Министерство высшего и среднего специального образования РСФСР

Горьковский ордена Трудового Красного Знамени
научно-исследовательский радиофизический институт (НИРФИ)

Препринт № 205

КОНТИНУАЛЬНЫЙ ИНТЕГРАЛ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

М.А.Антонец

Горький 1985

А н т о н е ц М.А.

КОНТИНУАЛЬНЫЙ ИНТЕГРАЛ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ. Горький, Препринт № 205/НИРФИ, 1985.

УДК 512.3

В работе строится представление решения задачи с начальными данными для гиперболической системы эквивалентной волновому уравнению акустики в виде континуального интеграла (Т-произведения).

I. ВВЕДЕНИЕ

I.I. Задача Коши для волнового уравнения

$$u_{tt} - a^2(x)\Delta u = 0,$$

$$u_t(0,x) = u^0(x), \quad u(0,x) = u^1(x), \quad x \in R^n,$$

где $u^0, u^1 \in \mathcal{S}(R^n)$, $\mathcal{S}(R^n)$ – пространство основных функций Л.Шварца может быть заменена задачей Коши для гиперболической системы

$$v_t = \hat{A} v, \tag{I}$$

$$v(0,x) = v^0(x), \quad v = (v_0, v_1, \ldots, v_n),$$

где

$$v_0(t,x) = a^{-1}(x) u_t(t,x), \quad v_l(t,x) = \frac{\partial u(t,x)}{\partial x_l}, \quad l = 1, \ldots, n,$$

а оператор $\hat{A}$ и его символ Вейля A (см. [I]) имеют вид

$$\hat{A} = \begin{vmatrix} 0 & a\dfrac{\partial}{\partial x_1} & \cdots & a\dfrac{\partial}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} a & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial}{\partial x_n} a & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}, \quad A = i \begin{vmatrix} 0 & b_1 & \ldots & b_n \\ \bar{b}_1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \bar{b}_n & 0 & \ldots & 0 \end{vmatrix},$$

$$b_l = a(q) p_l - \frac{1}{2i} \frac{\partial a(q)}{\partial q_l}, \quad p, q \in R^n.$$

Обозначим

$$L_2^m(R^n)=\left\{(u_1,\ldots,u_m),\ u_l\in L_2(R^n),\ l=1,\ldots,m\right\},$$

$$\mathcal{S}^m(R^n)=\left\{(u_1,\ldots,u_m),\ u_l\in \mathcal{S}(R^n),\ l=1,\ldots,m\right\}.$$

Пусть $\bar{x}=(x_2,\ldots,x_n)\in R^{n-1}$ и $\tilde{v}(x_1,\bar{k})$ – преобразование Фурье вектора $v\in L_2^{n+1}(R^n)$ по переменной $\bar{x}$.

Обозначим $\hat{E}(t)$ оператор отвечающий символу $E(t)=e^{tA}$. Сформулируем теперь основное утверждение работы.

Т е о р е м а I. Пусть функция $a(x)$ зависит лишь от переменной x_1, $x=(x_1,\ldots,x_n)$ и существуют константы a_1, $a_2>0$, $r_l\geq 0$, $|l|=1,2,\ldots$, такие, что

1) $a_2\geq a(x)\geq a_1$,

2) $$\left|\frac{\partial^{|l|}a}{\partial x^l}\right|\leq r_l,\quad |l|=0,1,\ldots \tag{2}$$

Тогда для любого $v\in L_2^{n+1}(R^n)$ такого, что носитель вектора $\tilde{v}$ содержится в цилиндре $|\bar{k}|\leq æ$, $æ>0$, найдутся $\gamma=\gamma(æ)>0$, $\tau=\tau(æ)>0$ такие, что

I) при $|t|<\tau$

$$\|\hat{E}(t)v\|_{L_2^{n+1}(R^n)}\leq(1+\gamma(æ)|t|)\|v\|_{L_2^{n+1}(R^n)}, \tag{3}$$

2) оператор $\hat{E}(t)$, $|t|<\tau$ непрерывен в $\mathcal{S}^{n+1}(R^{n+1})$,

3) для любого $t\in R^1$ найдется $N_0(t,æ)$ такое, что в $L_2^{n+1}(R^n)$

$$e^{t\hat{A}}v=\mathop{s\text{-}\lim}_{\substack{N\to\infty\\ N>N_0(t,æ)}}\hat{E}\left(\frac{t}{N}\right)^N v\ . \tag{4}$$

I.2. Соотношение (4) называется Т-произведением или континуальным интегралом. Оно интересно тем, что в его правой части участвуют операторы с легко вычисляемыми символами Вейля.

Представление операторной экспоненты в виде T-произведения было получено В.С.Буслаевым в [2] и В.П.Масловым и И.А.Шишмаревым в [3,4] для параболических уравнений и систем.

Для уравнения Шредингера с гамильтонианом общего вида и гиперболических систем с диагональной главной частью в работах [5, 6] получено аналогичное представление для $e^{t\hat{A}}$, однако там операторы $\hat{E}(t)$ строятся с использованием решений соотвутствующего уравнения Гамильтона-Якоби. Для гиперболической системы (I) эта конструкция неприменима.

2. ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ПЛОСКИХ ВОЛН

2.I. Рассмотрим задачу Коши для гиперболической системы (I) в классе векторов вида

$$v(t,x)=\bar{v}(t,x_1)e^{i(k,\bar{x})}, \quad \bar{x}=(x_2,\ldots,x_n),$$

$k\in R^{n-1}$ – фиксированный вектор, с начальными условиями

$$v^0(x)=\bar{v}^0(x_1)e^{i(k,\bar{x})}, \quad \bar{v}^0(x_1)\in L_2^{n+1}(R^1)$$

в предположении, что $a(x)=a(x_1)$.

Эта задача сводится к задаче Коши

$$v_t=\hat{A}(k)v,$$

$$v(0,x)=v^0(x),\ x\in R^1,\ v=(v_0(x),v_1(x),\ldots,v_n(x)),$$

где оператор $\hat{A}(k)$ отвечает символу Вейля

$$A(k)=i\begin{vmatrix} 0 & a(q_1)p_1-\frac{1}{2i}\frac{\partial a(q_1)}{\partial q_1} & a(q_1)k_2 & \ldots & a(q_1)k_n \\ a(q_1)p_1+\frac{1}{2i}\frac{\partial a(q_1)}{\partial q_1} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a(q_1)k_2 & 0 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a(q_1)k_n & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{vmatrix}.$$

Теорема 2. Пусть $n \geq 1$ и $a(x_1)$ удовлетворяет условиям теоремы I.

Тогда для любого $\varkappa > 0$ найдутся $\gamma(\varkappa) > 0$, $t_0(\varkappa) > 0$ такие, что при $|t| < t_0$ и $|\kappa| < \varkappa$

I) оператор $\hat{E}(\kappa,t) = e^{\widehat{tA(\kappa)}}$ непрерывен в $L_2^{n+1}(R^1)$ и

$$\|\hat{E}(\kappa,t)\| \leq 1 + \gamma(\varkappa)|t|, \tag{5}$$

2) оператор $\hat{E}(\kappa,t)$ непрерывен в $\mathcal{G}^{n+1}(R^1)$,

3) для любого $t \in R^1$ и некоторого $N_0(t) < \infty$

$$e^{t\hat{A}(\kappa)} = s - \lim_{\substack{N \to \infty \\ N > N_0(t)}} \hat{E}\left(\kappa, \frac{t}{N}\right)^N, \tag{6}$$

причём сходимость равномерна по κ, $|\kappa| < \varkappa$.

Доказательство. Так как

$$E(\kappa,t) = I + i\,\frac{\sin g(\kappa)t}{g(\kappa)}\,A(\kappa) + 2\,\frac{\sin^2 g(\kappa)t/2}{g^2(\kappa)}\,A^2(\kappa), \tag{7}$$

где $g(\kappa) = \sqrt{a^2(q_1)p_1^2 + \frac{1}{4}a'^2(q_1) + \kappa^2}$, то

$$E_{11}(\kappa,t) = \cos t\, g(\kappa),$$

$$E_{12}(\kappa,t) = -\overline{E_{21}(\kappa,t)} = i\,\frac{\sin t\, g(\kappa)}{g(\kappa)}\left(p_1 a(q_1) + \frac{1}{2i}a'(q_1)\right),$$

$$E_{1l}(\kappa,t) = -\overline{E_{l1}(\kappa,t)} = i\,\frac{\sin t\, g(\kappa)}{g(\kappa)}\,\kappa_l a(q_1), \quad l > 2,$$

$$E_{22}(\kappa,t) = \cos t\, g(\kappa) - 2\kappa^2\,\frac{\sin^2 t/2g}{g^2},$$

$$E_{2l}(\kappa,t) = \overline{E_{l2}(\kappa,t)} = -2\,\frac{\sin^2 t/2g}{g^2}\left(p_1 a(q_1) + \frac{1}{2i}a'(q_1)\right)\kappa_l a(q_1), \; l > 2,$$

$$E_{ij}(\kappa,t)=\delta_{ij}-2\kappa_i\kappa_j\frac{\sin^2 t/2g}{g^2},$$

$$i,j>2.$$

Ядра $\mathcal{E}_{ij}(\kappa,t,x,y)$ в смысле Л.Шварца операторов $\hat{E}_{i,j}(\kappa,t)$ имеют следующий вид

$$\mathcal{E}_{11}=\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{Y}_1\left(\kappa,t,\frac{x+y}{2},x-y\right), \tag{8}$$

где $\mathcal{Y}_1(\kappa,t,\frac{x+y}{2},x-y)$ ядро оператора с символом $\frac{\sin t\, g(\kappa)}{g(\kappa)}$

$$\mathcal{Y}_1(\kappa,t,z,\xi)=\frac{1}{2}a^{-1}(z)J_0\left(m(\kappa;z)|\sigma(z,\xi,t)|^{1/2}\right)\theta(\sigma(z,\xi,t)),$$

J_0 – функция Бесселя, $\sigma(z,\xi,t)=a^2(z)t^2-\xi^2$,

$$m(\kappa,z)=\frac{\sqrt{a'^2(z)+4\kappa^2}}{2a(z)},\quad \theta(z)=\begin{cases}1, & z\geq 0\\ 0, & z<0\end{cases},$$

$$\mathcal{E}_{12}(\kappa,t,x,y)=\left(\frac{\partial}{\partial\xi_1}a\left(\frac{x+y}{2}\right)+\frac{1}{2}a'\left(\frac{x+y}{2}\right)\right)\Bigg|_{\xi=x-y}\mathcal{Y}_1\left(\kappa,t,\frac{x+y}{2},\xi\right), \tag{9}$$

$$\mathcal{E}_{1i}(\kappa,t,x,y)=i\kappa_i a\left(\frac{x+y}{2}\right)\mathcal{Y}_1\left(\kappa,t,\frac{x+y}{2},x-y\right)-2\kappa^2\mathcal{Y}_2\left(\frac{x+y}{2},x-y,t\right),$$

где

$$\mathcal{Y}_2(\kappa,t,z,\xi)=\int\mathcal{Y}_1(\kappa,t,z,\xi-\xi')\mathcal{Y}_1(z,\xi',t)\,d\xi',$$

$$\mathcal{E}_{2i}(\kappa,t,x,y)=2i\kappa_i a\left(\frac{x+y}{2}\right)\left(a\left(\frac{x+y}{2}\right)\frac{\partial}{\partial\xi}+\frac{1}{2}a'\left(\frac{x+y}{2}\right)\right)\Bigg|_{\xi=x-y}\times \tag{10}$$

$$\times\,\mathcal{Y}_2\left(\kappa,t,\frac{x+y}{2},\xi\right),\quad i>2;$$

$$\mathscr{E}_{lj}(\kappa,t,x,y)=\delta_{lj}-2\kappa_l\kappa_j\mathscr{Y}_2\left(\kappa,t,\frac{x+y}{2},x-y\right),\ l,j>2. \tag{II}$$

Для того, чтобы доказать утверждения I); 2) теоремы нам достаточно показать, что операторы $\hat{E}_{lj}(\kappa,t)$ непрерывны в $\mathscr{S}(R^1)$ и в $L_2(R^1)$ и что выполняются неравенства $\|\hat{E}_{lj}(\kappa,t)\|\leq\delta_{lj}+\tilde{\gamma}(æ)|t|$. Из соотношения (8) следует, что

$$\mathscr{E}_{11}(\kappa,t,x,y)=\frac{1}{2}\delta\left(a\left(\frac{x+y}{2}\right)t-|x-y|\right)+ \\ +\frac{\partial L(x,y,t)}{\partial t}\,\theta\left(\sigma\left(\frac{x+y}{2},x-y,t\right)\right), \tag{I2}$$

где

$$L(\kappa,t,x,y)=J_0\left(m\left(\kappa,\frac{x+y}{2}\right)\left|\sigma\left(\frac{x+y}{2},x-y,t\right)\right|^{1/2}\right).$$

Обозначим Φ^t функцию сопоставляющую $x\in R^1$ решение $y\in R^1$ уравнения

$$x-y+ta\left(\frac{x+y}{2}\right)=0 \tag{I3}$$

и $\hat{V}^t$ оператор

$$\left[\hat{V}^t\varphi\right](x)=\int\delta\left(x-y+ta\left(\frac{x+y}{2}\right)\right)\varphi(y)dy=\varphi(\Phi^t(x))\,J^t(x),$$

где $J^t(x)=\left|\dfrac{\partial y(x)}{\partial x}\right|$.

Так как $\sup|a'(z)|<\infty$, то уравнение (I3) при достаточно малых t однозначно разрешимо. Используя соотношение

$$J^t(x)=\frac{1+\dfrac{t}{2}\,a'\left(\dfrac{x+\Phi^t(x)}{2}\right)}{1-\dfrac{t}{2}\,a'\left(\dfrac{x+\Phi^t(x)}{2}\right)}, \tag{I4}$$

получаем, что при достаточно малых t

$$\|\hat{V}^t\varphi\|^2_{L_2(R^1)} = \int |\varphi(\Phi^t(x))|^2 \, |J^t(x)|^2 \, dx =$$

$$= \int |\varphi(x)|^2 \, |J^t((\Phi^t)^{-1}(x))| \, dx \leqslant (1+\tilde{\gamma}|t|)^2 \|\varphi\|^2_{L_2}.$$

Следовательно

$$\|\hat{V}^t\| \leqslant 1+\tilde{\gamma}|t|.$$

Функция $L(\kappa, t, x, y)$ равномерно по x, $y \in R^1$, $|\kappa| < \varkappa$, $|t| \leqslant t_0(\varkappa)$, $t_0(\varkappa) > 0$ ограничена со всеми своими производными по x, y, t. Поэтому

$$\left| \frac{\partial L(\kappa, t, x, y)}{\partial t} \theta\left(\sigma\left(\frac{x+y}{2}, x-y, t\right)\right) \right| \leqslant$$

$$\leqslant C_1(\varkappa)\, \theta(a_1^2 t^2 - |x-y|^2),$$

где $a_1 = \sup\limits_{x \in R^1} a(x)$.

Применяя неравенство Минковского получаем отсюда, что

$$\left\| \int \frac{\partial L(\kappa, t, x, y)}{\partial t} \theta\left(\sigma\left(\frac{x+y}{2}, x-y, t\right)\right) \varphi(y)\, dy \right\| \leqslant C_2(\varkappa)|t| \, \|\varphi\|_{L_2(R^1)} \tag{15}$$

Теперь из неравенств (14), (15) следует, что

$$\|\hat{E}_{11}(\kappa, t)\| \leqslant 1 + \tilde{\gamma}_{11}(\varkappa)|t|. \tag{16}$$

Аналогично из соотношения (9) получаем, что

$$\mathcal{E}_{12}(\kappa,t,x,y)= a\left(\frac{x+y}{2}\right)t\,\delta\left(|x-y|-ta\left(\frac{x+y}{2}\right)\right)+$$
$$+L_1(\kappa,t,x,y)\theta\left(\sigma\left(\frac{x+y}{2},x-y,t\right)\right), \tag{I7}$$

где функция $L_1(\kappa,t,x,y)$ равномерно по $x,y\in R^1$, $|t|\le t_0(\ae)$, $|\kappa|<\ae$ ограничена вместе со всеми своими производными по x, y, t и, что

$$\|\hat{E}_{12}(\kappa,t)\|\le\tilde{\gamma}_{12}(\ae)|t|. \tag{I8}$$

Точно так же доказываются неравенства

$$\|\hat{E}_{22}(\kappa,t)\|\le(1+\tilde{\gamma}_{22}(\ae)|t|), \tag{I9}$$

$$\|\hat{E}_{1l}\|\le\tilde{\gamma}_{1l}(\ae)|t|,\quad l>2. \tag{20}$$

Функции $\mathcal{G}_2(\kappa,t,z,\xi)$, $\frac{\partial}{\partial\xi}\mathcal{G}_2(\kappa,t,z,\xi)$ ограничены и обращаются в нуль вне отрезка $|\xi|\le 2a_1t$. Отсюда следует, что

$$\|\hat{E}_{2l}(\kappa,t)\|\le\hat{\gamma}_{2l}(\ae)|t|,\quad l>2,$$

$$\|\hat{E}_{lj}(\kappa,t)\|\le\delta_{lj}+\tilde{\gamma}_{lj}(\ae)|t|,\qquad l,j>2,$$

если $|t|$ достаточно мало.

Докажем теперь, что операторы $\hat{E}_{lj}$ непрерывны в пространстве $\mathcal{S}(R^1)$ при достаточно малых t. Поскольку доказательство этого утверждения по существу не зависит от значений l,j, мы ограничимся рассмотрением оператора $\hat{E}_{11}(\kappa,t)$. Из соотношения (I2) следует, что для любого целого $m>0$

$$\frac{\partial^m}{\partial x^m}\mathcal{E}_{11}(\kappa,t,x,y)=$$
$$=\sum_{l=0}^{m}g_l(\kappa,t,x)\delta^{(l)}\left(\sigma\left(\frac{x+y}{2},x-y,t\right)\right)+$$

$$+L_m(\kappa,t,x,y)\,\theta\left(\sigma\left(\frac{x+y}{2},x-y,t\right)\right),$$

где функции $g_l(\kappa,t,x)$, $L_m(\kappa,t,x,y)$ равномерно по $x,y\in R^1$, $|\kappa|\le æ$, $|t|\le t_0(æ)$ ограничены вместе со всеми своими производными по x, y, вследствие предположений о функции $a(x)$ и равномерной ограниченности всех производных функций $\Phi^t(x)$, вытекающей из соотношения (I4).

Поэтому для любого целого $r>0$ и $\varphi\in\mathcal{S}(R^1)$

$$\sup_{x\in R^1}\left|x^r g_l(\kappa,t,x)\int\delta^{(l)}\left(\sigma\left(\frac{x+y}{2},x-y,t\right)\right)\varphi(y)\,dy\right|<\infty$$

и, в силу неравенства Минковского и элементарного неравенства

$$|x|^r\le 2^r(1+|y|)^r(1+|x+y|)^r,$$

$$\sup_{x\in R^1}\left|\int L_m(\kappa,t,x,y)\,\theta\left(\sigma\left(\frac{x+y}{2},x-y,t\right)\right)\varphi(y)\,dy\right|\le$$

$$\le C\sup_{y\in R^1}(1+|y|)^r|\varphi(y)|.$$

Следовательно оператор $\hat{E}_{11}(\kappa,t)$ непрерывен в $\mathcal{S}(R^1)$.

Для доказательства утверждения 3) теоремы нам потребуется лемма.

Лемма. Пусть $\{\hat{U}(t),\ t\ge 0\}$ сильно-непрерывная полугруппа линейных операторов в банаховом пространстве L и линейные операторы $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{E}(t)$, $t\in[0,t_0]$, $t_0>0$ таковы, что

I) Области определения $D(\hat{A})$, $D(\hat{B})$ операторов $\hat{A}$, $\hat{B}$ плотны в L,

$$D(\hat{B})\subset D(\hat{A})\quad\text{и}\quad\forall f\in D(\hat{B}),$$

$$\|\hat{A}f\|\le C_1(\|\hat{B}f\|+\|f\|);$$

2) $\|\hat{U}(t)\|\le C_2 e^{\gamma t},\qquad t\ge 0$ и

$$\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0}\hat{U}(t)f=\hat{A}f,\quad \forall f\in D(\hat{A});$$

3) $\|\hat{B}\hat{U}(t)f\|\leq G(t,f),\quad \forall f\in D(\hat{B}),$

$G(t,f)$ - неубывающая функция t ;

4) $\|\hat{E}(t)\|\leq 1+\gamma t,\quad t\in[0,t_0];$

5) $\|(\hat{E}(t)-I-t\hat{A})f\|\leq C_3(\|f\|)t^{1+\theta}\|\hat{B}f\|,\quad \theta>0,$

$\forall f\in D(\hat{B}),\quad t\in[0,t_0].$

Тогда для любого $t\geq 0$

$$\hat{U}(t)=s-\lim_{N\to\infty}\hat{E}^N\left(\frac{t}{N}\right). \tag{21}$$

Доказательство. Из условия 4) следует, что для $\forall f\in D(\hat{B})$,

$$\|[\hat{E}^N(t/N)-\hat{U}(t)]f\|\leq\sum_{l=0}^{N-1}\|\hat{E}^{N-l}(t/N)\hat{U}^l(t/N)-$$

$$-\hat{E}^{N-l-1}(t/N)\hat{U}^{l+1}(t/N)\|\leq$$

$$\leq\sum_{l=0}^{N-1}\left(1+\frac{\gamma t}{N}\right)^{N-l-1}\|[\hat{E}(t/N)-\hat{U}(t/N)]\hat{U}^l(t/N)f\|\leq$$

$$\leq\sum_{l=0}^{N-1}\left(1+\frac{\gamma t}{N}\right)^{N-l-1}\left\{\|[\hat{E}(t/N)-I-t/N\,\hat{A}]\hat{U}^l(t/N)f\|+\right.$$

$$\left.+\|[\hat{U}(t/N)-I-t/N\,\hat{A}]\hat{U}^l(t/N)f\|\right\}.$$

Но

$$\| [\hat{U}(t/N) - I - t/N\,\hat{A}]\hat{U}^{l}(t/N) f \| =$$

$$= \| \int_0^{t/N} (t/N - \tau)\hat{A}\hat{U}(t)\hat{U}(tl/N) f d\tau \| \leq$$

$$\leq \left(\frac{t}{N}\right)^{1+\theta} e^{\gamma \frac{l+1}{N} t} \| A f \|$$

и, в силу условий 3), 5)

$$\| [\hat{E}(t/N) - 1 - t/N\,\hat{A}]\hat{U}^{l}(t/N) f \| \leq C_3 (t/N)^{1+\theta} \| \hat{B}\hat{U}(lt/N) f \| \leq$$

$$\leq C_3 G(t, f)(t/N)^{1+\theta}$$

и поэтому

$$\| [\hat{E}(t) - \hat{U}(t)] f \| \leq \sum_{l=0}^{N-1} \left(1 + \frac{\gamma t}{N}\right)^{N-l-1} (t/N)^{1+\theta} \Big[2 e^{\gamma \frac{l+1}{N} t} \times$$

$$\times \| A f \| + C_3(\| f \|) G(t, f) \Big] \leq t^{1+\theta} e^{\gamma t} \Big[2 e^{\gamma t} \| A f \| +$$

$$+ C_3 G(t, f) \Big] \sum_{l=0}^{N-1} \frac{1}{N^{1+\theta}} = O(N^{-\theta}).$$

А так как $\overline{D(\hat{B})} = L$, то (21) имеет место. Лемма доказана.

Теперь применим лемму к операторам $\hat{A}$, $\hat{U}(t) = e^{t\hat{A}}$, положив $\hat{B} = \hat{B}_1 \hat{B}_1^*$, $D(\hat{B}) = \mathcal{S}^{n+1}(R^1)$,

$$\hat{B} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} + 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x} + 1 & 0 & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

Покажем сначала, что для некоторых $m_1, m_2 > 0$

$$m_1(\|\hat{A}^2 u\| + \|u\|) \le \|\hat{B}u\| \le m_2(\|\hat{A}^2 u\| + \|u\|) . \qquad (22)$$

Обозначим $\hat{T} = i a(x)\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2i} a'(x)$. Тогда для $u \in \mathcal{S}^{n+1}(R^1)$

$$\|\hat{A}u\|^2 = \|\hat{T}u_1 + \sum_{j=2}^{n} \kappa_j a u_{j-1}\|^2 + \\ + \|\hat{T}u_0\|^2 + \sum_{j=2}^{n} \kappa_j^2 \|a u_{j-1}\|^2 \qquad (23)$$

и поэтому для некоторых $m_3, m_4 > 0$

$$m_3(\|\hat{A}u\| + \|u\|) \le (\|\hat{T}u_0\| + \|\hat{T}u_1\| + \|u\|) \le m_4(\|\hat{A}u\| + \|u\|).$$

С другой стороны для $\varphi \in \mathcal{S}(R^1)$ выполняются неравенства

$$m_5(\|\varphi'\|_{L_2} + \|\varphi\|_{L_2}) \le (\|\hat{T}\varphi\| + \|\varphi\|) \le m_6(\|\varphi'\|_{L_2} + \|\varphi\|_{L_2}).$$

Отсюда, учитывая (23), (24) получаем (22).

Из результатов работы [7] следует, что операторы $\hat{U}(t) = e^{t\hat{A}}$ унитарны в $L_2^{n+1}(R^1)$ и поэтому условия 1) - 3) леммы выполняются в силу неравенств (22).

Условие 4) леммы - это уже доказанное утверждение 1) теоремы. Осталось проверить выполнение условия 5). По формуле Тейлора

$$E(\kappa,t) - I - tA(\kappa) = \int_0^t (t-\tau)\frac{\partial E(\kappa,\tau)}{\partial\tau}\, d\tau =$$

$$= \int_0^t (t-\tau)\left[i\cos g(\kappa)\tau\, A(\kappa) + 2\,\frac{\sin g(\kappa)\tau}{g(\kappa)}\, A^2(\kappa)\right] dt .$$

Оператор $\hat{R}(t)$ с символом

$$iA(\kappa)\cos g(\kappa)\tau + 2A^2(\kappa)\frac{\sin g(\kappa)\tau}{g(\kappa)}$$

имеет вид

$$[\hat{R}(t)\varphi](x) = \sum_{i=0}^{2} r_i(\kappa, t, x, y)\frac{\partial^i}{\partial x^i}\varphi(\Phi^t(x)) +$$

$$+\int s(\kappa, \tau, x, y)\varphi(y)\,dy,$$

где функции $r_i(\kappa, \tau, x)$, $s(\kappa, \tau, x, y)$ равномерно ограничены по $x, y \in R^1$, $|\kappa| \leq æ$, $|\tau| \leq t_0$ и носитель функции $s(\kappa, \tau, x, y)$ сосредоточен в области $|x - y| \leq C_1|\tau|$.

Отсюда, учитывая (22), нетрудно усмотреть выполнение условия 5) леммы (ср. с доказательством утверждения 2) теоремы). Теорема доказана.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ I

Воспользуемся разложением решения задачи Коши (I) по плоским волнам.

Обозначим $\hat{F} : L_2^{n+1}(R^n) \to L_2^{n+1}(R^n)$ оператор

$$\hat{F}v = \tilde{v}, \quad \tilde{v}_j(x_1, \kappa) = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\int e^{i(\kappa, \bar{x})} v(\bar{x})\,d\bar{x},$$

где $\bar{x} = (x_2, \ldots, x_n)$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$.

Тогда, в силу независимости a от $\bar{x}$, получаем, что

$$e^{t\hat{A}}v = \hat{F}^{-1}e^{t\hat{A}(\kappa)}\hat{F}v$$

и, с другой стороны, $\hat{E}(t)v = \hat{F}^{-1}\hat{E}(\kappa, t)\hat{F}v$.

Поэтому, учитывая унитарность оператора $\hat{F}$ и неравенство (5), для любого вектора $v \in L_2^{n+1}(R^n)$, такого, что $\operatorname{Supp}\hat{F}v$ содержится в цилиндре $|\kappa| < æ$, получаем

$$\|\hat{E}(t)v\|^2_{L_2^{n+1}(R^n)} = \|\hat{E}(\kappa,t)\hat{F}v\|^2_{L_2^{n+1}(R^n)} =$$

$$= \iint \left|[\hat{E}(\kappa,t)\hat{F}v](\kappa,x_1)\right|^2 dx_1\, d\kappa \leqslant$$

$$\leqslant (1+\gamma(æ)|t|)\int \left|[\hat{F}v](\kappa,x_1)\right|^2 dx_1\, d\kappa =$$

$$= \left(1+\gamma(æ)|t|\right)\|v\|_{L_2^{n+1}(R^n)}$$

Таким образом утверждение I) доказано.

Утверждение 2) является прямым следствием утверждения 2) теоремы 2.

Докажем теперь утверждение 3). Пусть вектор v таков, что $\tilde{v}$ - бесконечно-дифференцируемая функция. Тогда в силу теоремы 2 при $|\kappa|<æ$

$$\int \left|\hat{F}\left(e^{t\hat{A}}v - \hat{E}\left(t/N\right)^N v\right)\right|^2 dx_1 \longrightarrow 0$$

при $N \longrightarrow \infty$.

Так как операторы $\hat{E}(\kappa, t/N)^N$ равномерно ограничены по норме при $N \to \infty$, $|\kappa| < æ$, а операторы $e^{t\hat{A}}$, $\hat{F}$ унитарны, то, применяя теорему о мажорируемой сходимости, заключаем, что 3) верно для финитных бесконечно-дифференцируемых $\tilde{v}$. А так как множество таких $\tilde{v}$ плотно в $L_2^{n+1}(R^n)$, то утверждение 3) верно для любых $v \in L_2^{n+1}(R^n)$.

Теорема доказана.

Литература

1. Березин Ф.А., Шубин М.А. Уравнение Шредингера., МГУ, 1983.
2. Буслаев В.С., Континуальные интегралы и асимптотика решений параболических уравнений при $t \to 0$. Приложения к дифракции. Проблемы математической физики, Л., ЛГУ, 1967, с. 85 - 107.
3. Маслов В.П., Шишмарёв И.А. О произведении гипоэллиптических операторов. Современные проблемы математики. М., 1977, т. 8, с.137-197.
4. Шишмарёв И.А. О задаче Коши и Т-произведении для гипоэллиптических систем. Изв. АН СССР, сер. Матем. 1982, т. 46, № 3, с. 617 - 649.
5. Fujiwara D. A construction of the fundamental solution for the Schrödinger equation. - J.d'Analyse Math., 1979, v.35, p.41-96.
6. Kumano-go H. Fundamental solution for a hyperbolic system with diagonal principal part. - Comm. in Partial Differential Equations, 4(9), 1979, p.959 -1015.
7. Wilcox C.H. Wave operators and asimptotic solution of wave propagation problems of classical physics. - Arch.Rat.Mech.Anal., 1966. 22, p.37 - 78.

Дата поступления статьи
28 октября 1985 г.

Михаил Александрович Антонец

КОНТИНУАЛЬНЫЙ ИНТЕГРАЛ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

Подписано в печать 27.11.85 г. МЦ 02048. Формат 60 x 84/16.
Бумага писчая. Печать офсетная. Объем 1,2 усл.печ.л. Тираж 120.
Заказ 4331. Бесплатно.

Отпечатано на ротапринте НИРФИ