Министерство высшего и среднего специального образования РСФСР

Горьковский ордена Трудового Красного Знамени
научно-исследовательский радиофизический институт (НИРФИ)

Препринт № 220

УСТОЙЧИВОСТЬ СТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКИ ВОЗМУЩЕННЫХ СИСТЕМ

В.А.Брусин

В.А.Угриновский

Горький 1986

Б р у с и н В.А., У г р и н о в с к и й В.А.

УСТОЙЧИВОСТЬ СТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКИ ВОЗМУЩЕННЫХ СИСТЕМ. Горький, Препринт № 220/НИРФИ, 1986.

УДК 519.919

В работе рассматриваются вопросы теории абсолютной стохастической устойчивости дифференциальных уравнений Ито. Получены результаты об экспоненциальной устойчивости стационарных движений, включая вынужденные стохастические колебания, порождаемые внешней периодической силой. Обсуждается вопрос о представлении результатов в частотной форме. Приводится пример.

ВВЕДЕНИЕ

При исследовании динамики систем, описываемых нелинейными стохастическими дифференциальными уравнениями, широко применяется метод стохастических функций Ляпунова. Для дифференциальных уравнений Ито этот метод достаточно полно изложен в монографиях /I, 2/. Тем не менее, в нелинейном случае часто бывает весьма нелегко отыскать нужную стохастическую функцию Ляпунова или хотя бы доказать ее существование. Преодолеть подобные трудности позволяет аппарат теории абсолютной устойчивости. Хорошо известно, что в детерминистской теории содержательные результаты об асимптотическом поведении в целом траекторий нелинейных динамических систем получены именно с помощью "погружения" системы в класс нелинейных систем, определяемый квадратичным описанием нелинейности /3/. Функция Ляпунова при этом ищется среди квадратичных форм переменных фазового пространства"плюс интегралы от нелинейностей. Она существует в этом классе, если разрешимы так называемые матричные уравнения Лурье. Разрешимость же этих уравнений и, следовательно, наличие определенных асимптотических свойств траекторий обеспечивается при естественных предположениях стабилизируемости или управляемости выполнением частотного неравенства, определяемого через коэффициенты уравнения и поэтому легко проверяемого.

Используются частотные методы и для качественного исследования дифференциальных уравнений, параметры которых возмущены белым шумом. Однако имеющиеся в этой области результаты, как правило, относятся к отдельным частным случаям, изучение которых проводится на основе детерминистской частотной теории с привлечением некоторых дополнительных построений. Такой подход, с одной стороны, сужает класс уравнений, которые могут быть рассмотрены, с другой стороны, приводит к неоправданным и часто излишним ограничениям. Например, в /6/ к частотному неравенству добавляется условие на расположение корней некоторого полинома, к тому же неоднозначное.

Снять подобные ограничения и распространить частотный метод на существенно более широкий класс нелинейных стохастических дифференциальных уравнений позволяет подход, предложенный в /4, 5/. Основу его составляют вспомогательная вариационная теорема, принципы динамического программирования и эргодические свойства винеровского случайного процесса. Методом /5/ в данной работе получены результаты об экспоненциальной устойчивости стационарных движений (включая вынужденные стохастические колебания, возбуждаемые внешней периодической силой).

I. ОСНОВНЫЕ ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ

Над вероятностным пространством (Ω , Σ , $\mathcal{P}$) задан скалярный винеровский случайный процесс $w(t, \omega)$ и порожденный им поток полных σ-алгебр $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$. Не уменьшая общности будем считать, что Ω - пространство непрерывных на (0, ∞) функций, выходящих из нуля ($w(0) = 0$), $\mathcal{P}$ - винеровская мера, Σ - наименьшая σ - алгебра, содержащая все события вида $\{\omega : a \leq w(t,\omega) < b\}$ $(a<b, t \geq 0)$. $\mathcal{F}_t$ является наименьшим подполем универсального поля Σ , содержащим все события вида $\{\omega : a \leq w(s,\omega) < b\} (a<b, t \geq s)$/8/. Рассматривается нелинейное дифференциальное уравнение Ито

$$dx = (Ax + b\varphi)dt + (Cx + D\varphi)dw(t) + f(t)dt, \qquad (I.1)$$

$$\sigma = \gamma^* x, \qquad \varphi = \varphi(\sigma, t). \qquad (I.2)$$

Предполагается, что x - n-мерный неупреждающий случайный процесс, φ - вектор нелинейностей, вообще говоря нестационарных, размерности m. Матрицы A, b, C, D, γ имеют размеры $n \times n$, $n \times m$, $m \times n$, $n \times m$, $n \times m_1$; "выход" динамической системы, описываемой уравнением (I.1), (I.2), σ -имеет размерность m_1. Вектор-функция f размерности n описывает действие "внешней силы".

Сформулируем предположения о характере нелинейностей. Прежде всего отметим, что рассматриваются лишь такие нелинейности φ и внешние воздейст-ия f, при которых решение (I.I), (I.2) с любым начальным условием существует и единственно. Достаточными для этого являются, например, следующие условия /2/:

I. $\varphi(\sigma, t)$, $f(t)$ непрерывны по совокупности переменных во всех точках расширенного фазового пространства.

2. Для некоторой постоянной B в рассматриваемой области выполнены условия:

$$|\varphi(\sigma_1,t) - \varphi(\sigma_2,t)| \le B|\sigma_1-\sigma_2|, \quad t \ge 0,$$

$$|\varphi(\sigma,t)| \le B(1+|\sigma|), \quad |f(t)| \le B.$$

Символ $|\cdot|$ означает евклидову норму в соответствующем пространстве R^K. Допустимы также любые другие условия регулярности решения уравнения (I.I), (I.2).

Перейдем к описанию класса нелинейностей. Введем выражение

$$F_1(\eta, x, \varphi, \bar{\varphi}) = \langle \eta, r\eta \rangle + 2\langle \eta, q, \varphi \rangle + \langle \varphi, g\varphi \rangle - \\ - \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{m_1} \vartheta_{ki} \left[\nu^*(Cx + D\varphi)\right]_k^2 \bar{\varphi}_i, \quad \varphi, \bar{\varphi} \in R^m, \quad \eta \in R^{m_1}. \tag{I.3}$$

В этом выражении $r = r^*$, q, $g = g^*$ матрицы размеров $m_1 \times m_1$, $m_1 \times m$, $m \times m$; ϑ_{ki}, $k = \overline{1,m_1}$, $i = \overline{1,m}$ – произвольные вещественные числа, причем $\vartheta_{ki} = 0$, если имеет место один из следующих фактов: а) $\varphi_i(\cdot)$ – не дифференцируема; б) φ_i не зависит от σ_k; в) φ_i, помимо σ_k, зависит от σ_j, $j \ne k$ или от t. Будем говорить, что нелинейность φ принадлежит классу $K_1(\delta)$, $\delta \ge 0$, если $F_1(\sigma, x, \varphi, \varphi') \le -\delta|\varphi|^2$ при $\varphi = \varphi(\sigma, t)$, $\sigma = \nu^* x$. Определим также класс $K_2(\delta)$ нелинейностей. Для этого введем обозначения: $x_{1,2}(t)$ – произвольные решения (I.I), (I.2), $\sigma_{1,2}(t)$ – соответствующие им выходы, положим также $\vartheta_{ki} = 0$, $i = \overline{1,m}$; $k = \overline{1,m_1}$. Нелинейность φ принадлежит классу $K_2(\delta)$, $\delta \ge 0$, если $E F_1(\sigma_1(t) - \sigma_2(t), 0, \varphi(\sigma_1(t), t) - \varphi(\sigma_2(t), t, 0) \le -\delta E|\varphi(\sigma_1(t), t) - \varphi(\sigma_2(t), t)|^2$.[I)]

[I)] Это неравенство выполнено, очевидно, если при любых $\sigma_1, \sigma_2 \in R^{m_1}$ и любом $t \ge 0$ $F_1(\sigma_1 - \sigma_2, 0, \varphi(\sigma_1, t) - \varphi(\sigma_2, t), 0) \le -\delta|\varphi(\sigma_1, t) - \varphi(\sigma_2, t)|^2$. Поэтому класс $K_2(\delta)$ может быть определен и этим неравенством.

E – оператор математического ожидания. Выражение (I.3) определяет квадратичное описание класса нелинейностей, в котором требуется установить абсолютную устойчивость. От всего детерминистского аналога F_1 отличается лишь членом $-\sum_{i=1}^{m_1}\sum_{k=1}^{m}\vartheta_{ki}\left[\vartheta^*(Cx+D\varphi)\right]_k^2\bar{\psi}_i$, поэтому выписать F_1 в каждом конкретном случае можно, руководствуясь соображениями, изложенными в /9/.

Предполагается также, что линейная часть невозмущенного ($f\equiv 0$) управления (I.I) экспоненциально стабилизируема в среднем квадратическом в рассматриваемом классе нелинейностей: существует такая матрица μ порядка $m\times m_1$, что "нелинейность" $\varphi=\mu^*\sigma$ принадлежит рассматриваемому классу (т.е. либо принадлежит $K_1(\delta)$ – в задаче об устойчивости положения равновесия, либо принадлежит $K_2(\delta)$ – в задаче об устойчивости вынужденного движения) и для решения (I.I) с этой "нелинейностью" и произвольным начальным условием $x(t_0)=x_0$ справедливо неравенство

$$E|x(t)|^2\le\gamma^2e^{-2\alpha(t-t_0)}E|x_0|^2,\quad t\ge t_0,\quad \alpha>0. \qquad (I.4)$$

Критерии среднеквадратической экспоненциальной устойчивости, с помощью которых можно проверить это предположение, хорошо известны /2, 10, 11/.

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ И СТОХАСТИЧЕСКИЙ ВАРИАНТ ЛЕММЫ КАЛМАНА-ЯКУБОВИЧА

Как отмечалось во введении, основой излагаемого подхода является задача оптимального управления линейной системой, представляющей разомкнутую динамическую систему (I.I)

$$dx=(Ax+bu)dt+(Cx+Du)dw(t) \qquad (2.I)$$

с квадратичным критерием качества $J_{t,h}(u)=\int_t^\infty EF(x(\tau),u(\tau))\,d\tau$, где $x(\tau)$, $\tau\ge t\ge 0$ – решение (2.I) с начальным условием $x(t)=h$, отвечающим управлению $u(\tau)$, $\tau\ge t$. В корректной постановке задачи предполагается, что h имеет конечный второй момент $E|h|^2$ и является $\mathcal{F}_t$ – измеримым случайным вектором. При каждом t множество таких h образует гильбертово пространство H_t со скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle_H=E\langle\cdot,\cdot\rangle_{R^n}$ и нормой $|\cdot|_H=(E|\cdot|^2)^{1/2}$.

Кроме того, пр дполагается, что и управление $u(t)$, и траектория системы $x(t)$ являются вещественными случайными векторами соответствующей размерности, неупреждающими относительно потока σ -алгебр $\{\mathcal{F}_\tau, \tau \geq t\}$, $t \geq 0$; вторые моменты этих случайных процессов интегрируемы по Лебегу на $[t, +\infty)$. Множества таких процессов также являются гильбертовыми пространствами, которые в дальнейшем обозначаются U_t, X_t. F есть квадратичная форма $R^n \times R^m \to R^1$ вида $F(x,u) = x^* Rx + 2x^* Qu + u^* Gu$, где

$$R = \vartheta r \vartheta^*, \quad Q = \vartheta q + A^* \vartheta \mathcal{V}, \quad G = g + \mathcal{V}^* \vartheta^* b + b^* \vartheta \mathcal{V} \qquad (2.2)$$

$$\left(\mathcal{V} = (\mathcal{V}_{ki})_{k=1,m_1}^{i=1,m} \right).$$

Очевидно, не всякому управлению, обладающему описанными свойствами, отвечает траектория, удовлетворяющая всем перечисленным требованиям. Допустимыми будем считать лишь те управления $u(\tau) \in U_t$, которым отвечает принадлежащая X_t траектория. Отметим, что множество допустимых управлений экспоненциально стабилизируемой системы заведомо не пусто: все управления "обратной связи" $u(t) = \mu^* x(t)$ допустимы. Как показано в /5/, при любом $t \geq 0$ и $h \in H_t$ допустимые управления образуют линейное многообразие в U_t . На этом многообразии поставим задачу минимизации $J_{t,h}$ при фиксированных $t \geq 0$, $h \in H_t$. Справедливо следующее утверждение.

Теорема I /5/. Пусть при некотором $\varepsilon > 0$ и произвольном допустимом управлении , отвечающем начальному состоянию $t = 0$, $h = 0$, верно неравенство

$$J_{0,0}(u) \geq \varepsilon \int_0^\infty E|u|^2 d\tau . \qquad (2.3)$$

Тогда а) функционал $J_{t,h}$ достигает минимума в единственной точке множества допустимых управлений; б) значение минимума равно $\langle h, Mh \rangle_H$, M – вещественная симметричная матрица порядка n [I)].

Приведенная теорема распространяет аналогичное утверждение /4/ на более широкий класс уравнений (2.I). Она представляет самостоятельный интерес и, в то же время, позволяет доказать утверждение, аналогичное детерминистской частотной лемме Калмана-Якубовича /I2/.

Прежде чем сформулировать это утверждение, введем инфинитезимальный производящий оператор марковского процесса, порождаемого уравне-

---

[I)] Утверждение части б) несколько сильнее, чем в /5/.

нием (2.1): $L_u = \frac{\partial}{\partial t} + \langle Ax+bu, \frac{\partial}{\partial x}\rangle + \frac{1}{2}\langle Cx+Du, \frac{\partial}{\partial x}\rangle^2$.

Выпишем также стохастические матричные уравнения Лурье:

$$\begin{aligned} &A^*M + MA + C^*MC + R = LL^*, \\ &Mb + Q + C^*MD = LK, \\ &G + D^*MD = K^*K. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Теорема 2. Матрица $M = M^*$ порядка n, при которой для всех $x \in R^n$, $u \in R^m$ выполняется неравенство

$$L_u\langle x, Mx\rangle + F(x,u) \geq 0 \tag{2.5}$$

и тройка матриц (M, L, K) размеров $n\times n$, $m\times(n+m)$, $(n+m)\times n$ – решение стохастических уравнений Лурье – существуют, если при $\varepsilon \geq 0$ выполняется условие (2.3). Обратно, если существует M, обеспечивающая выполнение (2.5) и стохастические уравнения Лурье разрешимы, то при любом $\mathfrak{F}_0$ – измеримом управлении $u(\tau)$ выполняется неравенство (2.3), в котором $\varepsilon = 0$.

Следствием этой теоремы является тот факт, что функцию

$$V(x) = \langle x, Mx\rangle + 2\sum_{i,k} \vartheta_{ki}\int_0^{\sigma_k}\varphi_i(\xi)\,d\xi \tag{2,6}$$

можно использовать в качестве стохастической функции Ляпунова при исследовании устойчивости стационарных движений уравнения (I.I), (I.2).

Утверждения типа теоремы 2, относящиеся к частным случаям уравнения (2.I), встречаются в ряде работ /7, I3/. Достаточная часть утверждения в случае $\varepsilon > 0$ приведена в /5/.

Условие (2.3), играющее основную роль в теоремах I, 2, в общем случае не имеет частотной формы, но, как будет показано ниже, в ряде случаев удается получить частотный критерий его выполнения.

3. ТЕОРЕМЫ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ.

В этом пункте формулируются теоремы о свойствах экспоненциальной устойчивости, экспоненциальной конвергенции, предельной ограниченности и устойчивости периодических движений уравнения (I.I), (I.2). Все типы устойчивости трактуются как устойчивость в среднем квадратическом. Все результаты получены с помощью функции Ляпунова (2.6).

Рассмотрим сначала случай $f \equiv 0$.

<u>Теорема 3.</u> Пусть $\varphi \in K_1(\delta)$, $\exists \delta \geq 0$, линейная часть уравнения (I.I) экспоненциально стабилизируема в классе $K_1(\delta)$, причем

$$\vartheta_{ki}\int_0^{\sigma}\varphi_i(\xi)d\xi \leq \frac{1}{2}\vartheta_{ki}\mu_{ki}\sigma^2, \forall\sigma\in R^1, \quad \begin{matrix} k=1,\dots,m_1 \\ i=1,\dots,m \end{matrix}, \mu_{ji}=0 \text{ при } j\neq k, \ \vartheta_{ki}\neq 0;$$

пусть также при некотором $\varepsilon > 0$ выполняется (2.3). Тогда положение равновесия уравнений (I.I), (I.2) экспоненциально устойчиво в рассматриваемом классе нелинейностей - для любой траектории (I.I),(I.2) справедлива оценка (I.4).

Пусть теперь $f(t)$ - произвольная функция, при которой решение нелинейного уравнения Ито существует и единственно. Следующая теорема содержит достаточное условие экспоненциальной конвергенции траекторий системы.

<u>Теорема 4.</u> Пусть $\varphi \in K_2(\delta)$, $\delta \geq 0$, линейная часть уравнения (I.I) экспоненциально стабилизируема в этом классе нелинейностей[I)] и при некотором $\varepsilon > 0$ выполняется (2.3). При этих условиях любые две траектории $x_1(t), x_2(t)$ удовлетворяют неравенству

$$E|x_1(t)-x_2(t)|^2 \leq \gamma^2 e^{-2\alpha(t-t_0)} E|x_1(t_0)-x_2(t_0)|^2, \ t_0 \geq 0, \ \alpha > 0 .$$

Это утверждение используется при доказательстве теорем о предельной ограниченности и существовании устойчивого периодического движения, продолжимого на всю числовую ось.

<u>Теорема 5.</u> Пусть выполняются все условия теоремы 4 и, кроме того, $|f| < C_0$. Тогда $\overline{\lim_{t\to+\infty}} E|x(t)|^2 < C_1^2$, причем $C_1 \to 0$ если $C_0 \to 0$.

Будем теперь считать, что винеровский процесс $w(t)$ задан на $(-\infty, +\infty)$. Он порождает "более широкое" пространство Ω и основное вероятностное пространство (Ω', Σ', P') с потоком σ-алгебр $\{\mathcal{F}_t', t\in R^1\}$. Все рассматриваемые случайные процессы и случайные величины считаем согласованными с потоком $\{\mathcal{F}_t', t\in R^1\}$. В такой постановке утверждение пункта б) теоремы I обеспечивает лишь существование метрически транзитивного /I4/ матричнозначного процесса $\{M_t, t\in R^1\}$, неупреждающего относительно $\{\mathcal{F}_t', t\in R^1\}$, причем столбцы матрицы M_t принадлежат H_t при каждом $t\in R^1$. Теперь мы имеем возможность ставить задачу Коши для уравнения (I.I), (I.2)

I) См. сноску на стр. 5.

в любой начальный момент времени из интервала $(-\infty, +\infty)$ и, используя функцию Ляпунова (2.6), доказать экспоненциальную конвергенцию траекторий, стартующих в произвольный момент времени $t_0 \in (-\infty, +\infty)$ Этот факт лежит в основе следующего утверждения.

Теорема 6. Пусть выполняются все условия теоремы 5. Тогда существует единственная ограниченная продолжимая на весь интервал $(-\infty, +\infty)$ траектория уравнения (I.I), (I.2). Если f - периодическая функция, то и эта траектория периодична с тем же периодом.[I)]

В доказательстве теоремы 6 существенную роль играет теорема об инвариантной последовательности семейства сжимающих отображений /I5/.

4. О ПРИВЕДЕНИИ ОСНОВНОГО НЕРАВЕНСТВА К ЧАСТОТНОМУ ВИДУ

Центральную роль в формулировках приведенных выше теорем играет неравенство (2.3). Проверка этого условия - наиболее трудоемкий элемент в применении теорем 3-6. Поэтому естественно, так же как и в детерминистской теории, заменить его проверкой частотного условия, выраженного через частотные характеристики линейной части уравнения. Хотя дать общий рецепт такой замены, в отличие от детерминистского случая, затруднительно, в ряде важных и довольно общих случаев можно привести достаточные условия выполнения (2.3), имеющие частотную форму.

Наш метод получения таких условий состоит в построении квадратичной формы $F_2(x,u) = x^* R_0 x + 2x^* Q_0 u + u^* G_0 u$, $x \in R^n$, $u \in R^m$, обладающей свойством: для любого допустимого $u(t) \in U_0$

$$\int_0^\infty E F(x(t), u(t))\, dt \geq E \int_0^\infty F_2(x_1(t), u(t))\, dt. \qquad (4.I)$$

Здесь $x(t)$ - решение (2.I) с нулевым начальным условием, $x_1(t) = \int_0^t g(t-\tau)\, b u(\tau)\, d\tau$, $g(t)$ - импульсная переходная функция динамической системы $\dot{x}_1 = Ax_1 + bu$. В правой части (4.I) можно воспользоваться равенством Парсеваля (соответствующие интегралы в теореме Планшереля существуют почти наверное /I4/). Получаем в ре-

---

[I)] То есть периодичен соответствующий марковский случайный процесс /2/.

зультате, что достаточным для выполнения (2,3) является условие

$$\exists\, \varepsilon > 0 : F_2\left(\left(i\lambda I - A\right)^{-1} b v, v\right) \geqslant 2\pi\varepsilon |v|^2, \quad \forall v \in \mathbb{C}^m, \qquad (4.2)$$

$\mathbb{C}^m$ - комплексное расширение пространства R^m .

Первый случай, который может быть рассмотрен таким способом - когда матрица $C = 0$ и матрица A -гурвицева. Решением задачи Коши с нулевым начальным условием, отвечающим допустимому управлению $u(t)$, является функция $x(t) = x_1(t) + \int_0^t g(t-\tau) D u(\tau) dw(\tau)$ Пусть имеет место разложение $R = R_1^* R_2$, $Q = Q_1^* Q_2$; матрицы R_1, R_2, Q_1, Q_2 имеют размеры $n \times n$, $n \times n$, $m \times n$, $m \times m$ соответственно. Используя структуру $x(t)$, матриц R и Q , а также свойства стохастического интеграла и неравенство Коши-Буняковского можно показать, что имеет место (4.I), где $R_0 = R - R_1^* R_1$, $Q_0 = Q$, $G_0 = G - Q_2^* Q_2 + D^* \int_0^\infty g^*(t)(R - R_2^* R_2 - Q_1^* Q_1) g(t) dt\, D$. Поэтому, вводя в формулировки теорем (4.2)° вместо (2.3) мы получим для рассматриваемого класса уравнений частотные условия соответствующего асимптотического поведения траекторий.

Интерес представляет также случай, когда $C = C_1 \mu^* \nu^*$, A -гурвицева матрица. К нему, например, сводится после очевидной замены нелинейности предыдущий случай с негурвицевой матрицей линейной части. Построить квадратичную форму F_2 можно двумя способами.

Первый способ состоит во введении новой нелинейности $\bar{\varphi} = C_1 \mu^* \sigma + D\varphi$ и изучении асимптотических свойств нового уравнения типа (I.I), (I.2) с расширенным набором нелинейностей (φ , $\bar{\varphi}$). При этом можно воспользоваться дополнительной квадратичной связью $|\bar{\varphi} - C_1 \mu^* \sigma - D\varphi|^2 = 0$ при составлении квадратичных форм F_1 , F .

Другой способ - использование методики работы /I6/ в случае, когда R знакоопределена, а $Q = Q_1^* Q_2$ - пригоден при любом C . Форма F_2 строится следующим образом: пусть $\gamma \neq 0$, матрицы $H = H^*$ и $H_1 = H_1^*$ удовлетворяют уравнениям

$$A^* H + HA + \left(1 - \frac{2}{\gamma^2}\right) C^* H C + R = -\frac{1}{\gamma^2} C^* H_1 C, \qquad (4.3)$$

$$A^* H_1 + H_1 A = -Q_1^* Q_1 .$$

Положим $R_1 = \left(1 - \frac{2}{\gamma^2}\right) C^* H C + R + \frac{1}{\gamma^2} C^* H_1 C$ и

$$R_0 = R_1 (1 - 2\gamma^2), \quad Q_0 = Q, \quad G_0 = G - \left(\frac{1}{\gamma^2} + \gamma^2\right) Q_2^* Q_2 + G_1 ,$$

$$G_1 = D^* \int_0^\infty g^*(t)\left(R_1(1-\gamma^2-\frac{1}{\gamma^2})-\gamma^2 Q_1^* Q_1\right) g(t)\,dt \cdot D\ .$$

Оценка (4.I) получается на основании свойств стохастических интегралов с использованием неравенства Коши-Буняковского и техники работы /I6/. Недостатки такого способа, очевидно, связаны с необходимостью решать уравнения (4.3). Кроме того, неудачно выбранная оценка (4.I) может сузить область устойчивости по сравнению с той, которую дает (2.3). Поэтому проблема построения эффективной оценки (4.I) является актуальной.

5. ПРИМЕР

Приводимый ниже пример иллюстрирует применение теоремы 3 и технику получения частотных условий устойчивости. Рассматривается уравнение (I.I) с $C = 0$, гурвицевой матрицей A, скалярной нелинейностью φ и скалярным выходом σ. Предполагается, что $\varphi = \varphi(\sigma)$ непрерывно дифференцируемая функция, причем $0 \le \varphi(\sigma) \le h\sigma^2$, $\kappa_2 \le d\varphi/d\sigma \le \kappa_1$, $\kappa_{1,2} \ge 0$. Пусть β, $h_2 > 0$, $\delta > 0$ - вещественные числа, связанные соотношениями

$$\delta + \frac{1}{h_2} - \kappa_1\beta\left[\vartheta^* D\right]^2 \le \frac{1}{h}\qquad ,\ \text{если}\ \beta < 0,$$

$$\delta + \frac{1}{h_2} \le \frac{1}{h}\qquad ,\ \text{если}\ \beta = 0,$$

$$\delta + \frac{1}{h_2} - \kappa_2\beta\left[\vartheta^* D\right]^2 \le \frac{1}{h}\qquad ,\ \text{если}\ \beta > 0.$$

Очевидно, при фиксированных h, D, $\kappa_{1,2}$ и ϑ такие h_2, δ и β всегда можно подобрать и при таком выборе

$$\frac{1}{h_2}\varphi^2 - \sigma\varphi - \beta\left[\vartheta^* D\right]^2\varphi^2\varphi' \le -\delta\varphi^2.$$

Введем дополнительное состояние σ_1 и дополнительный вход-нелинейность $\varphi_1 \equiv \varphi(\sigma_1)$, причем будем считать, что $\sigma_1 = -\int_0^t g_1(t-\tau)\,\times$ $\times\,\varphi(\sigma(\tau))\,d\tau$, где $g_1(t)$ - импульсная переходная функция динамического звена с коэффициентом передачи $\chi_1(p)$. Вид $\chi_1(p)$ будет выбран ниже. В силу свойства непрерывной дифференцируемости и ограниченности производной нелинейности φ, φ_1 удовлетворяют неравенствам (дополнительным квадратичным связям)

$$\left[\varphi_1 - \varphi - \kappa_1(\sigma_1 - \sigma)\right]\left[\varphi_1 - \varphi - \kappa_2(\sigma_1 - \sigma)\right] \le 0,$$

$$\frac{1}{h_1}\varphi_1^2 - \sigma_1\varphi_1 \le -\delta\varphi_1^2, \quad \frac{1}{h_1} = \begin{cases} \dfrac{1}{h_2}, & \beta < 0 \\ \dfrac{1}{h} - \delta, & \beta \ge 0 \end{cases}.$$

Исходная система имеет экспоненциально устойчивое положение равновесия в начале координат, если этим же свойством обладает расширенная система

$$dx = (Ax + b\varphi)dt + D\varphi dw(t),$$

$$\sigma_1 = -\int_0^t g_1(t-\tau)\,\varphi(\sigma(\tau))\,d\tau,$$

$$\sigma = \nu^* x, \quad \varphi = \varphi(\sigma), \quad \varphi_1 = \varphi(\sigma_1).$$

Функцию Ляпунова для расширенной системы будет искать в виде

$$V(x,\sigma_1) = x^* M x + 2\beta\int_0^{\sigma}\varphi(\xi)\,d\xi + 2\vartheta\int_0^{\sigma_1}\varphi_1(\xi)\,d\xi,$$

$M = M^*$ – неизвестная матрица, ϑ – произвольное вещественное число, β – выбранное выше число.

По формуле Ито, значение $LV(x(t),\sigma_1(t))$, вычисленное вдоль траектории расширенной системы равно

$$2x^* M(Ax + b\varphi) + \varphi^2 D^* M D + 2\beta\varphi\nu^*(Ax + b\varphi) + \rho\varphi^2\left[\nu^* D\right]^2\varphi' + 2\vartheta\varphi_1\dot{\sigma}_1.$$

Требуется найти условия, при которых LV будет знакоопределенной величиной.

Рассматриваем квадратичную форму

$$F(x,\sigma_1,\sigma_2,u,u_1) = \frac{1}{h^2}u^2 - \sigma u + \theta\left(\frac{1}{h_1}u_1^2 - \sigma_1 u_1\right) +$$

$$+\tau(u_1 - u - \kappa_1\sigma_1 + \kappa_1\sigma)(u_1 - u - \kappa_2\sigma_1 + \kappa_2\sigma) + 2\beta u\nu^*(Ax + bu) + 2\vartheta u_1\sigma_2,$$

$$\sigma = \nu^* x.$$

Используя первый прием из предыдущего пункта (или леммы приложения /5/) получаем оценку

$$E\int_0^\infty F\left(x,\sigma_1(t),\sigma_2(t),u(t),u_1(t)\right)dt \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} E\Big\{\Big(\frac{1}{h_2}-\operatorname{Re}\varkappa(i\lambda)+\tau\operatorname{Re}(1-\kappa_1(\varkappa_1+\varkappa))^*(1-\kappa_2(\varkappa_1+\varkappa))+$$

$$+2\beta\operatorname{Re} i\lambda\varkappa(i\lambda)+2\beta\nu^* b-\gamma^2|\beta|-\frac{1}{2}\gamma^2\big|2\tau\kappa_1\kappa_2(\varkappa_1(i\lambda)+\varkappa(i\lambda))-$$

$$-1-\tau(\kappa_2+\kappa_1)\big|^2-\frac{1}{\gamma^2}|\beta|C_1^2+\Big(\tau\kappa_1\kappa_2-\frac{1}{2\gamma^2}\Big)C^2\Big)|\tilde u(\lambda)|^2+$$

$$+2\operatorname{Re}\Big[\Big(\frac{\theta}{2}\varkappa_1(i\lambda)-\tau+\tau\,\frac{\kappa_1+\kappa_2}{2}(\varkappa_1(i\lambda)+\varkappa(i\lambda))-\vartheta i\lambda\varkappa_1(i\lambda)-$$

$$-\frac{\gamma^2}{2}\tau(\kappa_2+\kappa_1)\big(-1-\tau(\kappa_2+\kappa_1)+2\tau\kappa_2\kappa_1(\varkappa_1(i\lambda)+\varkappa(i\lambda))\big)\Big)\tilde u_1(\lambda)^*\tilde u(\lambda)\Big]+$$

$$+\Big(\frac{\theta}{h_1}+\tau-\frac{\gamma^2}{2}\tau^2(\kappa_2+\kappa_1)^2\Big)|\tilde u_1(\lambda)|^2\Big\}\,d\lambda\,,$$

где $C^2=\int_0^\infty|\nu^* g(t)D|^2dt$, $C_1^2=\int_0^\infty|\nu^* A\,g(t)D|^2dt$, $\tilde u(\lambda)$, $\tilde u_1(\lambda)$ – преобразования Фурье $u(t)$ и $u_1(t)$ – допустимых управлений. Выберем $\varkappa_1(p)$ так, чтобы коэффициент при $\tilde u_1^*\tilde u$ был равен нулю:

$$\varkappa_1(p)=\frac{2\tau-\gamma^2 q_1(1+q_1)+(q_1+2\gamma^2 q_1 q_2)\varkappa(p)}{\theta-q_1-2\gamma^2 q_1 q_2-2\vartheta p}\,.$$

Здесь $q_1=\tau(\kappa_1+\kappa_2)$, $q_2=\tau\kappa_1\kappa_2$. Получаем, что (2.3) выполняется, если найдется такое $\varepsilon>0$, что

$$\frac{\theta}{h_1}+\tau-\frac{1}{2}\gamma^2 q_1^2\geq\varepsilon,\quad \frac{1}{\vartheta}\left(\frac{\theta}{2}-\frac{q_1}{2}-\gamma^2 q_1 q_2\right)<0,$$

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{h_2}+2\beta\nu^* b-\gamma^2|\beta|-\frac{1}{2}\gamma^2|1-q_1|^2-\frac{1}{\gamma^2}|\beta|c_1^2+\left(q_2-\frac{1}{2\gamma^2}\right)c^2-\right.$$

$$\left.-(1-2\beta i\lambda)\chi(i\lambda)+(2q_2\gamma^2(1-q_1)-q_1)\chi_2(i\lambda)+(q_2-2q_2^2\gamma^2)|\chi_2|^2\right\}\geq\varepsilon,\ \chi_2=\chi_1+\chi,$$

хотя бы при одном наборе параметров θ, τ, β, γ, ϑ. В силу гурвицевости A, линейная часть исходного уравнения экспоненциально устойчива, и, следовательно, если β и ϑ таковы, что $\beta\int_0^\sigma\varphi(\xi)d\xi\leq 0$ и $\vartheta\int_0^\sigma\varphi(\xi)d\xi\leq 0$, то положение равновесия как расширенной, так и исходной системы экспоненциально устойчиво в среднем квадратическом.

ПРИЛОЖЕНИЕ

<u>Доказательство теоремы 3</u>. Для любого допустимого при $t=0$, $h=0$ управления $u(t)$ имеет место оценка /5/:

$$\int_0^\infty E|x(t)|^2dt\leq c\int_0^\infty E|u(t)|^2dt,\quad \exists c>0.$$

Пусть выполнено (2.3) с $\varepsilon>0$. Положим $\varepsilon_1=\varepsilon/2c$ и $F_\varepsilon(x,u)=F(x,u)-\varepsilon_1|x|^2$. Используя (2.3) и предыдущее неравенство, получаем, что

$$\int_0^\infty E\,F_\varepsilon(x(t),u(t))dt\geq\varepsilon_1\int_0^\infty E|x(t)|^2dt\geq 0.$$

По теореме 2, существует матрица $M_\varepsilon=M_\varepsilon^*$ такая, что $L_u\langle x,M_\varepsilon x\rangle+F(x,u)\geq\varepsilon_1|x|^2$. С помощью M_ε построим функцию Ляпунова (2.6) и воспользуемся тождеством, вытекающим из (2.2)

$$L_u\langle x, M_\varepsilon x\rangle + F(x;u) = LV(x) + F_1(\sigma, x, \varphi, \varphi')$$
при $u = \varphi(\sigma)$. Получим, если $\varphi \in K_1(\delta)$, $\delta \geq 0$, что $LV(x) \geq \varepsilon_1 |x|^2$. Далее, поскольку экспоненциально стабилизирующая обратная связь $\varphi = \mu^*\sigma$ принадлежит $K_1(\delta)$, то по формуле Дынкина

$$EV_\mu(x(t,h)) - V_\mu(h) = \int_0^t ELV_\mu(x(\tau,h))d\tau \geq \varepsilon_1 \int_0^t E|x(\tau,h)|^2 dt,$$

где $x(t,h)$ - решение (2.I) с начальным условием $x(0,h) = h \in R^n$ и управлением $u = \mu^*\sigma$, V_μ получается из V подстановкой $\varphi = \mu^*\sigma$. Переходя к пределу при $t \to +\infty$, учитывая (I.4), получаем, что $V_\mu(h) \leq - \mathrm{const}$, $\mathrm{const} > 0$, при $h \neq 0$. Очевидно, также $V_\mu(0) = 0$. Наконец, используя оставшееся условие теоремы, получаем, что для любой нелинейности φ $V(x) < 0$ при $x \neq 0$ и $V(0) = 0$. Таким образом, можно применить теорему 7.I /2, с.232/. Теорема 3 доказана.

Доказательство теоремы 4. Пусть $x_1(t)$, $x_2(t)$ - две траектории нелинейного уравнения. Положим $y = x_1 - x_2$, $z = \nu^* y = \sigma_1 - \sigma_2$, $\psi(t) = \varphi(\sigma_1(t)) - \varphi(\sigma_2(t))$. Очевидно,

$$dy = (Ay + b\psi)dt + (Cy + d\psi)dw(t),$$

причем, по условию теоремы, выполняются все условия теоремы 3, что и влечет экспоненциальную конвергенцию.

Доказательство теоремы 5. Пусть $\varphi_1(\sigma,t) = \varphi(\sigma,t) - \mu^*\sigma$, X_t^τ - стохастическая полугруппа случайных линейных операторов, соответствующая уравнению $dx = (A + b\mu^*\nu^*)x\,dt + (C + D\mu^*\nu^*)x\,dw(t)$ /18/. В силу (I.4), $\|X_t^\tau\| \leq \gamma \exp[-\alpha(t-\tau)]$. Обозначим $\varphi_1(t) = \varphi(\nu^* x(t, t_0, 0, f), t)$, $x(t, t_0, 0, f)$ - решение (I.I) отвечающее начальному условию $x(t_0, t_0, 0, f) = 0$. Тогда, как легко убедиться с помощью формулы Ито,

$$x(t,t_0,0,f) = \int_{t_0}^t X_t^\tau b\varphi_1(\tau)d\tau + \int_{t_0}^t X_t^\tau D\varphi_1(\tau)\,dw(\tau) + \int_{t_0}^t X_t^\tau f(\tau)d\tau.$$

Знаком $\|\cdot\|$ будем обозначать норму в пространстве $L_2(\Omega)$. Используя свойства стохастического интеграла, а также оценку нормы оператора X_t^τ и неравенство Коши-Буняковского можно показать, что существуют $c_1 > 0$, $c_2 > 0$, $c_3 > 0$ такие, что

$$\varphi(t,t_0)\le (c_1/\alpha+c_3)\int_{t_0}^{t} e^{-\alpha(t-\tau)}\varphi(t,t_0)d\tau+\frac{c_2}{\alpha^2},$$

$$\varphi(t,t_0)=\|x(t,t_0,0,f)\|^2 .$$

Используем далее следствие 2.I /I7, с.I55/. Получим

$$\varphi(t,t_0)\le \frac{c_2}{\alpha^2}\exp\left(\frac{c_1}{\alpha^2}+\frac{c_3}{\alpha}\right)\doteq R,$$

что доказывает теорему в силу экспоненциальной конвергенции траекторий ($c_2\sim r>|f|$).

Доказательство теоремы 6. Рассмотрим последовательность пространств $\{\Phi_k=H_{t_k},\ k=0,\pm1,\pm2,\dots,\ t_k\le t_{k+1},\ t_k\in(-\infty,+\infty)\}$ и отображений $T_k{}^k:\Phi_k\to\Phi_{k+1}$, определенных по правилу $T_k h = x(t_{k+1}, t_k, h^k, f)$. Поскольку выполнены условия теоремы 4, то каждое из преобразований T_k является сжимающим. За счет выбора последовательности t_k можно добиться того, что $\|T_k h\|\le R_1<R_2$ при $\|h\|\le R_2$. Действительно, $\|T_k h\|\le \gamma e^{-\alpha(t_{k+1}-t_k)}R_2+R<R_2$ при $\exp(-\alpha(t_{k+1}-t_k))<(1/\gamma)(1-R/R_2)$. В соответствии с результатами /I5/, существует инвариантная последовательность $\{x_k^*\}$ семейства отображений $\{T_k\}$, то есть $T_k x_k^*=x_{k+1}^*$, причем бесконечная в обе стороны. Это доказывает первую часть утверждения теоремы 6.

Пусть теперь f – θ-периодическая функция, или случайный процесс с θ-периодическими траекториями. Тогда, если h и h_1 связаны соотношением

$$h_1=h+\int_{t_k}^{t_{k+1}}(Ax(\tau)+b\varphi(\tau))d\tau+\int_{t_k}^{t_{k+1}}(Cx(\tau)+Du(\tau))dw(\tau)+\int_{t_k}^{t_{k+1}}f(\tau)d\tau,$$

то (Γ_θ – оператор сдвига вдоль траекторий винеровского процесса):

$$\Gamma_\theta h_1=\Gamma_\theta h+\int_{t_k+\theta}^{t_{k+1}+\theta}(Ax(\tau)+b\varphi(\tau))d\tau+\int_{t_k+\theta}^{t_{k+1}+\theta}(Cx(\tau)+Du(\tau))dw(\tau)+\int_{t_k+\theta}^{t_{k+1}+\theta}f(\tau)d\tau,$$

откуда следует, что $\Gamma_\theta T_k h=T_{k+1}\Gamma_\theta h,\ \forall h\in\Phi_k$. Поскольку, семейство $\{\Gamma_\theta,\ \theta\in(-\infty,+\infty)\}$ образует группу, то $T_{k+1}=\Gamma_\theta T_k\Gamma_\theta^{-1}$. Следовательно, так как $T_k\Gamma_\theta^{-1}x_{k+1}^*=\Gamma_\theta^{-1}x_{k+2}^*$, то последовательность $\Gamma_\theta^{-1} x^*_{k+1}$ - также инвариантная и, в силу единственности, $x^*_{k+1} = \Gamma_\theta x^*_k$, что обеспечивает периодичность устойчивого марковского процесса. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г.Дж.Кушнер. Стохастическая устойчивость и управление. - М.:Мир, 1969.
2. Хасьминский Р.З. Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. - М.: Наука, 1969.
3. Попов В.М. Гиперустойчивость автоматических систем. - М.: Наука, 1970.
4. Брусин В.А. - Сиб. мат. журн., 1981, т.22, №2.
5. Брусин В.А., Угриновский В.А. - Сиб. мат. журн., 1987, т.28, №4.
6. Пакшин П.В. - Автоматика и телемеханика, 1977, № 4.
7. Левит М.В. - УМН, 1972, т.27, вып. 4.
8. Маккин Г. Стохастические интенгралы. - М.: Мир, 1972
9. Якубович В.А. - Автоматика и телемеханика, 1967, № 6.
10. Якубович В.А., Левит М.В. - ПММ, 1972, т.36, № 1.
11. Невельсон М.Б., Хасьминский Р.З. - ПММ, 1966, т.30, № 2.
12. Якубович В.А. - Сиб. мат. журн., 1975, т.16, № 5.
13. Estrada R.F. - Int.Journal of Control, v.18, N 2, 1973.
14. Дуб Дж.Л. Вероятностные процессы, - М.: ИЛ, 1956.
15. Неймарк Ю.И. - Труды II Всесоюзн. съезда по теор. и прикл. механике, т.2, 1965.
16. Докучаев Н.Г. - Вестник ЛГУ, 1983, вып.1, серия математика, механика, астрономия.
17. Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. - М.: Наука, 1970.
18. Скороход А.В. Случайные линейные операторы. - Киев: Наукова думка, 1978.

Дата поступления статьи

4 ноября 1986 г.

Владимир Александрович БРУСИН

Валерий Аронович УГРИНОВСКИЙ

УСТОЙЧИВОСТЬ СТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЙ

ПАРАМЕТРИЧЕСКИ ВОЗМУЩЕННЫХ СИСТЕМ

Подписано в печать 13.11.86 г. МЦ 01219. Формат 60 x 84/16.
Бумага множительная. Печать офсетная. Объем 1,15 усл. печ. л.
Заказ 4502. Тираж 120. Бесплатно.

Отпечатано на ротапринте НИРФИ