Министерство высшего и среднего специального образования
Р С Ф С Р
Горьковский ордена Трудового Красного Знамени
научно-исследовательский радиофизический институт (НИРФИ)

Антонец М А
Шерешевский И А
Шеретнева Л В

Препринт № 215

ТОНКАЯ СТРУКТУРА ДИСПЕРСИОННЫХ КРИВЫХ ДЛЯ ВОЛН В СЛОИСТОЙ СРЕДЕ

Горький 1986

Введение

I. Волны, возбужденные источником в слоистой среде, описываются решением $u(t,r)$ волнового уравнения

$$u_{tt} - c^2(z)\Delta u = f(t,r)e^{-i\Omega t}, \qquad t \geq 0 \,, \tag{I}$$
$$u(0,r) = u_t(0,r) = 0, \quad r = (x,y,z).$$

Если источник локализован, то на больших расстояниях от него решение задачи (I) можно приближенно представить в виде

$$u(t,r) \approx e^{i\frac{\pi}{4}} \iint d\omega\, dr' \sum_{l=1}^{N(\omega)} \sqrt{2\pi / \kappa_l(\omega)|r_\perp - r'_\perp|} \times$$
$$\times \varphi_l(\omega,z)\varphi_l(\omega,z')e^{i\kappa_l(\omega)|r_\perp - r'_\perp| - i\omega t} \hat{f}(\omega - \Omega, r'), \tag{2}$$

где $\hat{f}(\omega) = \int f(t,r)e^{i\omega t}\,dt$, $\quad r_\perp = (x,y)$,

$\varphi_l(\omega,z)$ – нормированная собственная функция, $\kappa_l^2(\omega)$ – соответствующее ей собственное значение стационарного уравнения Шредингера,

$$\varphi_l'' + \frac{\omega^2}{c^2(z)}\varphi_l = \kappa_l^2(\omega)\varphi_l \,, \tag{3}$$

с соответствующими граничными условиями, $N(\omega)$ – число изолированных положительных собственных значений этого уравнения (см., например, [I,2]). Функция $\kappa_l(\omega)$ называется законом дисперсии l -й нормальной волны (дисперсионной кривой). Как видно из (2), закон дисперсии в значительной степени определяет структуру поля $u(t,r)$ при больших $|r_\perp|$. При этом весьма существенно влияние таких особенностей кривой $K_l(\omega)$, как экстремумы ее первой производной. Так, например, для кусочно-постоянного профиля $c^2(z)$ (модель Пекериса) каждая из кривых $dK_l/d\omega$ обладает экстремумами. Анализ влияния этих экстремумов на распространение волн см. в [I,2]. В [2] отмечено, что в многослойной среде с кусочно-постоянным профилем $c(z)$ число экстремумов на кривых групповой скорости может быть сколь угодно велико. Наличие нескольких локальных экстремумов на кривых групповой скорости для кусочно-линейного профиля видно на графиках, приведенных в работе [3].

В предлагаемой работе показано, что при наличии больших вариаций градиента в гладком профиле $c(z)$, в поведении дисперсионных кривых $K_l(\omega)$ могут возникать характерные особенности, а именно, локальные экстремумы и нули производных функций $K_l(\omega)$ по параметру ω. Эти особенности отсутствуют при вычислении дисперсионных кривых в приближении ВКБ и поэтому естественно называть их тонкой структурой дисперсионных кривых.

Тонкая структура дисперсионных кривых была обнаружена при численном решении задачи (I) для некоторых модельных $c(z)$.

2. Прежде, чем перейти к описанию численных результатов, приведем некоторые априорные оценки функций $K_l(\omega)$ и $dK_l/d\omega$. Мы будем рассматривать задачу (3) в полупространстве $z>0$ с граничным условием $u(t,r_\perp,0)=0$, предполагая, что $c(z)=c_\infty$ при $z>H$ и $c_{min}=\inf c(z)$, $c_{max}=\sup c(z)$ отличны от нуля и от бесконечности.

Изучение кривых $K_l(\omega)$, по существу, сводится к известной в квантовой механике задаче изучения зависимости энергетических уровней от константы связи (см., например, [4,6]).

Используя обычные в теории уравнения Шредингера вариационные методы, можно показать, что фазовая скорость $v_l(\omega) = \omega / k_l(\omega)$ l -й нормальной волны и соответствующая групповая скорость $W_l(\omega) = (dk_l / d\omega)^{-1}$ удовлетворяют неравенствам

$$C_{min} \leq v_l(\omega) \leq C_\infty , \tag{4}$$

$$\frac{C^2_{min}}{v_l(\omega)} \leq W_l(\omega) \leq v_l(\omega) \tag{5}$$

и предельным соотношениям

$$v_l(\omega_l^{кр} + 0) = W_l(\omega_l^{кр} + 0) = C_\infty , \tag{6}$$

$$v_l(\infty) = W_l(\infty) = C_{min} , \tag{7}$$

где $\omega_l^{кр}$ - критическая частота l -й моды, т.е. $N(\omega_l^{кр} + 0) = l = N(\omega_l^{кр} - 0) + 1$.

Доказательства соотношений (4)-(7) приведены в Приложении. Там же показано, что неравенства (4)-(5) в определенном смысле неулучшаемы. Отметим еще, что из неравенств (5) следует, что функция $v_l(\omega)$ монотонно убывает с ростом ω .

Неравенства (4) и соотношение $v_l(\omega_l^{кр} + 0) = C_\infty$ давно известны в квантовой механике.

2. Результаты численного анализа

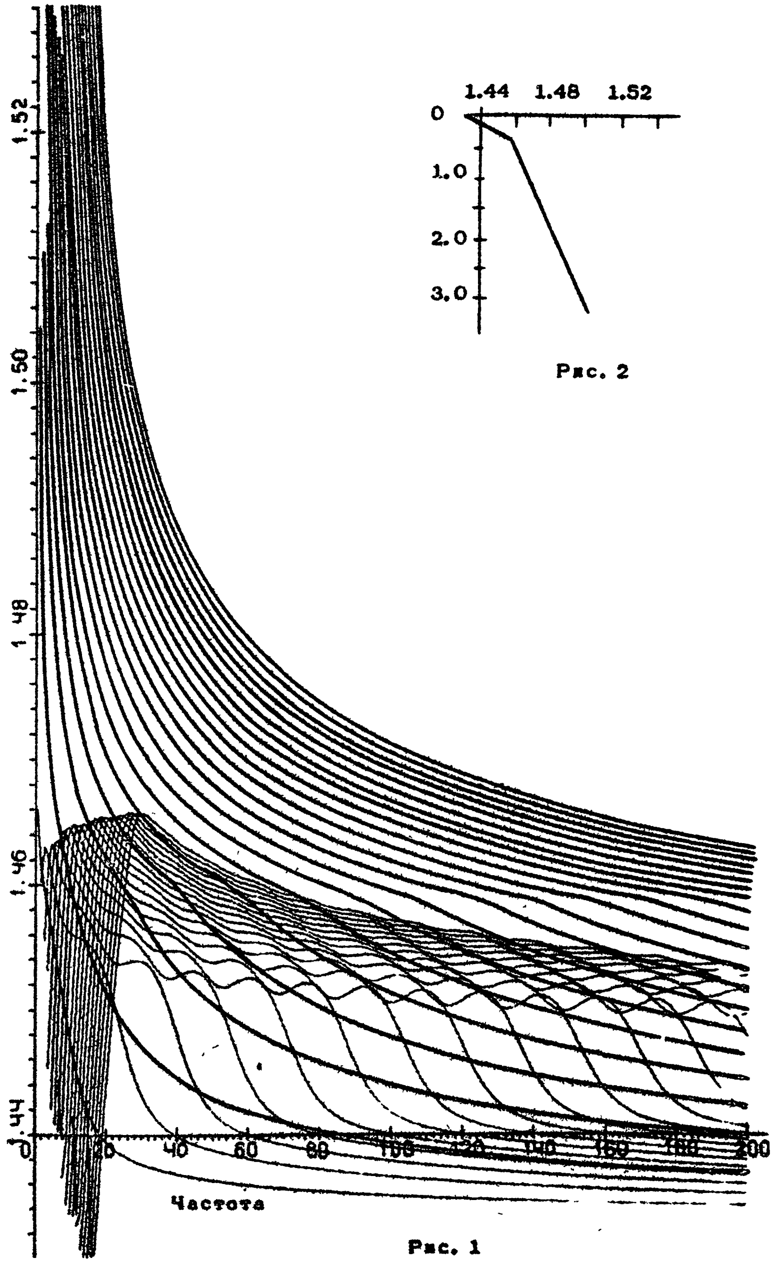
Численный анализ дисперсионных кривых был проведен для ряда кусочно-линейных функций $C^{-2}(z)$. Для профилей $C(z)$ такого вида вычисление собственных значений уравнения (3) сводится к решению трансцендентного уравнения, содержащего только элементарные функции и функции Эйри. Вычисление функций Эйри с достаточно высокой точностью производилось с помощью рядов Люка [7]. При вычислении групповой скорости W_l были использованы явные формулы, выражающие W_l в виде рациональной функции от функций Эйри и их производных, аргументы которых выражаются через ω и $K_l(\omega)$. Это позволило вычислить $W_l(\omega)$, избежав потери точности, происходящей при численном дифференцировании. На рис. I приведены графики функций $V_l(\omega), W_l(\omega)$ для $l = 1, 2, \ldots$, рассчитанные для профиля $C^{-2}(z)$, изображенного на рис. 2. Этот профиль предложен в [8] в качестве модели зависимости скорости звука от глубины в полярном океане.

В соответствии с соотношениями (6), (7) значения групповых скоростей на частотах, близких к критическим, близки к C_∞ и приближаются к C_{min} при больших ω. Следует также отметить наличие значений W_l, меньших чем C_{min}.

В то же время на графиках функций $W_l(\omega)$ видно большое число локальных экстремумов и точек перегиба. Число таких особенностей примерно равно номеру моды. Такого же рода особенности видны на графиках функций $d^2K_l(\omega)/d\omega^2$, приведенных на рис. 3.

Фазовые и групповые скорости могут быть вычислены в приближении ВКБ из условия квантования. Соответствующие графики для того же профиля $C^{-2}(z)$ приведены на рис. 4.

Следует отметить, что, в то время как кривые фазовых скоростей в приближении ВКБ практически совпадают с точными (относительная погрешность не превышает 10^{-5}), с кривыми групповых скоростей дело обстоит иначе: относительная погрешность достигает десятков процентов и, что более важно, у кривых для групповых скоростей в приближении ВКБ отсутствуют упоминавшиеся выше характерные детали.



1.44
1.48
1.52
0
1.0
2.0
3.0

Рис. 2

1.52
1.50
1.48
1.46
1.44
0
20
40
60
80
100
120
140
160
180
200
Частота

Рис. 1

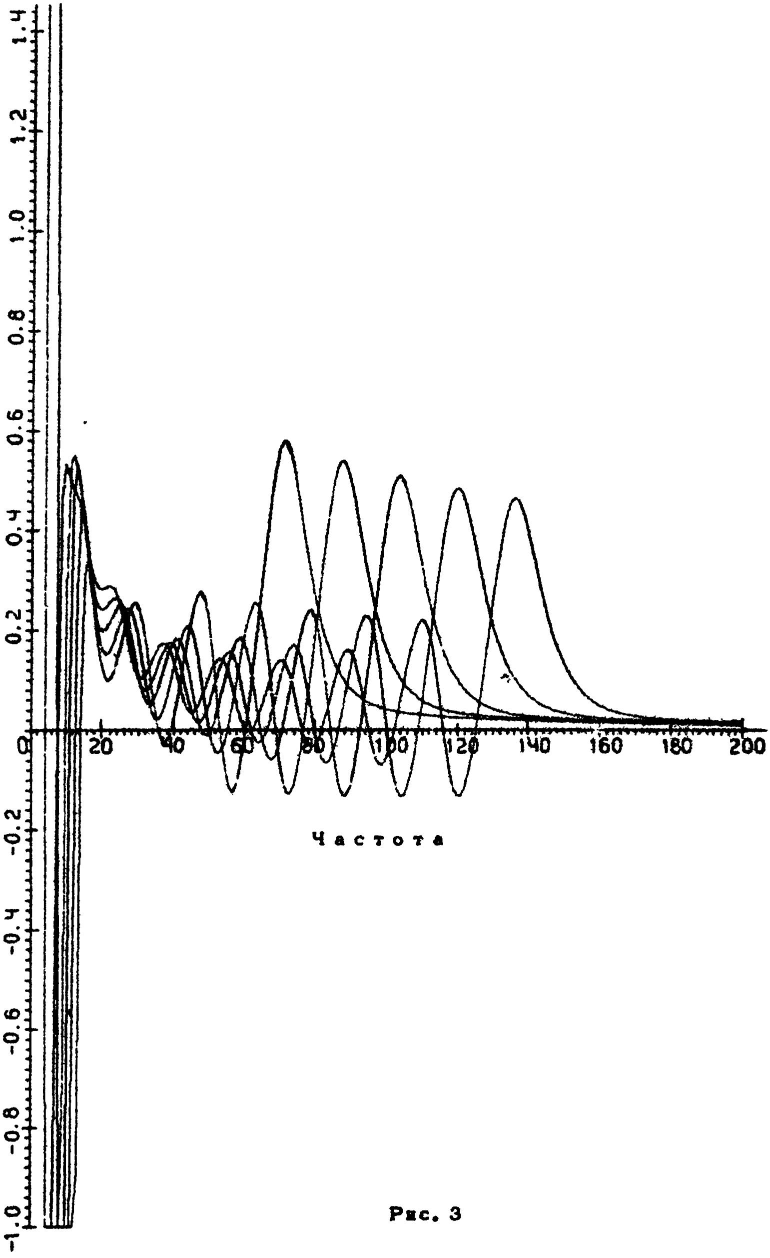

1.4
1.2
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1.0
0
20
40
60
80
100
120
140
160
180
200
Частота

Рис. 3

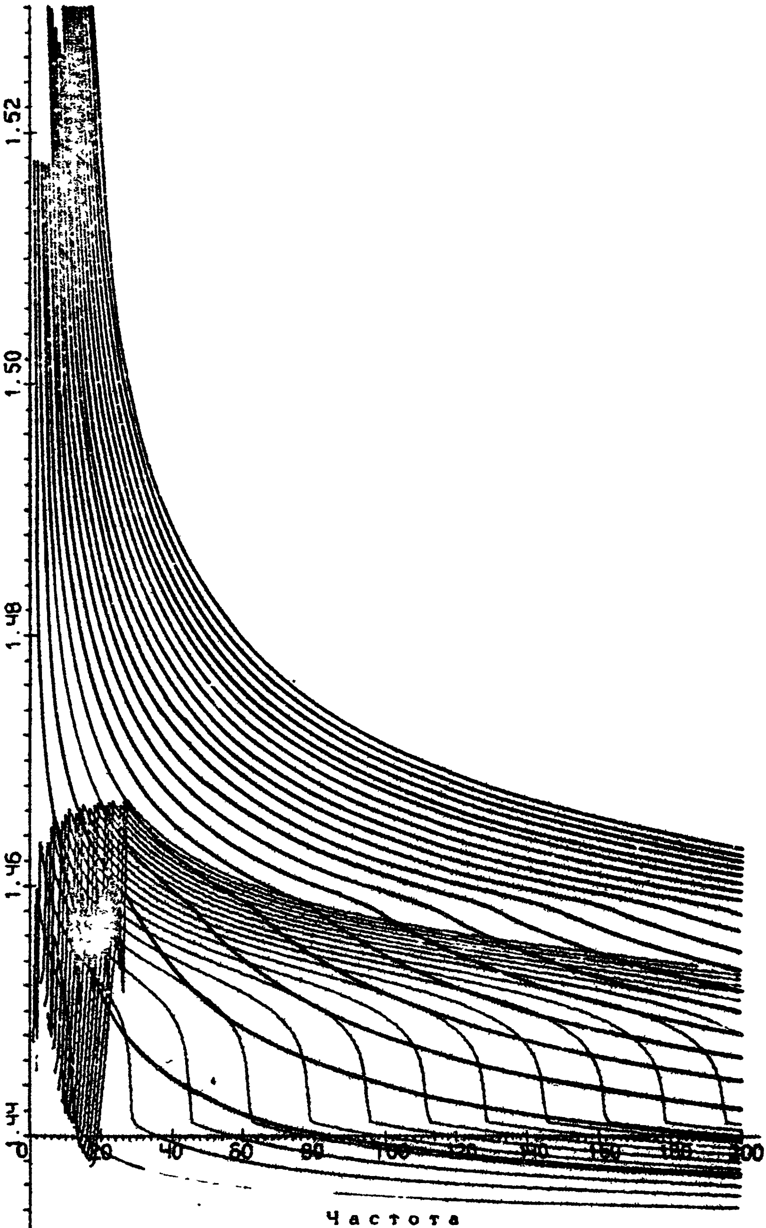


Рис. 4

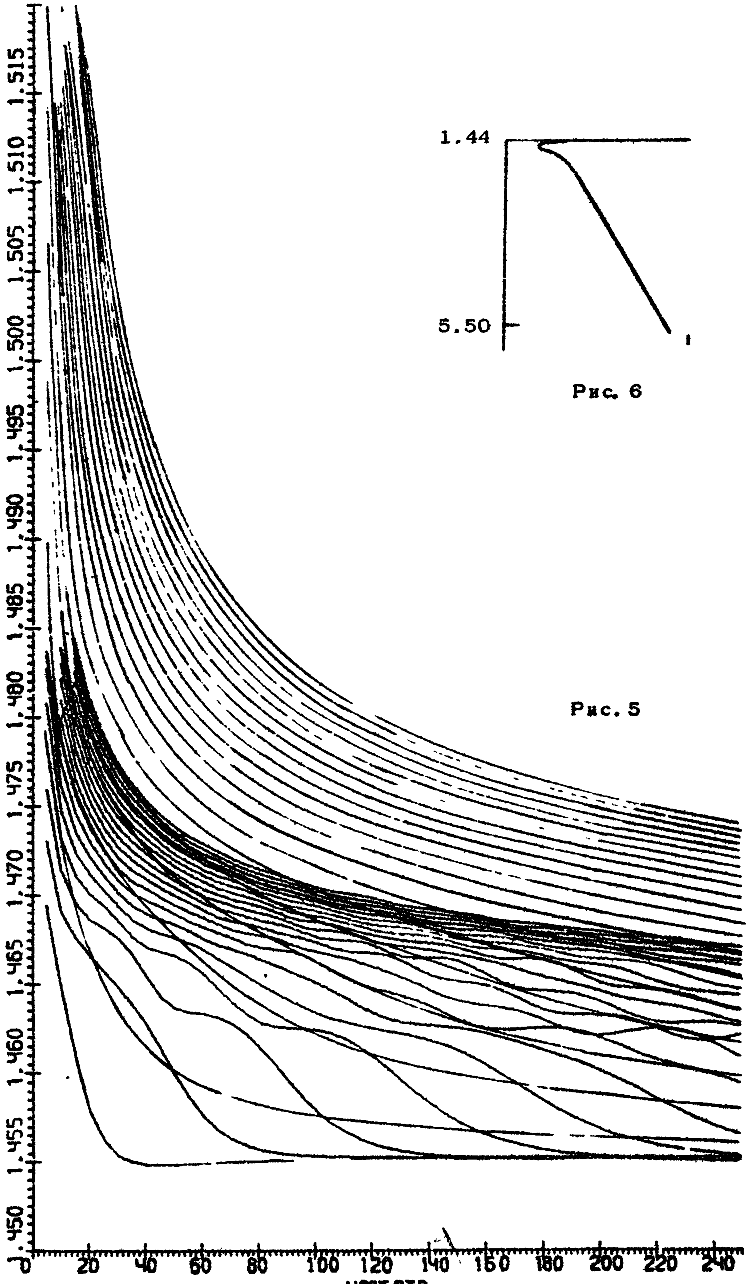

1.44
5.50
1.515
1.510
1.505
1.500
1.495
1.490
1.485
1.480
1.475
1.470
1.465
1.460
1.455
1.450
0
20
40
60
80
100
120
140
160
180
200
220
240
ЧАСТОТА

Рис. 6

Рис. 5

На рис. 5 приведены кривые $v_l(\omega)$, $W_l(\omega)$ для профиля $C^{-2}(z)$, изображенного на рис. 6. Эти кривые обладают аналогичными особенностями.

Кроме того, следует обратить внимание на систематическое пересечение кривых для групповых скоростей соседних мод в области ω, где групповая скорость близка к C_{min}.

3. Асимптотический анализ тонкой структуры дисперсионных кривых

Для простых кусочно-линейных профилей $C(z)$ тонкая структура дисперсионных кривых может быть детально изучена аналитическими средствами.

Рассмотрим сначала профиль $n^2(z) = C^{-2}(z)$ вида

$$n^2(z) = \begin{cases} n_1^2, & 0 \le z \le h \\ n_2^2 - p(z-h), & h \le z \le H \\ n_\infty^2, & z > H \end{cases},$$

где

$$n_1^2 > n_2^2 > n_\infty^2 > 0,$$

$$n_\infty^2 < n_2^2 - p(H-h), \quad p>0, \quad H > h > 0.$$

Положим $q^2 = n_1^2 - n_2^2, \quad \mu = q^2/ph,$

$$\theta_l = \sqrt{n_1^2 - v_l^{-2}}\,\frac{m}{q}, \quad \Psi_l = \sqrt{v_l^{-2} - n_\infty^2}, \quad m = \omega h q.$$

Собственная функция φ_l, отвечающая собственному значению $K_l(\omega)$, имеет вид

$$\varphi_l(z)=\begin{cases}\sin(\theta_l z/h)\\ B_l^1 Ai(S_l(z))+B_l^2 Bi(S_l(z)), & h\le z\le H,\\ C_l\, e^{-(z-H)\omega\psi_l}\end{cases}$$

где $S_l(z)=S_l(z,\omega)=S_l(h)+(m^2/\mu)^{1/3}(z/h-1)$,

$$S_l(h)=(\mu m)^{2/3}\,(1-\theta_l^2/m^2).$$

Из условия непрерывности функций $\varphi_l(z)$, $\dfrac{\partial\varphi_l}{\partial z}$ вытекает дисперсионное уравнение $F(\theta_l, m)=0$, где

$$F(\theta_l,m)=\begin{vmatrix} Bi'(S_l(h))\sin\theta_l-Bi(S_l(h))\left(\frac{\mu}{m^2}\right)^{1/3}\theta_l\cos\theta_l, & Bi'(S_l(H))+Bi(S_l(H))\left(\frac{\mu}{m^2}\right)^{1/3}\psi_l\\ Ai'(S_l(h))\sin\theta_l-Ai(S_l(h))\left(\frac{\mu}{m^2}\right)^{1/3}\theta_l\cos\theta_l, & Ai'(S_l(H))+Ai(S_l(H))\left(\frac{\mu}{m^2}\right)^{1/3}\psi_l\end{vmatrix}\qquad(8)$$

и соотношение

$$C_l=\frac{Bi'(S_l(h))\sin\theta_l-\left(\frac{\mu}{m^2}\right)^{1/3}Bi(S_l(h))\theta_l\cos\theta_l}{Bi'(S_l(H))+\left(\frac{\mu}{m^2}\right)^{1/3}Bi(S_l(H))\psi_l}.$$

Можно показать, что

$$\int_h^H Q\,\varphi_l^2\,dz=-\varphi_l\varphi_l'\Big|_h^H+\frac{Q}{3Q_z'}\left(\varphi_l'^2+Q\varphi_l^2\right)\Big|_h^H,\qquad(9)$$

$$\int_h^H \varphi_l^2\,dz=\frac{1}{Q_z'}\left(\varphi_l'^2+Q\varphi_l^2\right)\Big|_h^H,\qquad(10)$$

где

$$Q=\omega^2(n^2-v_l^{-2}(\omega)).$$

Поэтому

$$\int_0^\infty Q\varphi_l^2 dz = \frac{Q(h)}{3}\int_0^\infty \varphi_l^2 dz - \frac{1}{3h}\left(2\theta_l^2 + \frac{m^2}{2}\right)\left(1 - \frac{\sin 2\theta_l}{2\theta_l}\right) - c_l^2 \frac{\psi_l^2}{h}\left(1 - \frac{\theta_l^2 - m^2}{3\psi_l^2}\right),$$

$$\int_0^\infty \varphi_l^2 dz = \frac{h}{2}\left(1 - \frac{\sin 2\theta_l}{2\theta_l}\right) + \frac{q^2}{2}\left(\frac{\theta_l^2}{m^2} - \sin^2\theta_l\right) + c_l^2 \frac{h}{2\psi_l}$$

и, в силу соотношения (П.2),

$$W_l^{-1} = v_l^{-1} + v_l\,\frac{n_2^2 - v_l^{-2}}{3} +$$

$$+ v_l q^2 \frac{\dfrac{2\theta_l^2}{m^2} - \dfrac{1}{3}\left(4\dfrac{\theta_l^2}{m^2} - 1\right)\left(1 - \dfrac{\sin 2\theta_l}{2\theta_l}\right) - c_l^2 \dfrac{\psi_l^2}{m^2}\left(1 + \dfrac{\theta_l^2 - m^2}{3\psi_l^2}\right)}{\left(1 - \dfrac{\sin 2\theta_l}{2\theta_l}\right) + 2\mu\left(\dfrac{\theta_l^2}{m^2} - \sin^2\theta_l\right) + \dfrac{c_l^2}{\psi_l}}.$$

В п. 4 Приложения показано, что для любого натурального N и достаточно больших натуральных l можно выбрать величины ω_l^1, ω_l^2 так, что для всех ω из интервала (ω_l^1, ω_l^2) выполняются неравенства

$$\left|n_2^2 - v_l^{-2}(\omega)\right| \leq c_1 l^{-2/3}, \qquad \text{(11)}$$

$$\left|W_l^{-1} - f_l^0\right| \leq c_2 l^{-2/3}, \qquad \text{(12)}$$

где

$$f_l^0(\omega) = n_2 + \frac{q^2}{n_2(1 + \mu(1 + \cos 2\theta_l))},$$

причем функция $\theta_l(\omega)$ монотонно возрастает на этом интервале и

$$\theta_l(\omega_l^2) - \theta_l(\omega_l^1) \geq N\pi.$$

Отсюда следует, что в интервале (ω_l^1, ω_l^2) функция $f_l^0(\omega)$ совершает N колебаний с амплитудой $q^2\mu(n_2(1+2\mu))^{-1}$ и периодом π/hq. Согласно оценке (I2) при достаточно больших l функция $W_l^{-1}(\omega)$ также совершает в этом интервале не менее N колебаний, и, следовательно, имеет не менее $2N$ локальных экстремумов. Отметим, что величина H влияет лишь на значения l, при которых верны приведенные выше утверждения.

2. Рассмотрим теперь другую функцию $n^2(z)$, являющуюся непрерывной в отличие от изученной выше:

$$\tilde{n}_H^2(z)=\begin{cases} n_1^2-p_1 z, & 0\le z\le h \\ n_1^2-p_1 h-p_2(z-h), & h<z\le H \\ n_1^2-p_1 h-p_2(H-h), & z>H, \quad p_1,p_2>0 \end{cases}$$

Заметим сразу же, что и в этом случае приближенные формулы для W_l не содержат H и могут быть выведены при $H=\infty$. Мы воспользуемся этим для упрощения вычислений. Положим $n_\infty^2(z)=n^2(z)$, и пусть $\mu=p_1/p_2$. Заметим, что это определение величины μ согласуется с использовавшимся ранее, поскольку величину q^2/h можно понимать как среднее значение градиента функции $n^2(z)$ на интервале $0\le z\le h$. Обозначим

$$S_l^1(z)=-\left(\frac{\omega}{p_1}\right)^{2/3}\left(n^2(z)-v_l^{-2}\right),$$

$$S_l^2(z)=-\left(\frac{\omega}{p_2}\right)^{2/3}\left(n^2(z)-v_l^{-2}\right).$$

Собственная функция $\varphi_l(z)$, отвечающая собственному значению $\left(\frac{\omega}{v_l}\right)^2$, задается выражением

$$\varphi_l(z)=\begin{cases} B\left(Bi(S_l^1(0))Ai(S_l^1(z))-Ai(S_l^1(0))Bi(S_l^1(z))\right), & 0\le z\le h,\\ Ai(S_l^2(z)), & z>h\end{cases}$$

а дисперсионное уравнение, вытекающее из условия непрерывности функций φ_l и $\partial\varphi_l/\partial z$, имеет вид

$$Ai'(S_l^2(h))A-\mu^{1/3}Ai'(S_l^2(h))A_1=0,$$

где

$$A=Bi(S_l^1(0))Ai(S_l^1(h))-Ai(S_l^1(0))Bi(S_l^1(h)),$$

$$A_1=Bi(S_l^1(0))Ai'(S_l^1(h))-Ai(S_l^1(0))Bi'(S_l^1(h)).$$

Применяя соотношения (9), (I0), получим, что

$$\int_0^\infty \varphi_l^2(z)dz=\frac{B^2}{\pi^2(\omega\rho_1)^{1/3}}\left(1+\pi^2(\mu-1)(A_1^2-S_l^1(h)A^2)\right)$$

и

$$\int_0^\infty (n^2(z)-v_l^{-2})\varphi_l^2 dz=\frac{B^2}{\pi^2(\omega\rho_1)^{1/3}}\times$$

$$\times\left(n_1^2-v_l^{-2}+\pi^2(\mu-1)(n^2(h)-v_N^{-2})(A_1^2-S_l^1(h)A^2)\right).$$

Поэтому в силу (П2)

$$W_l^{-1}=v_l^{-1}+v_l\,\frac{n_2-v_l^{-2}}{3}+v_l\,\frac{q^2}{3(1+\pi^2(\mu-1)g_l(\omega))},$$

где $g_l(\omega)=A_1^2-S_l(\omega)A^2$.

Выберем ω_l^2 из условия $v_l(\omega_l^2)=n_2^{-1}=n(h)^{-1}$. Такой выбор возможен при любом натуральном l в силу монотонности $v_l(\omega)$ и равенств $v_l(0)=\infty$, $v_l(\infty)=n_1^{-1}$, которые доказываются аналогично (6), (7). Тогда $S_l^1(h,\omega_l^2)=S_l^2(h,\omega_l^2)=0$ и $S_l^2(z)>0$

при $z>h$. Поэтому функция $\varphi_l(z)$ не может иметь нулей при $z\geq h$, и все ее нули содержатся в интервале $(0,h)$. В силу осцилляционной теоремы (см. [II]) $\varphi_l(z)$ имеет l нулей, не считая $z=0$. Из перемежаемости нулей любых двух решений уравнения Эйри следуют теперь неравенства ($-\zeta_l$ — l-й нуль функции $Ai(-\zeta)$)

$$\zeta_{l+1}<S_l^1(0,\omega_l^2)<\zeta_{l-1}. \tag{I4}$$

В силу известных асимптотических формул [5] $\zeta_l\cong-(3\pi l/2)^{2/3}$, и поэтому из (I4) следует, что

$$M_1 l^{2/3}\leq S_l^1(0,\omega_l^2)\leq M_2 l^{2/3} \tag{I5}$$

Пусть натуральное N меньше l. Выберем ω_l^1, v_l так, чтобы собственная функция $\varphi_l(z)$ имела $l-N-1$ нуль в интервале $(0,h)$ и $N+1$ нуль при $z\geq h$. Для этого потребуем, чтобы выполнялось равенство

$$S_l^2(h,\omega_l^1)=\zeta_{N+1}. \tag{I6}$$

Тогда дисперсионное уравнение примет вид

$$G(S_l^1(0))=Ai(\mu^{-2/3}\zeta_{N+1})Bi(S_l^1(0))-Bi(\mu^{-2/3}\zeta_{N+1})Ai(S_l^1(0))=0$$

Пусть σ_j, $j=1,2,\ldots$ — отрицательные корни функции $G(\sigma)$, занумерованные в порядке убывания. Тогда для некоторого M выполняется равенство

$$\mu^{-2/3}\zeta_{N+1}=\sigma_M . \tag{18}$$

В качестве $\omega_l^1, v_l^1(\omega_l^1)$ возьмем решение системы уравнений

$$\begin{gathered}-\left(\frac{\omega_l^1}{\rho_2}\right)^{2/3}\left(n_2^2-v_l^{-2}(\omega_l^1)\right)=\zeta_{N+1}\\ -\left(\frac{\omega_l^1}{\rho_1}\right)^{2/3}\left(n_1^2-v_l^{-2}(\omega_l^1)\right)=\sigma_{M+l-N} .\end{gathered} \tag{19}$$

Тогда

$$v_l^{-2}(\omega_l^1)=\frac{\mu^{2/3}n_2^2\rho_l-n_1^2}{\rho_l\mu^{2/3}-1}, \qquad \rho_l=\frac{\sigma_{M+l-N}}{\zeta_{N+1}}, \tag{20}$$

а значит

$$v_l^{-2}(\omega_l^1)-n_2^2=\frac{q^2}{1-\mu^{2/3}\rho_l}<0,$$

если l достаточно велико и, следовательно, $\omega_l^1<\omega_l^2$. В интервале $(0,h)$ функция $S_l^1(z,\omega_l^1)$ монотонно изменяется от σ_M до σ_{M+l-N} и, следовательно, в силу теоремы о перемежаемости нулей, функция $\varphi_l(z,\omega_l^1)$ имеет в интервале $(0,h)$ $l-N-1$ нуль, и, таким образом, $\omega_l^1, v_l(\omega_l^1)$ удовлетворяют указанным выше условиям. Из соотношения (19) следует, что $S_l^1(0,\omega_l^1)$ удовлетворяет оценке

$$M_3 l^{2/3}\le S_l^1(0,\omega_l^1)\le M_4 l^{2/3},$$

аналогичной (I5), и поэтому, в силу монотонности $S_l^1(0,\omega)$ как функции ω, такая же оценка имеет место для всех ω из интервала (ω_l^1, ω_l^2). Из соотношения (20) и монотонности $v_l(\omega)$ следует неравенство

$$|v_l^{-2} - n_2^2| \leq \frac{q^2}{\mu^{2/3}\rho_l - 1} < C_3(\mu l)^{-2/3} \tag{21}$$

Используя соотношение (I3), получим отсюда

$$|W_l^{-1} - f_l^1| \leq C_4(\mu l)^{-2/3}, \tag{22}$$

где

$$f_l^1(\omega) = n_2 + \frac{q^2}{3n_2(1+\pi^2(\mu-1)g_l(\omega))},$$

а функция g_l определена соотношением (I3).

Для функций Эйри имеют место асимптотические формулы [5]

$$Ai(-z) = \pi^{-1/2}|z|^{-1/4}\left(\sin\left(\frac{2}{3}|z|^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right) + O(|z|^{-2})\right),$$

$$Bi(-z) = \pi^{-1/2}|z|^{-1/4}\left(\cos\left(\frac{2}{3}|z|^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right) + O(|z|^{-2})\right), z > 0, \tag{23}$$

поэтому

$$g_l(\omega) = \frac{G_0(\omega) + G_1(\omega)\cos(\theta_l(\omega) + \psi(\omega)) + O(l^{-3/2})}{2\pi|S_l^1(0,\omega)|^{1/2}},$$

где

$$G_0(\omega) = \frac{1}{2}(Ai'^2(\tau) + Bi'^2(\tau) - \tau(Ai^2(\tau) + Bi^2(\tau))),$$

$$G_1(\omega) = ((Ai'(\tau)Bi'(\tau) - \tau Ai(\tau)Bi(\tau)) +$$

$$+ \frac{1}{4}(Ai'^2(\tau) - Bi'^2(\tau) - \tau(Ai^2(\tau) - Bi^2(\tau)))^2)^{1/2},$$

$$\sin\psi = G_1^{-1}(Ai'(\tau)Bi'(\tau) - \tau Ai(\tau)Bi(\tau)),$$

$$\theta_l = \frac{2}{3}|S_l^1(0,\omega)|^{3/2} + \frac{\pi}{4}, \quad \tau = S_l^1(h,\omega).$$

Заметим, что в силу (16) и определения ω_l^2 величина τ принимает значения из интервала $(\mu^{-2/3}\zeta_{N+1}, 0)$, когда ω изменяется от ω_l^1 до ω_l^2.

Выбирая μ настолько большим, чтобы величина $\mu^{-\frac{2}{3}}|\zeta_{N+1}|$ была достаточно мала, мы можем добиться выполнения соотношений

$$\begin{aligned} &|G_1(\omega) - G_1(\omega_l^2)| < \varepsilon, \\ &|G_0(\omega) - G_0(\omega_l^2)| < \varepsilon, \\ &|\psi(\omega) - \psi(\omega_l^2)| < \varepsilon\pi, \end{aligned} \tag{24}$$

и, в силу (18), $M=0$, причем ε зависит лишь от μ и N и стремиться к нулю при $\mu\to\infty$. Отметим, что

$$G_1(\omega_l^2) = G_0(\omega_l^2) = 2Ai'^2(0). \tag{25}$$

В силу (23)-(25) функция $f_l^1(\omega)$ при всех достаточно больших l имеет в интервале (ω_l^1, ω_l^2) не менее $2N$ локальных экстремумов. Так как в силу (23) и (15) при достаточно больших l амплитуда колебаний функции $f_l^1(\omega)$ не меньше чем $C_5 l^{-1/2}$, то из оценки (22) следует, что и функция $W_l(\omega)$ имеет не менее $2N$ локальных экстремумов в указанном интервале.

Отметим, что из (23) вытекает простая приближенная формула для функции $W_l(\omega)$:

$$W_l^{-1} = n_2 + \frac{q^2}{3n_2\left[1+\pi^2(\mu-1)\,g_l^0(\omega)\right]}, \tag{26}$$

где

$$g_l^0(\omega) = \frac{Ai'^2(0)}{\pi\,|S_l^1(0,\omega)|^{1/2}}\left(1+\cos\left(\theta_l(\omega)\right)-\frac{\pi}{6}\right)\right).$$

Сколь угодно малым изменением функции $n_\infty^2(z)$ можно сделать ее бесконечно дифференцируемой. Применяя теорему о возмущении собственных значений [9], получаем отсюда, что для любых натуральных N существует гладкая функция $n^2(z)$, такая, что, по крайней мере, M функций $W_{l+1}(\omega), \ldots, W_{l+m}(\omega)$ имеют для некоторого l не менее $2N$ локальных экстремумов в соответствующих интервалах $(\omega_{l+k}^1, \omega_{l+k}^2)$, $k = 1, \ldots, M$.

Так как из (I5) и (I9) следует, что $\omega_l^1 \sim C_1 l$, $\omega_l^2 = C_2 l$ и $l \to \infty$, то приближенная формула (26) также, как и (I2) для $\partial k_l(\omega)/\partial\omega$, $\omega_l^1 < \omega < \omega_l^2$, представляет собой пример так называемой промежуточной асимптотики.

ПРИЛОЖЕНИЕ

I. Докажем сначала неравенства (4). Из вариационного принципа следует, что собственные числа κ_l^2 дискретного спектра уравнения (3) удовлетворяют неравенствам

$$\frac{\omega^2}{C_\infty^2} \leq \kappa_l^2 \leq \sup_{\varphi \neq 0} \frac{\left(\frac{\omega^2}{C^2(z)} \varphi_l, \varphi_l\right)}{(\varphi_l, \varphi_l)},$$

где $(\varphi, \psi) = \int_0^\infty \varphi(z)\, \psi(z)\, dz$. Отсюда

следует, что $\omega^2 / C_\infty^2 < \kappa_l^2 \leq \omega^2 / C_{min}^2$,

т.е. имеют место неравенства (4).

Для того, чтобы доказать неравенства (5), воспользуемся известным в теории возмущений соотношением (см. [9])

$$\frac{d\kappa_l^2}{d\omega^2} = \left(\frac{1}{c^2} \varphi_l, \varphi_l\right), \tag{П.I}$$

из которого следует, что

$$W_l(\omega) = \frac{1}{v_l(\omega)\left(\frac{1}{C^2}\varphi_l, \varphi_l\right)}, \tag{П.2}$$

и, так как в силу уравнения (3)

$$\left(c^{-2}\varphi_l, \varphi_l\right) = \frac{1}{\omega^2}\left(\kappa_l^2 - (\varphi_l'', \varphi_l)\right) =$$

$$= \frac{1}{\omega^2}\left(\kappa_l^2 + (\varphi_l', \varphi_l')\right) \geq \kappa_l^2 / \omega^2,$$

то $d\kappa_l / d\omega \geq \kappa_l / \omega$, т.е. $W_l(\omega) \leq v_l(\omega)$.

Из (П.2) следует, что

$$W_l(\omega) \geq \frac{1}{v_l(\omega)\dfrac{1}{C_{min}^2}} = \frac{C_{min}^2}{v_l(\omega)} .$$

2. Докажем теперь соотношения (6), (7). Пусть φ_l – собственная функция уравнения (3) такая, что $\tilde{\varphi}_l(\omega, H) = 1$. Тогда при $z \geq H$ $\tilde{\varphi}_l(\omega, z) = \exp\left[(H-z)\sqrt{K_l^2(\omega) - \omega^2/C_\infty^2}\right]$, и если обозначить $I_l = \int\limits_0^H \tilde{\varphi}_l^2(\omega, z)\, dz$, $J_l = \int\limits_0^H \tilde{\varphi}_l^2(\omega, z)\, C^{-2}(z)\, dz$,

то в силу соотношения (П.2)

$$W_l(\omega) = \frac{I_l + \dfrac{1}{\sqrt{K_l^2(\omega) - \omega^2/C_\infty^2}}}{v_l(\omega)\left[J_l + \dfrac{1}{C_\infty^2}\dfrac{1}{\sqrt{K_l^2(\omega) - \omega^2/C_\infty^2}}\right]} .$$

Интеграл J_l при $\omega \to \omega_l^{кр}$ остается равномерно ограниченным в силу непрерывной зависимости решения уравнения (3) на интервале $(0, H)$ от параметра ω . А так как $\lim\limits_{\omega \to \omega_l^{кр}} K_l(\omega) = (\omega_l^{кр}/C_\infty)$, то

$$\lim_{\omega \to \omega_l^{кр}} W_l(\omega)\, v_l(\omega) = C_\infty^2 .$$

Применяя теперь (4), (5), получим (6).

Докажем теперь, что

$$v_l(\infty) = C_{min} .$$

Так как K_l^2 – собственные числа, пронумерованные в порядке возрастания, то достаточно показать, что для любого $\varepsilon > 0$ найдутся $\psi_1, \dots, \psi_l$, $(\psi_k, \psi_j) = \delta_{kj}$, $j = 1, \dots, l$.

такие, что $\dfrac{(\psi_l'', \psi_l) + \omega^2\left(\frac{1}{c^2}\psi_l, \psi_l\right)}{\omega^2} \geq \dfrac{1}{C_{min}^2} - \varepsilon$

при достаточно больших ω [10]. Но из непрерывности $C(z)$ следует, что для любого l, найдутся l непересекающихся областей $D_1, \dots, D_l$, таких, что $C(z) - C_{min} < \varepsilon/2$ для z, принадлежащих этим областям. В качестве пробной функции ψ_k, $k = 1, \dots, l$, можно взять гладкую функцию, равную нулю, вне D_l и такую, что $(\psi_l, \psi_l) = 1$. Тогда при достаточно больших ω в силу теоремы о среднем

$$\frac{(\psi_l'', \psi_l) + \omega^2\left(\frac{1}{c^2}\psi_l, \psi_l\right)}{\omega^2} > \frac{1}{C_{min}^2} - \varepsilon .$$

Равенство $W_l(\infty) = C_{min}$ следует теперь из неравенства (5).

3. Из соотношений (6) и (7) вытекает, что неравенства (4) и правое из неравенств (5) нельзя улучшить, заменив C_{min}, C_∞ и $v_l(\omega)$ на какие-либо другие константы. Покажем теперь, что левое из неравенств (5) также неулучшаемо. Для этого рассмотрим модель Пекериса:

$$C(z) = \begin{cases} C_{min}, & 0 \leq z \leq H \\ C_\infty, & z > H \end{cases} .$$

Покажем, что для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ найдется l и ω такие, что

$$W_l(\omega) \leq \frac{C_{min}^2}{C_\infty}(1 + \varepsilon) .$$

Для этого воспользуемся тем, что в силу соотношения (6) найдется последовательность ω_l, такая, что $v_l(\omega_l) = C_\infty(1 - \varepsilon/2)$

и $\lim_{l \to \infty} \omega_l = \infty$. Собственные функции $\varphi_l(z)$ в данном случае имеют вид

$$\varphi_l(z) = \begin{cases} a_l \sin(\sqrt{v_l^{-2} - C_{min}^{-2}}\,\omega z), & 0 < z < H \\ a_l \sin(\sqrt{v_l^{-2} - C_{min}^{-2}}\,\omega H) \exp\left[-\sqrt{C_\infty^{-2} - v_l^{-2}}(z-H)\right], & z > H \end{cases} \tag{П.3}$$

и поэтому, в силу соотношения (П.2)

$$W_l = \frac{I_1^l + I_2^l}{v_l(\omega)\left(\frac{1}{C_{min}^2} I_1^l + \frac{1}{C_\infty^2} I_2^l\right)},$$

где $I_1^l = \int_0^H |\varphi_l(z)|^2 dz$, $\quad I_2^l = \int_H^\infty |\varphi_l(z)|^2 dz$.

Обозначим $\varkappa_l = I_2^l / I_1^l$. Тогда

$$W_l(\omega_l) = \frac{1 + \varkappa_l}{C_\infty\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)\left(\frac{1}{C_{min}^2} + \frac{\varkappa_l}{C_\infty^2}\right)}.$$

Из соотношений (П.3) следует, что

$$\varkappa_l = \frac{2\sin\sqrt{v_l^{-2} - C_{min}^{-2}}\,\omega_l H}{\omega_l\sqrt{C_\infty^{-2} - v_l^{-2}}\left(\frac{H}{2} - \frac{\sin^2\omega H\sqrt{v_l^{-2} - C_{min}^{-2}}}{4\omega_l\sqrt{v_l^{-2} - C_{min}^{-2}}}\right)}$$

и так как $v_l^2(\omega_l) = (1 - \varepsilon/2)\, C_\infty^2$, то $\varkappa_l \to 0$ при $l \to \infty$, следовательно, для любого $\varepsilon > 0$

$$W_l(\omega_l) < C_{min}^2 / C_\infty + \varepsilon,$$

если l достаточно велико.

4. Покажем, что для достаточно больших l величины ω_l^1, ω_l^2 можно выбрать так, чтобы для всех ω из интервала (ω_l^1, ω_l^2) выполнялись неравенства (II), (I2). Для этого воспользуемся вспомогательным дисперсионным уравнением

$$F^0(\theta, m) = Ai'(S_l(h)) \sin\theta_l^0 + \left(\frac{\mu}{m^2}\right)^{1/3} \theta_l^0 \cos\theta_l^0 \, Ai(S_l(h)) = 0,$$

которое совпадает с дисперсионным уравнением рассматриваемой задачи при $H = \infty$. В этом случае соотношение (8) принимает вид

$$\varphi_l(z) = \begin{cases} \sin\frac{\theta_l}{h} z, & 0 \le z \le h \\ B\, Ai(S_l(z)), & z > H \end{cases}.$$

Так как $n_1 \ge v_l(\omega) \ge n_\infty$ и $v_l(\omega)$ монотонна, то можно ω_l^2 выбрать так, что $v_l(\omega_l^2) = n_2^{-1}$. Тогда $\theta_l^0(\omega_l^2) = m(\omega_l^2)$ и, следовательно, $\theta_l^{0\,2}$ является решением уравнения $tg\, \theta_l^0 = \mu^{1/3} \frac{Ai(0)}{Ai'(0)} \theta_l^0$, которое имеет в точности одно решение в каждом интервале $(k\pi, (k+1)\pi)$, $k = 1, 2, \ldots$ В силу осцилляционной теоремы [II] $\varphi_l(\omega_l^2, z)$ имеет в точности l нулей, не считая $z = 0$, и, поскольку $n(z) \le n_2$ при $z > h$, эти нули содержатся внутри интервала $(0, h)$. Учитывая (4), заключаем, что $[\theta_l(\omega_l^2)/\pi] = l$. В качестве ω_l^1 возьмем решение уравнения

$$(\omega h q \mu)^{2/3}\left(1 - \frac{\pi^2 (l - N)^2}{(\omega h q)^2}\right) = \zeta_{N+1}, \qquad (\text{П}.4)$$

где $\{\zeta_k\}$ последовательность отрицательных корней функции $Ai(z)$ пронумерованных в порядке убывания. При выполнении последнего соотношения дисперсионное уравнение (8) сводится к уравнению

$\sin\theta_l^0 = 0$. Из этого же соотношения следует, что $\theta_l^0 = \pi(l - N)$ удовлетворяет вспомогательному дисперсионному уравнению при $\omega = \omega_l^1$, а соответствующая собственная функция имеет при $z > h$ в точности N_0 нулей. Следовательно, $\theta_l^0 = \theta_l^0(\omega_l^1)$. Покажем теперь, что

$$\left|\theta_l(\omega_l^1) - \theta_l^0(\omega_l^1)\right| < Me^{-\gamma\omega_l^1}, \tag{П.5}$$

$$\left|\theta_l(\omega_l^2) - \theta_l^0(\omega_l^2)\right| < Me^{-\gamma\omega_l^2},$$

где $M, \gamma > 0$, $\omega_l^1 < \omega < \omega_l^2$.

Для этого воспользуемся неравенствами для функций Эйри, вытекающими из известных асимптотических разложений (см. [5])

$$|Ai(z)| \le g, \quad -\infty < z < \infty,$$

$$|Ai'(z)| \le g|z|^{1/4}, \quad -\infty < z < \infty,$$

$$g/2(1+z)^{-1/4}e^z \le Bi(z) \le gz^{-1/4}e^z, \quad z > 0,$$

$$|Bi(z)| \le gz^{1/4}, \quad z < 0,$$

$$\frac{g}{2}z^{1/4}e^z \le Bi'(z) \le g(1+z)^{1/4}e^z, \ z > 0, \quad Bi(z) \le g|z|^{-1/4}, \quad z < 0$$

где $g > 0$.

Функция $\theta_l^2(\omega)/m^2 - 1 = \dfrac{n_2^2 - v_l^{-2}}{q^2}$ монотонно убывает, равна нулю при $S_l^1(\omega) = 0$, поэтому $S_l^1(\omega) < 0$ при $\omega < \omega_l^2$.

С другой стороны, в силу (П.4) при $\omega_l^1 < \omega < \omega_l^2$,

$$\left|\frac{n_2^2 - v_l^{-2}(\omega)}{q^2}\right| \le \zeta_{N_0+1}\varepsilon_{l-N}, \quad \varepsilon_l = (\pi l)^{-1/3} \tag{П.6}$$

и поэтому $(v_l^{-2} - n^2(H-0))/p\hbar > \gamma > 0$

при $\omega_l^1 < \omega < \omega_l^2$. Следовательно,

$$S_l(H) = \left(\frac{m^2}{\mu}\right)^{1/3} \frac{(v_l^{-2}(\omega) - n_2^2 + p(H-\hbar))}{p\hbar} =$$

$$= \left(\frac{m^2}{\mu}\right)^{1/3} \frac{(v_l^{-2}(\omega) - n^2(H-0))}{p\hbar} > \gamma \left(\frac{m^2}{\mu}\right)^{1/3}$$

при $\omega_l^1 \leq \omega \leq \omega_l^2$. Отсюда следует, что при некотором b_1

$$|F(\theta,m) - F^0(\theta,m)| \leq b_1 e^{-\gamma\omega}, \quad \omega_l^1 \leq \omega \leq \omega_l^2 . \qquad (\text{П.7})$$

Покажем теперь, что дисперсионное уравнение (8) при $\omega_1 = \omega_l^1$ и $\omega = \omega_l^2$ имеет корни θ^1 и θ^2 соответственно, такие, что

$$\begin{aligned} |\theta_l^0(\omega_l^1) - \theta^1| &< C_1 e^{-\gamma\omega_l^1}, \\ |\theta_l^0(\omega_l^2) - \theta^2| &< C_1 e^{-\gamma\omega_l^2}, \end{aligned} \qquad (\text{П.8})$$

для этого заметим, что при больших m

$$\left| \frac{\partial F^0}{\partial \theta} \right|_{\substack{\theta=\theta_l(\omega_l^1) \\ m=m(\omega_l^1)}} = |Ai'(\zeta_{N+1}) + O(m^{-2/3})| > b_2 > 0 .$$

При $\omega = \omega_l^2$ из (П.8) следует, что

$$\cos^2 m = 1/(1+\beta^2 m^2), \quad \beta = \mu^{1/3} Ai(0)/Ai'(0)$$

и, следовательно,

$$\left|\frac{\partial F^0}{\partial\theta}\right|_{\substack{\theta=\theta_l(\omega_l^2)\\ m=m(\omega_l^2)}} = \left|Ai'(0)+O(m^{-2/3})\right| > b_2 > 0 .$$

Поэтому из неравенства (П.7) следует, что существуют корни θ^1, θ^2 дисперсионного уравнения $F(\theta,m)=0$, удовлетворяющие неравенствам (П.8).

Покажем теперь, что $\theta^1=\theta_l(\omega_l^1)$, $\theta^2=\theta_l(\omega_l^2)$.

Для этого рассмотрим собственные функции $\varphi^1(z)$, $\varphi^2(z)$, отвечающие собственным значениям $K(\theta^1)$, $K(\theta^2)$. Так как

$$B_l^2=\pi\left(Ai'(S_l(H))+\left(\frac{\mu}{m^2}\right)^{1/3}Ai(S_l(H))\,\psi_l\right)\times$$
$$\times\frac{Bi'(S_l(h))\sin\theta_l-Bi(S_l(h))\left(\frac{\mu}{m^2}\right)^{1/3}\theta_l\cos\theta_l}{Bi'(S_l(H))+Bi(S_l(H))\left(\frac{\mu}{m^2}\right)^{1/3}\psi_l},$$

то из неравенств (П.8) следует, что

$$|B_l^2|<e^{-\gamma\omega}, \qquad \omega_l^1\le\omega\le\omega_l^2$$

и поэтому

$$|\varphi^j(z)-\varphi_l^0(z,\omega_l^j)|<b\,e^{-\gamma\omega_l^j}, \qquad j=1,2, \qquad 0\le z\le H .$$

Все нули функций $\varphi^1, \varphi^2, \varphi_l^0$ содержатся внутри интервала $(0,H)$ и максимальное значение модуля функции φ_l^0 на интервале между двумя любыми нулями не меньше, чем $1+O(\omega^{-1})$ на интервале $(0,h)$ и не меньше чем $C_1\omega^{-2/3}$ на интервале (h,H). Поэтому, учитывая неравенства (П.7), мы можем заключить, что функции $\varphi^1, \varphi^2, \varphi_l^0$

имеют одинаковое число нулей, и, следовательно, $\theta^1 = \theta_l(\omega_l^1)$, $\theta^2 = \theta_l(\omega_l^2)$.

Заметим, что $\omega_l^2 > \omega_l^1$ поскольку

$$\frac{d\theta_l}{d\omega} = h \frac{n_1^2 - (v_l W_l)^{-1}}{\sqrt{n_1^2 - v_l^{-2}}} \geq 0$$

в силу неравенства (5) и

$$\theta_l(\omega_l^2) \geq l\pi \geq (l - N_0^0)\pi = \theta_l(\omega_l^1).$$

Докажем теперь неравенство (I2). Для этого обозначим

$$A_l^0 = q^2, \; B_l^0 = n_2, \; E_l^0 = 1 + \mu(1 + \cos 2\theta_l), \; D_l^0 = n_2,$$

$$A_l = q^2\left(2\frac{\theta_l^2}{m^2} - \frac{1}{3}\left(4\frac{\theta_l^2}{m^2} - 1\right)\left(1 - \frac{\sin 2\theta_l}{2\theta_l}\right) - c_l^2\frac{\psi_l^2}{m^2}\left(1 + \frac{\theta_l^2 - m^2}{3\psi_l^2}\right)\right).$$

$$B_l = v_l^{-1}, \quad E_l = 1 - \frac{\sin 2\theta_l}{2\theta_l} + \frac{c_l^2}{\psi_l} + 2\mu\left(\frac{\theta_l^2}{m^2} - \sin^2\theta_l\right),$$

$$D_l = v_l^{-1} + v_l \frac{n_2^2 - v_l^{-2}}{3}.$$

Тогда

$$f_l^0(\omega) = \frac{A_l^0}{B_l^0 E_l^0} + D_l^0, \quad W_l^{-1}(\omega) = \frac{A_l}{B_l E_l} + D_l$$

и поэтому

$$|W_l^{-1} - f_l^0| \leq |D_l - D_l^0| + \left|\frac{A_l}{B_l}\right| \frac{|E_l - E_l^0|}{|E_l E_l^0|} +$$

$$+\left|\frac{A_l}{E_l^0}\right|\frac{|B_l-B_l^0|}{|B_lB_l^0|}+\frac{|A_l-A_l^0|}{|E_l^0B_l^0|}.$$

Оценим теперь величины

$$|D_l-D_l^0|,\quad |E_l-E_l^0|,\quad |B_l-B_l^0|,\quad |A_l-A_l^0|.$$

Так как $\theta_l/m=\sqrt{n_1^2-v_l^{-2}}$ - монотонно убывающая функция и $\theta_l(\omega_l^2)/m(\omega_l^2)=1$, то

$$\left|\frac{\theta_l(\omega)}{m(\omega)}-1\right|\leq\left|\frac{\theta_l(\omega_l^1)}{m(\omega_l^1)}-1\right| \qquad \text{при } \omega_l^1\leq\omega\leq\omega_l^2$$

и в силу неравенства (П.6)

$$\frac{\theta_l(\omega)}{m(\omega)}-1\leq|\varsigma_{N+1}|\varepsilon_{l-N}.$$

Отсюда следует, что

$$|v_l^{-1}-n_2|\leq\frac{1}{v_l^{-1}+n_2}|v_l^{-2}-n_2^2|=\frac{q_l^2}{v_l^{-1}+n_2}\left|1-\frac{\theta_l^2}{m^2}\right|\leq\frac{q_l^2}{n_2}|\varsigma_N|\varepsilon_{l-N} \qquad (\text{П}.9)$$

и поэтому

$$|D_l-D_l^0|=\left|n_2-v_l^{-1}+v_l\frac{n_2^2-v_l^{-2}}{3}\right|\leq C_3\,\varepsilon_{l-N}.$$

Далее, учитывая, что

$$|c_l|\leq C_3\,e^{-\gamma\omega},$$

получим, что

$$\left|E_l - E_l^0\right| \le \left|\frac{\sin 2\theta_l}{2\theta_l}\right| + 2\mu\left|\frac{\theta_l^2}{m^2} - 1\right| + \frac{C_l^2}{\psi_l} \le C_4 \varepsilon_{l-N}.$$

Из (П.9) следует, что

$$\left|B_l - B_l^0\right| = \left|v_l^{-1} - n_2\right| < \frac{q^2}{n_2}\left|\zeta_{N+1}\right|\varepsilon_{l-N}$$

и, наконец,

$$\left|A_l - A_l^0\right| \le q^2\left|1 - 2\frac{\theta_l^2}{m^2} + \frac{1}{3}\left(4\frac{\theta_l^2}{m^2} - 1\right)\left(1 - \frac{\sin 2\theta_l}{2\theta_l}\right)\right| +$$

$$+ q^2 C_l^2 \frac{\psi_l^2}{m^2}\left(1 + \frac{\theta_l^2 - m^2}{3\psi_l^2}\right) \le q^2\left|1 - \frac{\theta_l^2}{m^2}\right| +$$

$$+ O(\theta_l^{-1}) + O(C_l^2) \le C_5 \varepsilon_{l-N}.$$

Литература

1. Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах. - М.: АН СССР, 1957.
2. Толстой И., Клей К. Акустика океана. - М.: Мир, 1969.
3. Вагин А.В., Мальцев Н.Е. Расчеты низкочастотных звуковых полей в слоистом океане. Вопр.Судостр.,сер. Акустика, 1977, в.9,с.61-80.
4. Антонец М.А., Жислин Г.М., Шерешевский И.А. О дискретном спектре гамильтониана квантовой системы N частиц. - Теор. и мат. физика, 1973, т. 16, № 2, с. 235-246.
5. Абрамовиц, Стиган Специальные функции. - М.: Мир, 1978.
6. Simon B. Semiclassical analysis of low lying eigenvalues, II. Ann.of Phys., 1984, v.158, N 3, 415-420.
7. Люк Ю. Специальные математические функции и их применения. - М. : Мир, 1980.
8. Де Санто. Акустика океана. - М.: Мир, 1982.
9. Като Т. Теория возмущений линейных операторов.-М.:Мир, 1972.
10. Kato T. On the existence of solution of the helium wave equation. Trans.Amer.Math.Soc., 1951, v.70, 212-219.
11. Аткинсон Ф. Дискретные и непрерывные граничные задачи.-М.:Мир, 1968.

Дата поступления статьи
18 июля 1986 года

Михаил Александрович Антонец
Илья Аронович Шерешевский
Людмила Владимировна Шерстнева

ТОНКАЯ СТРУКТУРА ДИСПЕРСИОННЫХ КРИВЫХ
ДЛЯ ВОЛН В СЛОИСТОЙ СРЕДЕ

Подписано в печать 5.08.86 г. МЦ 00576 . Формат 60x84/16
Бумага множительная. Печать офсетная. Объем 2 усл. печ. л.
Тираж 120. Заказ 4462. Бесплатно.

Отпечатано на ротапринте НИРФИ