \leq 0$ $(f_N^-(t,x,u(t)) \geq 0)$ при $t \in [t^1, t^2]$, $x \in S_0$, где S_0 - кусок поверхности S (открытая область на поверхности S), то при $t \in [t^1, t^2]$ никакое решение системы (I.I) не может выйти с S_0 в область $G^+(G^-)$, не выходя сначала с S_0 в $G^- \cup S \setminus S_0$ $(G^+ \cup S \setminus S_0)$.

Л е м м а 3.3. Пусть задана линейная система

$$\dot{x} = A(t)x + b(t), \quad x(0) = c,$$

где $A \in L_{\infty, n \times n}[0,1]$, $b \in L_{2n}[0,1]$, $c \in R^n$. Тогда, если $x_0(t)$, $0 \leq t \leq 1$, - решение этой системы, то для любой функции $a \in L_{2,n}[0,1]$ и любого вектора $a_1 \in R^n$

$$\int_0^1 (\dot{x}_0(t), a(t))dt + (x(0), a_1) = \int_0^1 (\psi(t), b(t)) + (c, \varphi),$$

а функция $\psi \in L_{2,n}[0,1]$ удовлетворяет линейной системе

$$\psi(t) - \int_t^1 A^*(s)\psi(s)ds = a(t),$$

в которой вектор $\varphi \in R^n$ равен

$$\varphi = a_1 + \int_0^1 A^*(t)\psi(t)dt.$$

Доказательство леммы 3.3 легко проводится с помощью интегрирования по частям (см. также лемму 3 в [8]).

Л е м м а 3.4. Пусть $u_0(t)$ -управление, $x[u_0](t)$, $0 \leq t \leq 1$, - единственное отвечающее ему решение задачи (I.I), (I.2). Пусть $u_\varepsilon(t)$,

$0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$, — такое семейство управлений, что для п.в. $(t,x)\in$ $\in[0,1]\times G$

$$|f(t,x,u_\varepsilon(t))-f(t,x,u_0(t))|\leqslant\psi_\varepsilon(t),$$

где

$$\int_0^1\psi_\varepsilon(t)\,dt\to 0,\qquad \varepsilon\to 0.$$

Тогда существует положительное число ε_1, $0<\varepsilon_1\leqslant\varepsilon_0$, такое что при всех $\varepsilon\in(0,\varepsilon_1]$ управлениям $u_\varepsilon(t)$ отвечают решения $x[u_\varepsilon](t)$, $0\leqslant t\leqslant 1$, задачи (I.I), (I.2) и

$$\|x[u_\varepsilon]-x[u_0]\|_{C_n}\to 0,\quad \varepsilon\to 0.$$

Доказательство леммы 3.4 проводится аналогично доказательству теоремы II из [5].

Пусть $u(t)$ — управление. Обозначим $B[u,\delta]\equiv\{v\in L_{\infty,m}[0,1]\,|\,v(t)\in U$ п.в. на $[0,1]$ и $\exists$ решение $x[v](t)\in G$, $0\leqslant t\leqslant 1$, задачи (I.I), (I.2), $\|v-u\|_{L_{1,m}}\leqslant\delta\}$, $B[x[u],\varepsilon]\equiv\{x\in V_{1,n}[0,1]\,|\,\|x-x[u]\|_{C_n}\leqslant\varepsilon\}$.

Л е м м а 3.5. Для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta(\varepsilon)>0$ такое, что из включения $v\in B[u,\delta(\varepsilon)]$ следует включение $x[v]\in B[x[u],\varepsilon]$.

Утверждение леммы 3.5 есть следствие леммы 3.4 и условия (I.6) на функции f^+, f^- и может быть легко доказано, например, с помощью рассуждения от противного.

Л е м м а 3.6. Пусть выполняется условие A из разд. 2; $u(t)$ — управление, $x[u](t)\in S$ при $t\in[t^1,t^2]$, $0\leqslant t^1<t^2\leqslant 1$; $B[u,\delta;t^1,t^2]\equiv$ $\equiv\{v\in B[u,\delta]\,|\,v(t)\in U_0$ п.в. на $[t^1,t^2]\}$. Тогда для любого $\varepsilon\in(0,t^2-t^1)$ существует $\delta(\varepsilon)>0$ такое, что из включения $v\in B[u,\delta(\varepsilon);t^1,t^2]$ следует включение $x[v]([t^1+\varepsilon,t^2])\subset S$.

Доказательство. Заметим сразу, что из неравенств (2.2)-(2.5) следует, что $u(t)\in U_0$ при п.в. $t\in[t^1,t^2]$, так как в противном случае в силу (2.3), (2.5) траектория $x[u](t)$ сойдет с поверхности S в некоторый момент $\bar t\in(t^1,t^2)$, и, значит, $x[u](t)\notin S$ при $t\in A\subset[t^1,t^2]$, $\operatorname{meas}A>0$, что противоречит условиям леммы. Предположим далее, что утверждение леммы не верно. Тогда существуют число ε_0, $0<\varepsilon_0<t^2-t^1$, и последовательность управлений u_k, $k=1,2,\ldots$, $u_k\in B[u;\delta_k;t^1,t^2]$, $\delta_k\to 0$, $k\to\infty$, такие, что выполняется

$$\|u_k-u\|_{L_{1,m}}\to 0,\ \|x[u_k]-x[u]\|_{C_n}\to 0,\quad k\to\infty, \tag{3.I}$$

но $x[u_k](t)\notin S$ при $t\in(t^1,t^1+\varepsilon_0)$, $k=1,2,\ldots$. Предположим без ограничения общности для определенности, что $x[u_k](t)\in G^-$ при $t\in(t^1,t^1+\varepsilon_0)$, $k=1,2,\ldots$(если траектория $x[u_k](t)$ в момент $t\in[t^1,t^1+\varepsilon_0)$ попадает на поверхность S, то в силу леммы 3.2, условия скольжения (2.4) и включения $u_k\in B[u,\delta_k;t_1,t_2]$ эта траектория останется на S до момента t^2). Имеем с учетом леммы 3.I следующие тождества при $t\in[t^1,t^1+\varepsilon_0]$

$$x[u_k](t)=x[u_k](t^1)+\int_{t_1}^{t} f^-(t,x[u_k](t),u_k(t))\,dt,$$

$$x[u](t)=x[u](t^1)+\int_{t_1}^{t} f^0(t,x[u](t),u(t))\,dt.$$

Вычитая второе тождество из первого и переходя в силу (3.I) к пределу при $k\to\infty$, получаем следующее тождество при $t\in[t^1,t^1+\varepsilon_0]$

$$\alpha(t,x[u](t),u(t))\left[f^+(t,x[u](t),u(t))-f^-(t,x[u](t),u(t))\right]\equiv 0.$$

Последнее тождество невозможно в силу включения $u(t)\in U_0$ при $t\in\in(t^1,\ t^1+\varepsilon_0)$ и неравенств (2.4). Лемма доказана.

4. Доказательство теоремы 2.I

4.I. Последовательность вспомогательных оптимизационных задач

Пусть $u_0(t)$ - оптимальное управление в разрывной оптимизационной задаче (I.I)-(I.4), $x_0(t)\equiv x[u_0](t)$, $0\le t\le 1$, - отвечающее ему решение задачи (I.I), (I.2). Предположим для определенности без ограничения общности, что $x_0(0)=a\in G^-$, $x_0(1)\in G^+$.

Зафиксируем произвольное целое $l>1$ и γ_l такое, что $\gamma_l<(\beta_i-\alpha_i)/2$, $\gamma_l<\beta_i^0-\alpha_i^0$, $i=\overline{1,l}$. Так как множество $A^l_{\gamma_l}\cup A^{0,l}_{1,\gamma_l}$ представляет собой объединение $2l$ открытых интервалов, то

$$[0,1]\setminus(A^l_{\gamma_l}\cup A^{0,l}_{1,\gamma_l})=\bigcup_{i=1}^{2l-1}B_i,\quad \text{где}\quad B_i\equiv[\alpha_i^1,\beta_i^1],\ \alpha_i^1<\beta_i^1.$$

Пусть $u_k^i:B_i\to U$, $k=1,2,\ldots$, $i=\overline{1,2l-1}$, - последовательность кусочно-постоянных функций, таких, что

$$u_k^i(B_i\cap A_1^{0,l})\subset U_0 \tag{4.I}$$

$$\| u_k^i - u_0 \|_{L_{1,m}(B_i)} \to 0, \quad k \to \infty. \tag{4.2}$$

Обозначим: ρ_k^i – число интервалов (a_k^j, b_k^j), $a_k^j < b_k^j$, постоянства функции $u_k^i(t)$ $\left(B_i = \bigcup_{j=1}^{\rho_k^i} [a_k^j, b_k^j]\right)$. Обозначим:

$u_k(t) = \{u_0(t),\ t \in A_{\gamma_l}^l \cup A_{1,\gamma_l}^{0,l};\ u_k^i(t),\ t \in B_i,\ i = \overline{1, 2l-1}\}$

Из (4.2) следует, что

$$\| u_k - u_0 \|_{L_{1,m}} \to 0, \quad k \to \infty. \tag{4.3}$$

В силу лемм 3.4, 3.5 будем без ограничения общности считать, что каждому управлению $u_k(t)$, $k = 1, 2, \dots$, отвечает решение $x[u_k](t)$, $0 \le t \le 1$, и

$$\| x[u_k] - x_0 \|_{C_n} \to 0, \quad k \to \infty; \tag{4.4}$$

$$\inf_{x \in G \cap S} d(x, x[u_k](A_{\gamma_l}^l)) \ge \mu_{\gamma_l}^l - \nu, \tag{4.5}$$

где ν, $0 < \nu < \mu_{\gamma_l}^l$ – достаточно малое число (определение числа μ_γ^l см. в разд. 2). Кроме того, в силу включения (4.I) и леммы 3.6) будем также считать, что

$$x[u_k](A_{1,\gamma_l}^{0,l}) \subset S. \tag{4.6}$$

Так как на каждом из отрезков B_i, $i = \overline{1, 2l-1}$ управление $u_k(t)$ кусочно-постоянно, то в силу неравенств (2.2) – (2.5) множество $A_k^{0,l} \equiv \{t \in B_i \mid x[u_k](t) \in S\}$ представляет собой объединение попарно непересекающихся отрезков и точек, общее число которых не более чем ρ_k^i. Таким образом, множество $A_k^0 \equiv \{t \in [0,1] \mid x[u_k](t) \in S\}$ с учетом (4.6) есть объединение не более чем $\sum_{i=1}^{2l-1} \rho_k^i + l$ изолированных отрезков и точек.

Пусть $G_1 \subset G$ – строго внутренняя подобласть области G, $\bar{G}_1 \subset G$, и $x_0(t) \in G_1$ при $t \in [0,1]$. Пусть далее $\varepsilon_0 > 0$ – такое достаточно малое число, что для любого $u \in B[u_0, \varepsilon_0; A_1^{0,l}] \equiv \{u \in B[u_0, \varepsilon_0] \mid u(t) \in U_0$ п.в. на $A_1^{0,l}\}$ выполняются неравенство (4.5) и включение (4.6) при $u_k \equiv u$. Такое $\varepsilon_0 > 0$ существует в сиду лемм 3.5, 3.6. Организуем следующее множество управлений D_κ, $\kappa=1,2,\ldots$ Будем считать управление $u\in B[u_0,\varepsilon_0;A^{0,l}_1]$ принадлежащим множеству D_κ, если: I) на каждом из отрезков B_i, $i=\overline{1,2l-1}$, управление $u(t)$ кусочно-постоянно (на каждом интервале постоянства функция $u(t)$ п.в. равна постоянной) и имеет не более чем p^i_κ интервалов постоянства; 2) $x[u](t)\in \bar{G}_1$ при $0\le t\le 1$. Из построения множества D_κ следует, что для любого управления $u\in D_\kappa$ (так же как и для управления $u_\kappa\in D_\kappa$) множество $A^0_u\equiv\{t\in[0,1]\,|\,x[u](t)\in S\}$ в силу неравенств (2.2) - (2.5) есть объединение не более чем $\sum\limits_{i=1}^{2l-1}p^i_\kappa+l$ изолированных отрезков и точек.

Определим на множестве D_κ, $\kappa=1,2,\ldots$ метрику [6]

$$\rho(u_1,u_2)\equiv \operatorname{meas}\{t\in[0,1]\,|\,u_1(t)\neq u_2(t)\},$$

превратив его тем самым в полное метрическое пространство. Из сходимости последовательности управлений в метрике ρ в силу леммы 3.4 и условия (I.6) следует сходимость в метрике $C_n[0,1]$ соответствующих траекторий. Поэтому в силу все того же условия (I.6) функционалы $I_i(u)$, $i=\overline{0,\varkappa}$, ограничены и непрерывны на полном метрическом пространстве D_κ, откуда в свою очередь следует, что и функционал (ср. с [I4])

$$J_\varepsilon(u)\equiv \max\{I_0(u)-I_0(u_0)+\varepsilon,\ I_1(u),\ldots,I_{\varkappa_1}(u),\ |I_{\varkappa_1+1}(u)|,\ldots,|I_\varkappa(u)|\}$$

ограничен и непрерывен на D_κ, $\varepsilon>0$.

Так как $J_{1/\kappa}(u)>0$ при всех $u\in D_\kappa$ и из (4.3), (4.4) следует, что $J_{1/\kappa}(u_\kappa)\to 0$ при $\kappa\to\infty$, то очевидно существует последовательность положительных чисел ε_κ, $\kappa=1,2,\ldots$, $\varepsilon_\kappa\to 0$ при $\kappa\to\infty$ такая, что

$$J_{1/\kappa}(u_\kappa)\le \inf_{u\in D_\kappa} J_{1/\kappa}(u)+\varepsilon_\kappa .$$

Применяя в силу последнего неравенства вариационный принцип [6] к функционалу $J_{1/\kappa}(u)$, получаем управление $v_\kappa\in D_\kappa$, минимизирующее функционал

$$J_{1/\kappa}(u)+\sqrt{\varepsilon_\kappa}\,\rho(u,v_\kappa),\quad u\in D_\kappa, \tag{4.7}$$

и удовлетворяющее неравенству

$$\rho(u_\kappa,v_\kappa)\le\sqrt{\varepsilon_\kappa},\qquad \kappa=1,2,\ldots \tag{4.8}$$

4.2. Специальное варьирование управления $v_K \in D_K$

Пусть $v(t)$ – такое произвольное управление из D_K, для которого выполняется строгое неравенство

$$\inf_{x \in G \cap S} d(x, x[v](A^l_{\gamma_l})) > \mu^l_{\gamma_l} - \vartheta, \tag{4.9}$$

включение

$$x[v](A^{0,l}_{1,\gamma_l - \vartheta_1}) \subset S, \tag{4.10}$$

где ϑ_1, $0 < \vartheta_1 < \gamma_l$ – фиксированное число, и включение

$$x[v](t) \in G_1, \quad 0 \le t \le 1. \tag{4.11}$$

Обозначим $\tau^1, \tau^2, \ldots, \tau^{2p}$, $p > 1$ – моменты входа ($\tau^1, \tau^3, \ldots, \tau^{2p-1}$) на поверхность S и моменты схода ($\tau^2, \tau^4, \ldots, \tau^{2p}$) с неё траектории $x[v](t)$. Предположим для определенности, не ограничивая общности, что $0 < \tau^1 < \tau^2 < \ldots < \tau^{2p-1} < \tau^{2p} < 1$. Случай равенства $\tau^{2i-1} = \tau^{2i}$ для некоторых или всех $i = \overline{1,p}$ рассматривается совершенно аналогично. Заметим, что в силу неравенства (4.9), включения (4.10) и взаимного расположения множеств $A^l_{\gamma_l} \cup A^{0,l}_{1,\gamma_l}, \bigcup_{i=1}^{2l-1} B_i$ все точки входа траектории $x[v](t)$ на поверхность S принадлежат внутренности множества $\bigcup_{i=1}^{2l-1} B_i$.

Предположим, что управление $v(t)$ на всех интервалах постоянства, принадлежащих отрезкам B_i, $i = \overline{1, 2l-1}$, доопределено по непрерывности, а в точках разрыва непрерывно слева.

Пусть далее $v_\varepsilon(t)$, $0 < \varepsilon < \bar{\varepsilon}$, $\bar{\varepsilon} > 0$ – фиксированное число, такое семейство управлений из D_K, что $v_\varepsilon(t) \equiv v(t)$ при $t \in \bigcup_{i=1}^{2l-1} B_i$, и

$$\rho(v_\varepsilon, v) \to 0, \quad \varepsilon \to 0; \tag{4.12}$$

$w_\varepsilon(t)$ – вспомогательная функция, равная

$$w_\varepsilon(t) = \begin{cases} w \in R^n, & t \in (\bar{t} - \varepsilon, \bar{t}),\ \bar{t} \in (0,1),\ \bar{t} \ne \tau^i,\ i = \overline{1,2p}, \\ 0 \in R^n, & t \in [0,1] \setminus (\bar{t} - \varepsilon, \bar{t}) \end{cases} \tag{4.13}$$

где вспомогательный вектор w удовлетворяет неравенству $|w| \le 1$, причём, если $x[v](\bar{t}) \in S$, то $f_N^-(t,x,u,w_\varepsilon(t)) \ge \mu_1/2$, $f_N^+(t,x,u,w_\varepsilon(t)) \le -\mu_1/2$ при $t \in [0,1]$, $x \in S \subset G$, $u \in U_0$; $f^\pm(t,x,u,w_\varepsilon(t)) \equiv f^\pm(t,x,u) + w_\varepsilon(t)$.

Так как $\operatorname{meas}\{t \in [0,1] \mid w_\varepsilon(t) \ne 0\} = \varepsilon$, то, не ограничивая общности, можно считать (см. теорему II в [5] и леммы 3.4 - 3.6), что при всех $\varepsilon \in (0,\bar{\varepsilon})$ существует решение $x[v_\varepsilon, w_\varepsilon]$, $0 \le t \le 1$ задачи

$$\dot{x} = f(t,x,u(t),w_\varepsilon(t)) \equiv f(t,x,u(t)) + w_\varepsilon(t),\ x(0) = a \qquad (4.14)$$

при $u(t) \equiv v_\varepsilon(t)$ (решение задачи (4.14) при $u(t) \equiv v_\varepsilon(t)$ вообще говоря, не единственно, но в качестве $x[v_\varepsilon, w_\varepsilon](t)$ можно взять любое из этих решений) и

$$\| x[v_\varepsilon, w_\varepsilon] - x[v] \|_{C_n} \to 0, \quad \varepsilon \to 0, \qquad (4.15)$$

а траектория $x[v_\varepsilon, w_\varepsilon](t)$ удовлетворяет неравенству (4.9), включению (4.11) и включению

$$x[v_\varepsilon, w_\varepsilon](A^{0,l}_{1,\gamma_l - \vartheta_2}) \subset S, \qquad (4.16)$$

где ϑ_2, $0 < \vartheta_2 < \gamma_l$ - фиксированное число.

В силу теоремы II из [5] и включения $v(\tau^1) \in U_- \cup U_0$ при $\varepsilon \in (0,\varepsilon_1)$, $\varepsilon_1 < \bar{\varepsilon}$ ($\varepsilon_1 > 0$ - достаточно малое число) существует "первый" момент времени τ^1_ε, для которого $g(x[\bar{v}_\varepsilon, w_\varepsilon](\tau^1_\varepsilon)) = 0$, где $x[\bar{v}_\varepsilon, w_\varepsilon](t)$ - решение задачи (4.14) при $t \in [0, \tau^1 + \beta_1]$ ($\beta_1 > 0$ - достаточно малое число), $u(t) \equiv \bar{v}_\varepsilon(t) = \{v_\varepsilon(t),\ t \in [0,\tau^1];\ v(\tau^1),\ t \in (\tau^1, \tau^1 + \beta_1]\}$ и

$$\tau^1_\varepsilon < \tau^1 + \beta_1,\ \ \tau^1_\varepsilon \to \tau^1, \quad \varepsilon \to 0. \qquad (4.17)$$

Сходимость (4.17) доказывается с помощью рассуждений, аналогичных рассуждениям при доказательстве леммы 3.6, см. также [8, 9]. Организуем при $\varepsilon < \varepsilon_1$ новое семейство управлений $v^1_\varepsilon(t) \equiv \{\bar{v}_\varepsilon(t),\ t \in [0,\tau^1_\varepsilon];\ v(\tau^1 + 0),\ t \in (\tau^1_\varepsilon, \tau^1);\ v_\varepsilon(t),\ t \in [\tau^1_0, 1]\}$, если $\tau^1_\varepsilon < \tau^1$, и управление $v(t)$ разрывно в τ^1; $v^1_\varepsilon(t) \equiv \{\bar{v}_\varepsilon(t),\ t \in [0,\tau^1_\varepsilon];\ v_\varepsilon(t),\ t \in (\tau^1_\varepsilon, 1]\}$, если $\tau^1_\varepsilon \ge \tau^1$, и управление $v(t)$ разрывно в τ^1 ; $v^1_\varepsilon(t)\equiv v_\varepsilon(t)$, если управление $v(t)$ непрерывно в τ^1.

Из (4.12), (4.17) и теоремы II в [5] следует:

$$\rho(v^1_\varepsilon, v)\to 0,\ \|x[v^1_\varepsilon, w_\varepsilon]-x[v]\|_{C_n}\to 0,\quad \varepsilon\to 0. \qquad (4.18)$$

В силу (4.18) можно без ограничения общности считать, что при $\varepsilon<\varepsilon_1$ траектория $x[v^1_\varepsilon, w_\varepsilon](t)$ удовлетворяет также неравенству (4.9), включениям (4.11), (4.16), откуда следует, что $v^1_\varepsilon\in D_K$ в случае $w=0$ $(x[v^1_\varepsilon,0]\equiv x[v^1_\varepsilon])$.

Так как при $\varepsilon<\varepsilon_1$ управление $v^1_\varepsilon(t)\in U_0$ при $t\in[\tau^1_\varepsilon,\tau^2]$ (это следует из устройства семейства $v^1_\varepsilon(t)$, $\varepsilon>0$, и из включения $\tau^1_\varepsilon\in\operatorname{int}\bigcup\limits_{i=1}^{2l-1}B_i$, которое выполняется ввиду включения $\tau^1\in\operatorname{int}\bigcup\limits_{i=1}^{2l-1}B_i$ и сходимости (4.17)), то траектория $x[v^1_\varepsilon,w_\varepsilon](t)$ на этом отрезке по лемме 3.2 будет принадлежать поверхности разрыва S (выполняются условия скольжения). Далее в силу опять же устройства семейства $v^1_\varepsilon(t)$ можно без ограничения общности считать, что при $\varepsilon<\varepsilon_1$ траектория $x[v^1_\varepsilon,w_\varepsilon](t)$ в момент времени τ^2 сойдет с поверхности S, так как в течение некоторого промежутка времени $\tau^2<t<\tau^2+\alpha$, $\alpha>0$, либо $v^1_\varepsilon(t)\in U_-$, либо $v^1_\varepsilon(t)\in U_+$ (условие скольжения нарушается).

Рассуждая аналогично, находим далее такое достаточно малое $\varepsilon_3>0$, $\varepsilon_3<\varepsilon_1<\bar\varepsilon$, что при $\varepsilon<\varepsilon_3$ траектория $x[\bar v^1_\varepsilon, w_\varepsilon](t)$ системы (4.14) при $t\in[0,\tau^3+\beta_3]$ ($\beta_3>0$ – достаточно малое число), $u(t)\equiv\bar v^1_\varepsilon(t)=\{v^1_\varepsilon(t),\ t\in[0,\tau^3];\ v(\tau^3),\ t\in[\tau^3,\tau^3+\beta_3]\}$ $(v(\tau^3)\in U_+\cup U_0)$ попадает на поверхность S в "первый" (после τ^2) момент времени τ^3_ε (оставаясь вне S при $t\in(\tau^2,\tau^3_\varepsilon)$) и $\tau^3_\varepsilon<\tau^3+\beta_3$, $\tau^3_\varepsilon\to\tau^3$ при $\varepsilon\to 0$. Строя таким образом последовательно семейства управлений v^3_ε, v^5_ε, ..., мы в конце этого процесса перестройки семейства $v_\varepsilon(t)$ получим семейство управлений $\tilde v_\varepsilon(t)\equiv v^{2p-1}_\varepsilon(t)$, $\varepsilon<\tilde\varepsilon\equiv\varepsilon_{2p-1}<\ldots<\varepsilon_3<\varepsilon_1<\bar\varepsilon$, такое, что

$$\tau^{2i-1}_\varepsilon\longrightarrow\tau^{2i-1},\quad i=\overline{1,p},\quad \varepsilon\longrightarrow 0; \qquad (4.19)$$

$$\rho(\tilde v_\varepsilon, v)\to 0,\ \|x[\tilde v_\varepsilon, w_\varepsilon]-x[v]\|_{C_n}\to 0,\ \varepsilon\to 0 \qquad (4.20)$$

и $\tilde v_\varepsilon\in D_K$ в случае $w=0$ $(w_\varepsilon(t)\equiv 0)$, $\varepsilon<\tilde\varepsilon$, $(x[\tilde v_\varepsilon,0]\equiv x[\tilde v_\varepsilon])$.

Обозначим теперь $\tau^1_K,\tau^2_K,\ldots,\tau^{2p_K}_K$ точки входа на поверхность S и точки схода с неё траектории $x[v_K](t)$. Предположим для определенности, не ограничивая общности, что $\tau_k^{2i-1} < \tau_k^{2i}$, $i = \overline{1, p_k}$ и, кроме того, $x[v_k](t) \in G^-$ при $t \in [0, \tau_k^1)$, $x[v_k](t) \in S$ при $t \in [\tau_k^1, \tau_k^2]$, $x[v_k](t) \in G^+$ при $t \in (\tau_k^2, \tau_k^3), \ldots, x[v_k](t) \in G^+$ при $t \in (\tau_k^{2p_k}, 1]$. Другие случаи расположения траектории $x[v_k](t)$ относительно поверхности S исследуются совершенно аналогично.

Пусть $\{t_i\}$, $i = \overline{1, i_1}$, $t_i \in \operatorname{int}(A^l_{\gamma_l} \cup A^{0,l}_{1,\gamma_l})$ – произвольный конечный набор попарно различных точек Лебега управления $v_k(t)$; $\{\gamma_i^j\}$, $i = \overline{1, i_1}$, $j = \overline{1, j_i}$, – произвольный конечный набор неотрицательных чисел, $\sum\limits_{i=1}^{i_1} \sum\limits_{j=1}^{j_i} \gamma_i^j \le 1$; $\{u_{ij}\}$, $i = \overline{1, i_1}$, $j = \overline{1, j_i}$ – произвольный конечный набор векторов из U. Обозначим: $T^\varepsilon_{ij} \equiv \{t \in R^1 \mid t_i - \varepsilon \sum\limits_{k=1}^{j} \gamma_i^k \le \le t \le t_i - \varepsilon \sum\limits_{k=1}^{j-1} \gamma_i^k\}$. Пусть $\bar\varepsilon > 0$ – столь малое число, что при $\varepsilon < \bar\varepsilon$ все отрезки T^ε_{ij} попарно не пересекаются и принадлежат внутренности множества $A^l_{\gamma_l} \cup A^{0,l}_{1,\gamma_l}$ (очевидно, $\bar\varepsilon > 0$ зависит от набора $\{t_i\}$, $\{\gamma_i^j\}$). Зададим семейство управлений $v_{k,\varepsilon} \in D_k$, $\varepsilon < \bar\varepsilon$, следующим образом

$$v_{k,\varepsilon}(t) \equiv \begin{cases} v_k(t), & t \in [0,1] \setminus \bigcup\limits_{ij} T^\varepsilon_{ij}, \\ u_{ij} \in U_0, & t \in T^\varepsilon_{ij}, \; t_i \in A^{0,l}_{1,\gamma_l}, \\ u_{ij} \in U, & t \in T^\varepsilon_{ij}, \; t_i \in A^l_{\gamma_l}, \; \varepsilon < \bar\varepsilon. \end{cases}$$

Из (4.3), (4.8) и леммы 3.5 следует

$$\| v_k - u_0 \|_{L_{1,m}} \to 0, \quad \| x[v_k] - x_0 \|_{C_n} \to 0, \quad k \to \infty, \tag{4.21}$$

а из конструкции $v_{k,\varepsilon}(t)$ вытекает

$$\rho(v_{k,\varepsilon}, v_k) \to 0, \quad \varepsilon \to 0. \tag{4.22}$$

В силу (4.21) и лемм 3.5, 3.6 будем без ограничения общности считать, что управление $v_k(t)$, $k = 1, 2, \ldots$ удовлетворяет неравенству (4.9), включениям (4.10), (4.11). Применяя с учетом (4.22) к семейству $v_{k,\varepsilon}(t)$, $\varepsilon < \bar\varepsilon$, описанный в настоящем пункте процесс перестройки, получаем новое семейство управлений $\tilde{v}_{\kappa,\varepsilon}(t)$, $\varepsilon < \tilde{\varepsilon}$; $\tilde{v}_{\kappa,\varepsilon} \in D_\kappa$ в случае $w = 0$,

$$\rho(\tilde{v}_{\kappa,\varepsilon}, v_\kappa) \to 0, \ \| x[\tilde{v}_{\kappa,\varepsilon}, w_\varepsilon] - x[v_\kappa] \|_{C_n} \to 0, \quad \varepsilon \to 0. \quad (4.23')$$

4.3. Интегральные представления для приращений $\Delta_\varepsilon I_i \equiv I_i(\tilde{v}_{\kappa,\varepsilon}) - I_i(v_\kappa)$

Получим специальные выражения для приращений $\Delta_\varepsilon I_i$, $i = \overline{0,\varkappa}$, предполагая для определенности и компактности записи, что $\tau^{2i-1}_{\kappa,\varepsilon} < \tau^{2i-1}_\kappa$, $i = \overline{1,p_\kappa}$ и $w = 0$, $(x[\tilde{v}_{\kappa,\varepsilon}, 0] \equiv x[\tilde{v}_{\kappa,\varepsilon}])$. Случаи $\tau^{2i-1}_{\kappa,\varepsilon} > \tau^{2i-1}_\kappa$, $w \neq 0$ рассматриваются точно так же. Имеем, $x[\tilde{v}_{\kappa,\varepsilon}](t) \equiv x_\varepsilon(t)$, $x[v_\kappa](t) \equiv x_\kappa(t)$,

$$\Delta_\varepsilon \dot{x}_\kappa(t) \equiv \dot{x}_\varepsilon(t) - \dot{x}_\kappa(t) = f(t, x_\varepsilon(t), \tilde{v}_{\kappa,\varepsilon}(t)) - f(t, x_\kappa(t), v_\kappa(t)) =$$

$$= \begin{cases} f^-(t, x_\varepsilon(t), \tilde{v}_{\kappa,\varepsilon}(t)) - f^-(t, x_\kappa(t), v_\kappa(t)), & 0 \le t < \tau^1_{\kappa,\varepsilon}; \\ f^0(t, x_\varepsilon(t), \tilde{v}_{\kappa,\varepsilon}(t)) - f^-(t, x_\kappa(t), v_\kappa(t)), & \tau^1_{\kappa,\varepsilon} \le t < \tau^1_\kappa, \\ f^0(t, x_\varepsilon(t), \tilde{v}_{\kappa,\varepsilon}(t)) - f^0(t, x_\kappa(t), v_\kappa(t)), & \tau^1_\kappa \le t \le \tau^2_\kappa; \\ f^+(t, x_\varepsilon(t), \tilde{v}_{\kappa,\varepsilon}(t)) - f^+(t, x_\kappa(t), v_\kappa(t)), & \tau^2_\kappa < t < \tau^3_{\kappa,\varepsilon}; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ f^+(t, x_\varepsilon(t), \tilde{v}_{\kappa,\varepsilon}(t)) - f^+(t, x_\kappa(t), v_\kappa(t)), & \tau^{2p_\kappa}_\kappa < t \le 1. \end{cases} \quad (4.24)$$

Введем обозначения: $\Delta_u f(x(t), v(t), u(t)) \equiv f(t, x(t), v(t)) - f(t, x(t), u(t))$, $\Delta_u F_i(x(t), v(t), u(t)) \equiv F_i(t, x(t), v(t)) - F_i(t, x(t), u(t))$, $\Delta_\varepsilon x_\kappa(t) \equiv x[\tilde{v}_{\kappa,\varepsilon}](t) - x[v_\kappa](t)$. Применяя формулу конечных приращений и интегрируя по частям, имеем

$$\Delta_\varepsilon I_i(v_\kappa)\equiv h_i(x_\varepsilon(1))-h_i(x_\kappa(1))+$$

$$+\int_0^1\left[F_i(t,x_\varepsilon(t),\tilde v_{\kappa,\varepsilon}(t))-F_i(t,x_\kappa(t),v_\kappa(t))\right]dt=$$

$$=\int_0^1\Big(\int_0^1\nabla_x h_i(x_\kappa(1)+\gamma\Delta_\varepsilon x_\kappa(1))d\gamma,\Delta_\varepsilon\dot x_\kappa(t)\Big)dt+ \tag{4.25}$$

$$+\int_0^1\Big(\int_t^1\int_0^1\nabla_x F_i(t,x_\kappa(t)+\gamma\Delta_\varepsilon x_\kappa(t),\tilde v_{\kappa,\varepsilon}(t))d\gamma dt,\Delta_\varepsilon\dot x_\kappa(t)\Big)dt+$$

$$+\int_0^1\Delta_u F_i(x_\kappa(t),\tilde v_{\kappa,\varepsilon}(t),v_\kappa(t))dt.$$

Линеаризуя систему (4.24) и применяя к полученной линеаризованной системе и линейному функционалу, представляющему собой сумму первых двух слагаемых (4.25), лемму 3.3, получаем следующее представление для $\Delta_\varepsilon I_i(v_\kappa)$, $i=\overline{0,\varkappa}$,

$$\Delta_\varepsilon I_i(v_\kappa)=\int_0^{\tau_\kappa^1}(\psi_{i,\varepsilon}^\kappa(t),\Delta_u f^-(x_\kappa(t),\tilde v_{\kappa,\varepsilon}(t),v_\kappa(t)))dt+$$

$$+\int_{\tau_\kappa^1}^{\tau_\kappa^2}(\psi_{i,\varepsilon}^\kappa(t),\Delta_u f^0(x_\kappa(t),\tilde v_{\kappa,\varepsilon}(t),v_\kappa(t)))dt+$$

$$+\int_{\tau_\kappa^2}^{\tau_\kappa^3}(\psi_{i,\varepsilon}^\kappa(t),\Delta_u f^+(x_\kappa(t),\tilde v_{\kappa,\varepsilon}(t),v_\kappa(t)))dt+$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+\int_{\tau^{2p_\kappa}}^1(\psi_{i,\varepsilon}^\kappa(t),\Delta_u f^+(x_\kappa(t),\tilde v_{\kappa,\varepsilon}(t),v_\kappa(t)))dt+ \tag{4.26}$$

$$+\int_{\tau_{\kappa,\varepsilon}^1}^{\tau_\kappa^1}(\psi_{i,\varepsilon}^\kappa(t),\{\alpha(t,x_\varepsilon(t),\tilde v_{\kappa,\varepsilon}(t))\big[f^+(t,x_\varepsilon(t),\tilde v_{\kappa,\varepsilon}(t))-$$

$$-f^-(t,x_\varepsilon(t),\tilde v_{\kappa,\varepsilon}(t))\big]+f^-(t,x_\varepsilon(t),\tilde v_{\kappa,\varepsilon}(t))-$$

$$- f_1^-(t, x_\kappa(t), v_\kappa(t))\}\Big) dt + \ldots\ldots\ldots\ldots +$$

$$+ \int_0^{\kappa} \Delta_u F_i(x_\kappa(t), \tilde{v}_{\kappa,\varepsilon}(t) v_\kappa(t)) dt,$$

где функция $\psi^{\kappa}_{i,\varepsilon}(t)$, $0 \le t \le 1$, – решение системы

$$\psi^{\kappa}_{i,\varepsilon}(t) - \int_t^1\int_0^1 \nabla_x^* f(t, x_\kappa(t) + \gamma\Delta_\varepsilon x_\kappa(t), \tilde{v}_{\kappa,\varepsilon}(t)) d\gamma\, \psi^{\kappa}_{i,\varepsilon}(t) dt = \tag{4.27}$$

$$= \int_t^1\int_0^1 \nabla_x F_i(t, x_\kappa(t) + \gamma\Delta_\varepsilon x_\kappa(t), \tilde{v}_{\kappa,\varepsilon}(t)) d\gamma dt + \int_0^1 \nabla_x h_i(x_\kappa(1) + \gamma\Delta_\varepsilon x_\kappa(1)) d\gamma,$$

в которой $\nabla_x f(t, x_\kappa(t) + \gamma\Delta_\varepsilon x_\kappa(t), \tilde{v}_{\kappa,\varepsilon}(t)) \equiv$

$$\equiv \begin{cases} \nabla_x f^-(t, x_\kappa(t) + \gamma\Delta_\varepsilon x_\kappa(t), \tilde{v}_{\kappa,\varepsilon}(t)), & 0 \le t < \tau^1_\kappa; \\ \nabla_x f^0(t, x_\kappa(t) + \gamma\Delta_\varepsilon x_\kappa(t), \tilde{v}_{\kappa,\varepsilon}(t)), & \tau^1_\kappa \le t \le \tau^2_\kappa; \\ \nabla_x f^+(t, x_\kappa(t) + \gamma\Delta_\varepsilon x_\kappa(t), \tilde{v}_{\kappa,\varepsilon}(t)), & \tau^2_\kappa < t < \tau^3_\kappa; \ldots; \\ \nabla_x f^+(t, x_\kappa(t) + \gamma\Delta_\varepsilon x_\kappa(t), \tilde{v}_{\kappa,\varepsilon}(t)), & \tau^{2p_\kappa}_\kappa < t \le 1 \end{cases}.$$

4.4. Первые вариации $\delta I_i \equiv \lim\limits_{\varepsilon \to 0} [\Delta_\varepsilon I_i(v_\kappa)/\varepsilon]$ функционалов I_i

Вычислим первую вариацию δI_i, $i = \overline{0, æ}$, предполагая, как и в п. 4.3, что вспомогательный вектор $w = 0$. Выпишем с этой целью выражение для предела $A^{\kappa}_{2i+1} \equiv \lim\limits_{\varepsilon \to 0} [(\tau^{2i+1}_\kappa - \tau^{2i+1}_{\kappa,\varepsilon})/\varepsilon]$, $i = \overline{0, p_\kappa - 1}$. Следуя [8, 9], с помощью леммы 3.3 имеем следующее выражение для A^{κ}_1 (аналогичный предел подсчитывается также в [I5])

$$A^{\kappa}_1 = \Big(\nabla_x g(x_\kappa(\tau^1_\kappa)), \sum_{(i)_1}\sum_{j=1}^{j_i} \gamma^j_i (E + \Phi^*_{\kappa,1}(t_i)) \times$$

$$\times \Delta_u f^-(x_\kappa(t_i), u_{ij}, v_\kappa(t_i))\Big)\Big/\big(\nabla_x g(x_\kappa(\tau^1_\kappa)), f^-(\tau^1_\kappa, x_\kappa(\tau^1_\kappa), v_\kappa(\tau^1_\kappa))\big), \tag{4.28}$$

где $\sum_{(i)_1}$ означает суммирование лишь по тем точкам t_i, которые попали в интервал $(0, \tau_K^1)$, E – единичная $(n\times n)$-матрица, а $(n\times n)$-матрица $\Phi_{K,1}(t)$, $0\le t\le \tau_K^1$ – есть решение системы

$$\Phi_{K,1}(t)-\int_t^{\tau_K^1}\nabla_x^* f^-(t,x_K(t),v_K(t))\,\Phi_{K,1}(t)\,dt = \tag{4.29}$$
$$= \int_t^{\tau_K^1}\nabla_x^* f^-(t,x_K(t),v_K(t))\,dt\ .$$

По аналогии с (4.28) получаем рекуррентное представление для A^K_{2S+1}, $S=\overline{1,P_K-1}$,

$$A^K_{2S+1}=\Big(\nabla_x g(x_K(\tau_K^{2S+1})),\sum_{(i)_{2S+1}}\sum_{j=1}^{J_i}\gamma_i^j(E+\Phi^*_{K,2S+1}(t))\times$$
$$\times\Delta_u f^{\pm}(x_K(t_i),u_{ij},v_K(t_i))+\Phi^*_{K,2S+1}(\tau_K^{2S})B^K_{2S}+B^K_{2S}\Big)/ \tag{4.30}$$
$$/\big(\nabla_x g(x_K(\tau_K^{2S+1})),\ f^{\pm}(\tau_K^{2S+1},x_K(\tau_K^{2S+1}),v_K(\tau_K^{2S+1}))\big),$$

где $\sum_{(i)_S}$ означает суммирование лишь по тем точкам, t_i которые попали в интервал $(\tau_K^{S-1},\tau_K^{S})$; $f^{\pm}(\tau_K^{2S-1},x_K(\tau_K^{2S-1}),v_K(\tau_K^{2S-1}))\equiv$ $\equiv(f^+(\tau_K^{2S-1},x_K(\tau_K^{2S-1}),v_K(\tau_K^{2S-1}))$, если $x_K(t)\in G^+$ при $t\in(\tau_K^{2S-2},\tau_K^{2S-1})$; $f^-(\tau_K^{2S-1},x_K(\tau_K^{2S-1}),v_K(\tau_K^{2S-1}))$, если $x_K(t)\in G^-$ при $t\in(\tau_K^{2S-2},\tau_K^{2S-1})$;

$$B^K_{2S}\equiv\lim_{\varepsilon\to 0}\left[(x_\varepsilon(\tau_K^{2S})-x_K(\tau_K^{2S}))/\varepsilon\right]=$$
$$=(E+\Phi^*_{K,2S}(\tau_K^{2S-1}))(B^K_{2S-2}+\Phi^*_{K,2S-1}(\tau_K^{2S-2})B^K_{2S-2}+$$
$$+\sum_{(i)_{2S-1}}\sum_{j=1}^{J_i}\gamma_i^j(E+\Phi^*_{K,2S-1}(t_i))\Delta_u f^{\pm}(x_K(t_i),u_{ij},v_K(t_i))+ \tag{4.31}$$
$$+(E+\Phi^*_{K,2S}(\tau_K^{2S-1}))(\nabla_x g(x_K(\tau_K^{2S-1})),B^K_{2S-2}+\Phi^*_{K,2S-1}(\tau_K^{2S-2})B^K_{2S-2}+$$

$$+\sum_{(i)_{2s-1}}\sum_{j=1}^{j_i}\gamma_i^j(E+\Phi^*_{\kappa,2s-1}(t_i))\Delta_u f^{\pm}(x_\kappa(t_i),u_{ij},v_\kappa(t_i))\times$$

$$\times(f^0(\tau_\kappa^{2s-1},x_\kappa(\tau_\kappa^{2s-1}),v_\kappa(\tau_\kappa^{2s-1}+0))-f^{\pm}(\tau_\kappa^{2s-1},x_\kappa(\tau_\kappa^{2s-1}),v_\kappa(\tau_\kappa^{2s-1})))/$$

$$/(\nabla_x g(x_\kappa(\tau_\kappa^{2s-1})),f^{\pm}(\tau_\kappa^{2s-1},x_\kappa(\tau_\kappa^{2s-1}),v_\kappa(\tau_\kappa^{2s-1})))+$$

$$+\sum_{(i)_{2s}}\sum_{j=1}^{j_i}\gamma_i^j(E+\Phi^*_{\kappa,2s}(t_i))\Delta_u f^0(x_\kappa(t_i),u_{ij},v_\kappa(t_i)),\ B_0^\kappa=0,\ s=\overline{1,p_\kappa},$$

а матрицы $\Phi_{\kappa,2s-1}(t)$, $\Phi_{\kappa,2s}(t)$ есть решения систем

$$\Phi_{\kappa,2s-1}(t)-\int_t^{\tau_\kappa^{2s-1}}\nabla_x^* f^{\pm}(t,x_\kappa(t),v_\kappa(t))\Phi_{\kappa,2s-1}(t)=$$
$$=\int_t^{\tau_\kappa^{2s-1}}\nabla_x^* f^{+}(t,x_\kappa(t),v_\kappa(t))dt,\quad \tau_\kappa^{2s-2}\le t\le\tau_\kappa^{2s-1},\tag{4.32}$$

$$\Phi_{\kappa,2s}(t)-\int_t^{\tau_\kappa^{2s}}\nabla_x^* f^{0}(t,x_\kappa(t),v_\kappa(t))\Phi_{\kappa,2s}(t)=$$
$$=\int_t^{\tau_\kappa^{2s}}\nabla_x^* f^{0}(t,x_\kappa(t),v_\kappa(t))dt,\quad \tau_\kappa^{2s-1}\le t\le\tau_\kappa^{2s}.\tag{4.33}$$

Заметим сразу, что с помощью леммы Гронуолла (см. например, [I6], с I89) в силу условий (I.6) на f легко устанавливается оценка ($\tau_\kappa^0=0$)

$$\|\Phi_{\kappa,s}\|_{C_{n\times n}(\tau_\kappa^{s-1},\tau_\kappa^s)}\le C_1(\tau_\kappa^s-\tau_\kappa^{s-1}),\quad s=\overline{1,2p_\kappa},\tag{4.34}$$

в которой постоянная $C_1>0$ зависит лишь от K и не зависит от $s=\overline{1,2p_\kappa}$, $\kappa=1,2,\dots$, $l=1,2,\dots,\gamma_l$.

Из условия (I.6) и сходимости (4.23) следует

$$\|\psi_{i,\varepsilon}^\kappa-\psi_i^\kappa\|_{C_n}\to 0,\quad \varepsilon\to 0,\quad i=\overline{0,\varkappa},\tag{4.35}$$

где функция $\psi_i^\kappa(t)$ есть решение системы

$$\psi_i^\kappa(t)-\int_t^1 \nabla_x^* f(t,x_\kappa(t),v_\kappa(t))\,\psi_i^\kappa(t)\,dt=$$

$$=\int_t^1 \nabla_x F_i(t,x_\kappa(t),v_\kappa(t))dt+\nabla_x h_i(x_\kappa(1)), \tag{4.36}$$

в которой $\nabla_x f(t,x_\kappa(t),v_\kappa(t))\equiv\{\nabla_x f^-(t,x_\kappa(t),v_\kappa(t)),\ 0\le t\le\tau_\kappa^1,$

$\nabla_x f^0(t,x_\kappa(t),v_\kappa(t)),\ \tau_\kappa^1\le t\le\tau_\kappa^2;\ \nabla_x f^+(t,x_\kappa(t),v_\kappa(t)),$

$\tau_\kappa^2<t<\tau_\kappa^3;\ \ldots;\ \nabla_x f^+(t,x_\kappa(t),v_\kappa(t)),\ \tau_\kappa^{2p_\kappa}\le t\le 1\}.$

Представления (4.28), (4.30) для $A_{2s-1}^\kappa,\ s=\overline{1,p_\kappa}$, и сходимость (4.35) позволяют нам перейти к пределу в выражении $\Delta_\varepsilon I_i(v_\kappa)/\varepsilon,\ i=\overline{0,æ}$, в котором числитель задается равенством (4.26). С помощью теоремы Лебега о дифференцировании интеграла получаем, $r=\overline{0,æ}$,

$$\delta I_r(v_\kappa)=\Big\{\sum_{(i)_1}\sum_{j=1}^{j_i}\gamma_i^j(\psi_r^\kappa(t_i),\Delta_u f^-(x_\kappa(t_i),u_{ij},v_\kappa(t_i)))+$$

$$+\sum_{(i)_2}\sum_{j=1}^{j_i}\gamma_i^j(\psi_r^\kappa(t_i),\Delta_u f^0(x_\kappa(t_i),u_{ij},v_\kappa(t_i)))+$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+\sum_{(i)_{2p_\kappa+1}}\sum_{j=1}^{j_i}\gamma_i^j(\psi_r^\kappa(t_i),\Delta_u f^+(x_\kappa(t_i),u_{ij},v_\kappa(t_i)))\Big\}+ \tag{4.37}$$

$$+\Big\{A_1^\kappa\Big[(\psi_r^\kappa(\tau_\kappa^1);\alpha(\tau_\kappa^1,x_\kappa(\tau_\kappa^1),v_\kappa(\tau_\kappa^1+0))\times$$

$$\times\big[f^+(\tau_\kappa^1,x_\kappa(\tau_\kappa^1),v_\kappa(\tau_\kappa^1+0))-f^-(\tau_\kappa^1,x_\kappa(\tau_\kappa^1),v_\kappa(\tau_\kappa^1+0))\big]+$$

$$+f^-(\tau_\kappa^1,x_\kappa(\tau_\kappa^1),v_\kappa(\tau_\kappa^1+0))-f^-(\tau_\kappa^1,x_\kappa(\tau_\kappa^1),v_\kappa(\tau_\kappa^1))+$$

$$+F_r(\tau_k^1, x_k(\tau_k^1), v_k(\tau_k^1+0)) - F_r(\tau_k^1, x_k(\tau_k^1), v_k(\tau_k^1))\Big] + \dots \Big\} +$$

$$+\left\{ \sum_{i=1}^{i_1} \sum_{j=1}^{j_i} \gamma_i^j \Delta_u F_r(x_k(t_i), u_{ij}, v_k(t_i)) \right\} \equiv$$

$$\equiv \{\delta I_r\}_1 + \{\delta I_r\}_2 + \{\delta I_r\}_3 .$$

Замечание 4.I. Точно такое же выражение для $\delta I_r(v_k)$ получается и в случае, когда для некоторых или всех $S = 1, 3, \dots, 2p_k - 1$ выполняется неравенство $\tau_{k,\varepsilon}^{2s-1} > \tau_k^{2s-1}$. Если же для некоторых или всех S выполняется равенство $\tau_k^{2s-1} = \tau_k^{2s}$, то в представлении (4.37) надо положить при соответствующих S :

$$\alpha(\tau_k^{2s-1}, x_k(\tau_k^{2s-1}), v_k(\tau_k^{2s-1}+0)) = 1, \text{ если } x_k(t) \in G^- \text{ при } t \in (\tau_k^{2s-1}, \tau_k^{2s});$$

$$\alpha(\tau_k^{2s-1}, x_k(\tau_k^{2s-1}), v_k(\tau_k^{2s-1}+0)) = 0, \text{ если } x_k(t) \in G^+ \text{ при } t \in (\tau_k^{2s-1}, \tau_k^{2s}).$$

Замечание 4.2. Представления для A_{2s-1}^k, B_{2s}^k, $\delta I_r(v_k)$ были получены в предположении, что вспомогательный вектор $w = 0$ (см. (4.I3)). Если же $w \neq 0$, то этот вспомогательный вектор добавится лишь в соответствующем слагаемом. Например, если $\bar t \in (0, \tau_k^1)$, то (см. (4.26))

$$A_1^k = (\nabla_x g(x_k(\tau_k^1)), (E + \Phi_{k,1}^*(\bar t)) w + \sum_{(i)_1} \sum_{j=1}^{j_i} \dots) / (\nabla_x g(x_k(\tau_k^1)), f^-),$$

$$\delta I_r(v_k) = (\psi_r^k(\bar t), w) + \sum_{(i)_1} \sum_{j=1}^{j_i} \dots$$

В то же время матрицы $\Phi_{k,s}(t)$, функции $\psi_r^k(t)$ останутся, очевидно, без изменений.

4.5. Представление для слагаемого $\{\delta I_r\}_2$

Из принадлежности $g \in C_1^2(R^n)$ и очевидного равенства (B_{2i}^k, $\nabla_x g(x_k(\tau_k^{2i}))) = 0$ с помощью теоремы о конечных приращениях имеем неравенство

$$|(\nabla_x g(x_k(\tau_k^{2s-1})), B_{2s-2}^k)| \le K_1 |x_k(\tau_k^{2s-1}) - x_k(\tau_k^{2s-2})| \le \quad (4.38)$$

$$\leq K\,K_1 \left| \tau_\kappa^{2s-1} - \tau_\kappa^{2s-2} \right|,$$

где $K > 0$ – постоянная из (I.6), $K_1 > 0$ – верхняя оценка модуля матрицы $\nabla_x(\nabla_x g)$ в области G', не зависящая, очевидно, от $s = \overline{2, p_\kappa - 1}$, $\kappa = 1, 2, \ldots$, $l = 1, 2, \ldots, \gamma_l^\kappa$.

Из представления (4.3I) для B_{2s}^κ в силу условий (I.6), (2.2) – (2.5) и оценок (4.34), (4.38) следует при $w \neq 0$, $|w| \leq 1$

$$|B_{2s}^\kappa| \leq |B_{2s-2}^\kappa|(1+\beta_{2s}) + \mu_{2s}, \quad s = \overline{1, p_\kappa}, \tag{4.39}$$

где

$$0 \leq \beta_{2s} \leq c_2 \left| \tau_\kappa^{2s} - \tau_\kappa^{2s-2} \right|, \quad s = \overline{1, p_\kappa}, \tag{4.40}$$

и с учетом неравенств $\sum_{i=1}^{i_1} \sum_{j=1}^{j_i} \gamma_i^j \leq 1$, $|w| \leq 1$ (см. (4.I3))

$$\mu_{2s} \geq 0, \quad s = \overline{1, p_\kappa}, \qquad \sum_{s=1}^{p_\kappa} \mu_{2s} \leq C_3. \tag{4.4I}$$

В (4.40), (4.4I) постоянные C_2, $C_3 > 0$ зависят лишь от K, K_1 и не зависят от $w, s, \kappa, l, \gamma_l$.

Из неравенств (4.39) – (4.4I) получаем

$$|B_{2s}^\kappa| \leq C_4, \quad s = \overline{1, p_\kappa}, \tag{4.42}$$

где постоянная $C_4 > 0$ также зависит лишь от K, K_1. В свою очередь из неравенства (4.42), неравенств (4.34), (4.38) и представления (4.30) для A_{2s+1}^κ следует

$$\sum_{s=1}^{p_\kappa} \left| A_{2s-1}^\kappa \right| \leq C_5, \tag{4.43}$$

где $C_5 > 0$ зависит лишь от K, K_1.

Преобразуем с помощью представления (4.30) вторую группу слагаемых $\{\delta I_r\}_2$ в (4.37). Имеем, как нетрудно видеть, в случае, когда вспомогательный вектор $w = 0$:

$$\{\delta I_r\}_2 = \Big(\chi_{r,1}^\kappa, \sum_{(i)_1} \sum_{j=1}^{j_i} \gamma_i^j (E + \Phi_{\kappa,1}^*(t_i)) \Delta_u f^-(x_\kappa(t_i), u_{ij}, v_\kappa(t_i))\Big) +$$

$$+\left(\varkappa^{k}_{r,2},\ \sum_{(i)_2}\sum_{j=1}^{j_i}\gamma^{j}_{i}(E+\Phi^{*}_{k,2}(t_i))\Delta_u f^{0}(x_k(t_i),u_{ij},v_k(t_i))\right)+$$

$$+\left(\varkappa^{k}_{r,3},\ \sum_{(i)_3}\sum_{j=1}^{j_i}\gamma^{j}_{i}(E+\Phi^{*}_{k,3}(t_i))\Delta_u f^{+}(x_k(t_i),u_{ij},v_k(t_i))\right)+ \tag{4.44}$$

. . . .

$$+\left(\varkappa^{k}_{r,2p_k+1},\sum_{(i)_{2p_k+1}}\sum_{j=1}^{j_i}\gamma^{j}_{i}(E+\Phi^{*}_{k,2p_k+1}(t_i))\Delta_u f^{+}(x_k(t_i),u_{ij},v_k(t_i))\right),$$

где, очевидно, $\varkappa^{k}_{r,2p_k+1}=\varkappa^{k}_{r,2p_k}=0$. В (4.44) лишь определенное число, а именно $2l+1$ векторов $\varkappa^{k}_{r,s}$ могут быть отличны от нуля, так как точки t_i приложения возмущающих импульсов (см. определение варианты $v_{k,\varepsilon}(t)$) могут располагаться только на конечном числе $2l+1$ интервалов (τ^{s}_{k}, τ^{s+1}_{k}), принадлежащих множеству $A^{l}\cup A^{0,l}_{1}$.

Покажем, что существует постоянная $C_6>0$, зависящая лишь от K, K_1 (и не зависящая от k, s, r, l, γ_i), такая, что

$$|\varkappa^{k}_{r,s}|\le C_6,\quad s=\overline{1,2p_k-1},\quad r=\overline{0,æ}. \tag{4.45}$$

Используем для этой цели вспомогательный вектор $w\neq 0$. Если все $\gamma^{j}_{i}=0$, $i=\overline{1,i_1}$, $j=\overline{1,j_i}$, а $\bar t\in(0,\tau^{1}_{k})$, то, учитывая замечание 4.2, можно записать при $w\neq 0$

$$\{\delta I_r\}_2=(\varkappa^{k}_{r,1},(E+\Phi^{*}_{k,1}(\bar t))w). \tag{4.46}$$

Предполагая, что $\varkappa^{k}_{r,1}\neq 0$, имеем при $w=\varkappa^{k}_{r,1}/|\varkappa^{k}_{r,1}|$ из (4.46)

$$\{\delta I_r\}_2=(\varkappa^{k}_{r,1},\varkappa^{k}_{r,1}/|\varkappa^{k}_{r,1}|+\Phi^{*}_{k,1}(\bar t)w). \tag{4.47}$$

Замечая теперь, что в силу неравенства (4.43), условия (I.6) и равномерной (по k) ограниченности функций $\psi^{k}_{r}(t)$

$$\left|\{\delta I_r\}_2\right| \leq C_6, \qquad (4.48)$$

где $C_6>0$ зависит лишь от K, K_1, и $|\Phi^*_{K,1}(\bar{t})|\to 0$ при $\bar{t}\to\tau^1_K$, имеем из (4.47), (4.48) неравенство (4.45) при $S=1$. Неравенство (4.45) при $S\geq 2$ доказывается с помощью аналогичных рассуждений.

4.6. Необходимые условия оптимальности управления υ_K

Получим необходимые условия оптимальности управления υ_K в задаче минимизации функционала (4.7). Заметим при этом сразу, что везде далее вспомогательный вектор $w=0$. Легко видеть, что из (4.43) следует

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\rho(\tilde{\upsilon}_{K,\varepsilon},\upsilon_K)\leq\sum_{i=1}^{i_1}\sum_{j=1}^{j_i}\gamma^j_i+\sum_{s=1}^{P_K}|A^K_{2s-1}|\leq 1+C_5 . \qquad (4.49)$$

Так как $J_{1/K}(\upsilon_K)>0$, то пусть $i_1, i_2, \ldots, i_p$, $0\leq i_1<i_2<\ldots<i_p\leq \varkappa$, те и только те индексы, для которых

$$J^{i_j}(\upsilon_K)=J_{1/K}(\upsilon_K),\quad j=1,2,\ldots,p, \qquad (4.50)$$

а для остальных индексов

$$J^i(\upsilon_K)<J_{1/K}(\upsilon_K)-2\vartheta,\quad i=\overline{0,\varkappa},\quad i\neq i_1,\ldots,i_p, \qquad (4.51)$$

где $J^0(\upsilon_K)\equiv I_0(\upsilon_K)-I_0(u_0)+\frac{1}{K}$, $J^i(\upsilon_K)=I_i(\upsilon_K)$, $i=\overline{1,\varkappa_1}$, $J^i(\upsilon_K)=|I_i(\upsilon_K)|$, $i=\overline{\varkappa_1+1,\varkappa}$, $\vartheta>0$ – достаточно малое число. Пусть $K_\vartheta>0$ – такое целое число, что при всех $K\geq K_\vartheta$

$$\sqrt{\varepsilon_K}\,(1+C_5)<\vartheta. \qquad (4.52)$$

Обозначим через A_K множество векторов $(i_{\bar{j}+1}\geq\varkappa_1+1)$

$$(\delta I_{i_1}(\upsilon_K),\ldots,\delta I_{i_{\bar{j}}}(\upsilon_K),\ \mathrm{sign}(I_{i_{\bar{j}+1}}(\upsilon_K))\,\delta I_{i_{\bar{j}+1}}(\upsilon_K),\ldots,$$

$\operatorname{sign}(I_{i_p}(v_k))\delta I_{i_p}(v_k))\in \overline{R^p}$, отвечающих всесозможным наборам $\{t_i\}$, $\{\gamma_i^j\}$, $\{u_{ij}\}$, $i=\overline{1,i_1}$, $j=\overline{1,j_i}$. Так как $\sum_{i=1}^{i_1}\sum_{j=1}^{j_i}\gamma_i^j\le 1$, то множество $A_k\subset R^p$ является выпуклым и ограниченным. Покажем, что множество A_k при $k>k_\nu$ не пересекается с выпуклым множеством $\mathcal{K}_-^{p,\nu}\equiv\{I\equiv(I_{i_1},\dots,I_{i_p})\in R^p \mid I_{i_1}<-2\nu,\dots,I_{i_p}<-2\nu\}$. Предположим противное. Тогда найдется набор $\{t_i\}$, $\{\gamma_i^j\}$, $\{u_{ij}\}$ такой, что

$$\delta I_{i_1}(v_k)<-2\nu,\dots,\ \delta I_{i_{\bar j}}(v_k)<-2\nu, \tag{4.53}$$

$$\operatorname{sign}(I_{i_{\bar j+1}}(v_k))\delta I_{i_{\bar j+1}}(v_k)<-2\nu,\dots,\ \operatorname{sign}(I_{i_p}(v_k))\delta I_{i_p}(v_k)<-2\nu.$$

Из (4.53) следует, что при достаточно малых $\varepsilon>0$, $\varepsilon<\varepsilon_\nu<1$,

$$J^{i_j}(\tilde v_{k,\varepsilon})-J^{i_j}(v_k)\le(-2\nu+\nu/4)\varepsilon=\frac{7}{4}\nu\varepsilon,\ j=\overline{1,p}, \tag{4.54}$$

а также в силу (4.49), 4.5I), 4.52)

$$J^i(\tilde v_{k,\varepsilon})+\sqrt{\varepsilon_k}\rho(\tilde v_{k,\varepsilon},v_k)\le J_{1/k}(v_k)-(2\nu+\frac{\nu}{4})\varepsilon+\sqrt{\varepsilon_k}\rho(\tilde v_{k,\varepsilon},v_k)\le \tag{4.55}$$

$$\le J_{1/k}(v_k)-\left(2\nu+\frac{\nu}{4}\right)\varepsilon+\left(\nu+\frac{\nu}{4}\right)\varepsilon\le J_{1/k}(v_k)-\frac{\nu}{2}\varepsilon,\ i=\overline{0,\varkappa},\ i\ne i_1,\dots,i_p.$$

Из (4.54) в силу (4.49), 4.50), (4.52) получаем при $\varepsilon<\varepsilon_\nu$

$$\begin{aligned} J^{i_j}(\tilde v_{k,\varepsilon})+\sqrt{\varepsilon_k}\rho(\tilde v_{k,\varepsilon},v_k)&\le J_{1/k}(v_k)-\frac{7}{4}\nu\varepsilon+\\ +\left(\nu+\frac{\nu}{4}\right)\varepsilon&=J_{1/k}(v_k)-\frac{\nu}{2}\varepsilon,\quad j=\overline{1,p}. \end{aligned} \tag{4.56}$$

И, наконец, (4.55), (4.56) дают

$$J_{1/k}(\tilde v_{k,\varepsilon})+\sqrt{\varepsilon_k}\rho(\tilde v_{k,\varepsilon},v_k)<J_{1/k}(v_k),$$

что противоречит оптимальности $v_k\in D_k$. Из непересекаемости выпуклых множеств A_k и $\mathcal{K}_-^{p,\nu}$, $k>k_\nu$ следует, что они отделяются нетривиальным функционалом $\lambda^{k,\nu}\equiv(\lambda_{i_1}^{k,\nu},\dots,\lambda_{i_p}^{k,\nu})$, $\lambda_{i_j}^{k,\nu}\ge 0$, $|\lambda^{k,\nu}|=1$, а именно; для любого вектора из A_k

$$\lambda_{i_1}^{k,\nu}\delta I_{i_1}(v_k)+\ldots+\lambda_{i_{\bar{j}}}^{k,\nu}\delta I_{i_{\bar{j}}}(v_k)+$$

$$+\lambda_{i_{\bar{j}+1}}^{k,\nu}\operatorname{sign}(I_{i_{\bar{j}+1}}(v_k))\delta I_{i_{\bar{j}+1}}(v_k)+\ldots+\lambda_{i_p}^{k,\nu}\operatorname{sign}(I_{i_p}(v_k))\delta I_{i_p}(v_k)\geq -2\nu.$$

Дополняя вектор $\lambda^{k,\nu}$ нулевыми компонентами до вектора из $R^{æ+1}$ и переобозначая: $\lambda_{i_j}^{k,\nu}\equiv\lambda_{i_j}^{k,\nu}\operatorname{sign} I_{i_j}(v_k)$, $j=\overline{\bar{j}+1,p}$, получаем из последнего неравенства для любого вектора из A_k

$$\sum_{i=0}^{æ}\lambda_i^{k,\nu}\delta I_i(v_k)\geq -2\nu,\quad k>k_\nu, \tag{4.57}$$

$$\lambda^{k,\nu}\in R^{æ+1},\quad \lambda_i^{k,\nu}\geq 0,\quad i=\overline{0,æ_1},\quad \lambda_i^{k,\nu}(J_{1/k}(v)-J^i(v_k))=0,$$
$$i=\overline{0,æ},\quad |\lambda^{k,\nu}|=1. \tag{4.58}$$

4.7. Необходимые условия оптимальности управления $u_0(t)$ в задаче (I.I)-(I.4)

Для получения необходимых условий оптимальности управления $u_0(t)$ нам осталось теперь перейти к пределу при $k\to\infty$, $l\to\infty$ ($\gamma_l\to 0$) в (4.32), (4.33), (4.36), (4.57), (4.58). Итак, пусть γ_l, $l=1,2,\ldots$, - последовательность положительных чисел такая, что $\gamma_l\to 0$ при $l\to\infty$ и $\gamma_l<(\beta_i-\alpha_i)/2$, $\gamma_l<\beta_i^0-\alpha_i^0$, $i=\overline{1,l}$; ν_l, l = I, 2,..., - последовательность положительных чисел такая, что $\nu_l\to 0$ при $l\to\infty$. Пусть далее k_l, l = I, 2,..., - такая подпоследовательность (k = I, 2,...), что $k_l>k_{\nu_l}$ (см. (4.52), l = I, 2,...

Из условия (I.6) на функцию f следует, что функциональные матрицы $\nabla_x f(t,x_{k_l}(t),v_{k_l}(t))$(см (4.36)) равномерно по l = I,2,.., ограничены в норме $L_{\infty,n\times n}[0,1]$. Поэтому без ограничения общности будем считать последовательность $\nabla_x f(t,x_{k_l}(t),v_{k_l}(t))$, l = I, 2,..., сходящейся слабо в $L_{2,n\times n}[0,1]$ при $l\to\infty$ к некоторой функциональной матрице, которую мы обозначим через $\nabla_x f(t, x_0(t),u_0(t))$. Из этой слабой сходимости, а также из сходимости (4.2I) и условия (I.6) на F_i, h_i вытекает

$$\|\psi_i^{k_l}-\psi_i\|_{C_n}\to 0,\quad l\to\infty,\quad i=\overline{0,\varkappa}, \tag{4.59}$$

где $\psi_i(t),\ 0\le t\le 1$ – решение системы

$$\psi_i(t)-\int_t^1\nabla_x^* f(t,x_0(t),u_0(t))\psi_i(t)dt=$$
$$=\int_t^1\nabla_x F_i(t,x_0(t),u_0(t))dt+\nabla_x h_i(x_0(1)),\ i=\overline{0,\varkappa}, \tag{4.60}$$

или, что то же самое, системы (2.8).

Исследуем устройство матрицы $\nabla_x f(t,x_0(t),u_0(t))$. Пусть $r>0$ – произвольное целое. В силу сходимостей (4.2I) (при $k=k_l$) и условия (I.6) можно без ограничения общности считать, что при п.в. $t\in\in(\alpha_r,\beta_r)\subset A^-\cup A^+$

$$\nabla_x f^{\pm}(t,x_{k_l}(t),v_{k_l}(t))\to\nabla_x f^{\pm}(t,x_0(t),u_0(t)),\ l\to\infty, \tag{4.6I}$$

где $f^{\pm}\equiv f^-$, если $(\alpha_r,\beta_r)\subset A^-$; $f^{\pm}\equiv f^+$, если $(\alpha_r,\beta_r)\subset A^+$. Аналогично в силу леммы 3.6 и сходимостей (4.2I) можно считать, что при п.в. $t\in(\alpha_r^0,\beta_r^0)\subset A_1^0$

$$\nabla_x f^0(t,x_{k_l}(t),v_{k_l}(t))\to\nabla_x f^0(t,x_0(t),u_0(t)),\ l\to\infty. \tag{4.62}$$

Таким образом, матрица $\nabla_x f(t,x_0(t),u_0(t))$ на каждом из интервалов, составляющих множество $A^-\cup A^+$, равна $\nabla_x f^-(t,x_0(t),u(t))$ либо $\nabla_x f_0^+(t,x_0(t),u_0(t))$, а на каждом из интервалов, составляющих множество $A_1^0\subset A^0$, равна матрице $\nabla_x f^0(t,x_0(t),u_0(t))$.

Далее, так как $(\alpha_r+\gamma_l,\ \beta_r-\gamma_l)\subset(\tau_{k_l}^{2s_{l,r}},\tau_{k_l}^{2s_{l,r}+1})$, $(\alpha_r^0+\gamma_l,\beta_r^0)\subset(\tau_{k_l}^{2s_{l,r}^0-1},\tau_{k_l}^{2s_{l,r}^0})$, $r\le l$, при некоторых $s_{l,r}$, $s_{s,r}^0$, $1\le s_{l,r}$, $s_{l,r}^0\le p_{k_l}$, таких, что $\tau_{k_l}^{2s_{l,r}}\to\alpha_r$, $\tau_{k_l}^{2s_{l,r}+1}\to\beta_r$, $\tau_{k_l}^{2s_{l,r}^0-1}\to\alpha_r^0$, $\tau_{k_l}^{2s_{l,r}^0}\to\beta_r^0$ при $l\to\infty$, то из (4.6I), (4.62) следует при $l\to\infty$

$$\|\Phi_{k_l,2s_{l,r}+1}-\Phi_r^{\pm}\|_{C_{n\times n}(\max(\alpha_r,\tau_{k_l}^{2s_{l,r}}),\min(\beta_r,\tau_{k_l}^{2s_{l,r}+1}))}\to 0 \tag{4.63}$$

$$\left\|\Phi_{\kappa_l,2s^0_{l,r}}-\Phi^0_r\right\|_{C_{n\times n}(\max(\alpha^0_r,\tau_{\kappa_l}^{2s^0_{l,r}-1}),\min(\beta^0_r,\tau_{\kappa_l}^{2s^0_{l,r}}))}\longrightarrow 0, \qquad (4.64)$$

где $\Phi^{\pm}_r(t)$, $\Phi^0_r(t)$ – решения систем (2.9), (2.10) соответственно.

Определим кусочно-постоянную функцию $\chi_i^{\kappa_l}(t)$, $0\leq t\leq 1$, следующим образом (см. (4.44)):

$$\chi_i^{\kappa_l}(t)=\begin{cases}\chi^{\kappa_l}_{i,2s_{l,r}+1}, & t\in(\tau_{\kappa_l}^{2s_{l,r}},\tau_{\kappa_l}^{2s_{l,r}+1}),\ r=\overline{1,l},\\ \chi^{\kappa_l}_{i,2s^0_{l,r}}, & t\in(\tau_{\kappa_l}^{2s^0_{l,r}-1},\tau_{\kappa_l}^{2s^0_{l,r}}),\ r=\overline{1,l},\\ 0, & t\in[0,1]\setminus\bigcup\limits_{r=1}^{l}(\tau_{\kappa_l}^{2s_{l,r}},\tau_{\kappa_l}^{2s_{l,r}+1})\cup(\tau_{\kappa_l}^{2s^0_{l,r}-1},\tau_{\kappa_l}^{2s^0_{l,r}}).\end{cases} \qquad (4.65)$$

Заметим, что в силу (4.37), (4.44) $\chi_i^{\kappa_l}(t)\equiv 0$ при $t>\tau_{\kappa_l}^{2p_{\kappa_l}-1}$. С учетом (4.37), (4.44), (4.65) перепишем неравенство (4.57) в виде ($i_1=1$, $j_1=1$, $\gamma^1_1=1$, $u_{1,1}=v$, $t_1=t$)

$$\begin{gathered}\sum_{i=0}^{\varkappa}\lambda_i^{\kappa_l,\vartheta_l}\Big[(\psi_i^{\kappa_l}(t),\Delta_u f^{\pm}(x_{\kappa_l}(t),v,v_{\kappa_l}(t)))+\\ +(\chi_i^{\kappa_l}(t),(E+\Phi^*_{\kappa_l,2s_{l,r}+1}(t))\Delta_u f^{\pm}(x_{\kappa_l}(t),v,v_{\kappa_l}(t)))+\\ +\Delta_u F_i(x_{\kappa_l}(t),v,v_{\kappa_l}(t))\Big]\geq -2\vartheta_l\end{gathered} \qquad (4.66)$$

при п.в. $t\in(\alpha_r+\gamma_l,\beta_r-\gamma_l)$, $r=\overline{1,l}$, для всех $v\in U$, где $f^{\pm}\equiv f^-$, если $(\alpha_r,\beta_r)\subset A^-$; $f^{\pm}\equiv f^+$, если $(\alpha_r,\beta_r)\subset A^+$;

$$\begin{gathered}\sum_{i=0}^{\varkappa}\lambda_i^{\kappa_l,\vartheta_l}\Big[(\psi_i^{\kappa_l}(t),\Delta_u f^0(x_{\kappa_l}(t),v,v_{\kappa_l}(t)))+\\ +(\chi_i^{\kappa_l}(t),(E+\Phi^*_{\kappa_l,2s^0_{l,r}}(t))\Delta_u f^0(x_{\kappa_l}(t),v,v_{\kappa_l}(t)))+\\ +\Delta_u F_i(x_{\kappa_l}(t),v,v_{\kappa_l}(t))\Big]\geq -2\vartheta_l\end{gathered} \qquad (4.67)$$

при п.в. $t \in (\alpha_r^0 + \gamma_l, \beta_r^0)$, $r = \overline{1, l}$ для всех $v \in U_0$.

Из неравенства (4.45) следует, что функции $x_i^{k_l}(t)$ равномерно по l = I, 2,..., ограничены в норме $L_{\infty,1}[0,1]$. Поэтому без ограничения общности будем также считать последовательность $x_i^{k_l}(t)$, l = I, 2,..., сходящейся слабо в $L_{2,n}[0,1]$ к некоторой функции $x_i \in L_{\infty,n}[0,1]$, принимающей, очевидно, в силу (4.65), сходимости (4.2I) и леммы 3.6 постоянные значения на каждом из интервалов (α_r, β_r), (α_r^0, β_r^0), r = I, 2,..., и равной нулю при $t > \tau_0$ (определение τ_0 см. в условии теоремы). Эта слабая сходимость, а также сходимости (4.2I), (4.59), (4.63), (4.64) и компактность шара в $R^{æ+1}$ (считаем без ограничения общности, что $\lambda_i^{k_l, v_l} \to \lambda_i$, $l \to \infty$) позволяют нам перейти очевидным образом к пределу при $l \to \infty$ в (4.57), (4.58), (4.66), (4.67), в результате чего и получаются условие (2.6) на вектор $\lambda \in R^{æ+1}$ и равенство (2.7). Теорема доказана.

Литература

I. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. - М.: Наука, I98I.
2. Троицкий В.А. Оптимальные процессы колебаний механических систем. - Л.: Машиностроение (Ленингр. отд-ние), I976.
3. Гелиг А.Х., Леонов Г.А., Якубович В.А. Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. - М.: Наука, I978.
4. Уткин В.И. Скользящие режимы в задачах оптимизации и управления.- М.: Наука, I98I.
5. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. - Матем. сб., I960, т. 5I(93), № I, с. 99 - I28.
6. Ekeland I. On the variational principle.- J.Math.Anal.Appl., 1974,v.47,N.2,p.324-353.
7. Кугушев Е.И. Необходимые условия оптимальности для систем, описываемых уравнениями с разрывной правой частью. Вестн. МГУ, Сер. матем. и мех., I974, № 2, с. 83 - 90.
8. Морозов С.Ф., Сумин М.И. Оптимальное управление динамическими системами с разрывной правой частью. Препринт № I48. - Горький: НИРФИ, I98I, 40 с.
9. Морозов С.Ф., Сумин М.И. Об одном классе задач управления динамическими системами с разрывной правой частью. - Кибернетика, I985,

№ 3, с. 59 – 65.

10. Ащепков Л.Т., Левченко Н.М. Об оптимальности траектории разрывной системы управления на участке скольжения. – Сибирский матем. журн., 1981, т. 22, № 2, с. 38 – 47.
11. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. – М.: Наука, 1974.
12. Сумин М.И. Задачи оптимального управления сосредоточенными и распределенными системами с дифференцируемыми и недифференцируемыми функционалами и функциями, задающими системы. Диссертация. Горький: Горьк. ун-т, 1983.
13. Плотников В.И. Необходимые и достаточные условия оптимальности и условия единственности оптимизирующих функций для управляемых систем общего вида. – Изв. АН СССР, Сер. матем., 1972, т. 36, № 3, с. 652 – 679.
14. Clarke F.H. A new approach to Lagrange multipliers. – Math.of Operations Res., 1976, v.1, N 2, p.165 – 174.
15. Величенко В.В. О задачах оптимального управления для уравнений с разрывными правыми частями. – Автоматика и телемеханика, 1966, № 7, с. 20–30.
16. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление.– М.: Наука, 1979.

Дата поступления статьи
7 июня 1985 г.

Михаил Иосифович Сумин

ПРИНЦИП МАКСИМУМА
ДЛЯ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ
СКОЛЬЗЯЩИМИ РЕЖИМАМИ
В РАЗРЫВНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Подписано к печати 26.09.85 г. МЦ 01921. Формат 60 х 84/16.
Бумага писчая. Печать офсетная. Объем 1,98 усл.п.л. Тираж 120.
Заказ 4268. Бесплатно.

Отпечатано на ротапринте НИРФИ