

Министерство высшего и среднего специального образования РСФСР

Горьковский ордена Трудового Красного Знамени  
научно-исследовательский радиофизический институт (НИРФИ)

П р е п р и н т № 221

ИЗЛУЧЕНИЕ ЗВУКА ИСТОЧНИКОМ МАССЫ,  
ПЕРЕСЕКАЮЩИМ ГРАНИЦУ РАЗДЕЛА СРЕД

Б.Е. Немцов

А.В. Разин

Г о р ь к и й 1 9 8 6

Немцов Б.Е., Разин А.В.

ИЗЛУЧЕНИЕ ЗВУКА ИСТОЧНИКОМ МАССЫ, ПЕРЕСЕКАЮЩИМ ГРАНИЦУ РАЗДЕЛА  
СРЕД. Горький, Препринт № 221 / НИРЧИ, 1986.

37 с.

УДК 534.222

С использованием методов контурного интегрирования решена задача о переходном излучении, возникающем при пересечении равномерно движущимся точечным источником массы плоской границы раздела двух однородных газообразных полупространств с различными акустическими свойствами. Рассмотрено дозвуковое и сверхзвуковое движение источника. Подробно исследованы ранее не изучавшиеся эффекты полного внутреннего отражения в переходном излучении. Показано, что для углов, меньших угла полного внутреннего отражения, переходное излучение представляет собой сосредоточенный сферический импульс, имеющий вблизи своего фронта вид дельта-функции. В области углов, больших угла полного внутреннего отражения, возникает боковая волна, и поле переходного излучения содержит как сосредоточенный импульс, так и распределенное в пространстве возмущение. Для важных частных случаев - на траектории источника и (при его медленном движении) на границе раздела сред - получены точные аналитические выражения для поля. Изложена процедура сведения появляющихся в процессе решения задачи двойных интегралов Фурье, описывающих поля, к легко вычисляемым на ЭВМ однократным интегралам от действительной функции в конечных пределах.

В работе [1] было показано, что при переходе равномерно движущегося заряда из одной среды в другую возникает своеобразное излучение, названное впоследствии переходным [2]. Интенсивное изучение переходного излучения в различного рода электродинамических системах обнаружило универсальность этого процесса, в том смысле, что переходное излучение возникает там, где осуществляется перестройка ближнего поля источника [2, 3]. Это утверждение относится в равной мере как к электродинамическим задачам, так и к вопросам излучения в гидродинамических, либо акустических системах.

Переходное излучение акустических волн впервые рассматривалось в работе [4], где была решена задача о генерации звука точечным силовым источником, пересекающим границу раздела двух газообразных сред. В [4] показано, что переходное излучение имеет вид сферического дельта-импульса. Аналогичная задача для термооптического источника конечных размеров рассмотрена в [5]. В этом случае переходное излучение представляет собой сосредоточенный сферический импульс, длительность и форма которого определяются размерами и структурой источника.

Задача в [4, 5] решалась с помощью преобразования Фурье, причем для вычисления интегралов Фурье использовался метод перевала.

Применение этого метода для двойных интегралов требует известной осторожности. Во-первых, необходимо учитывать, что в области углов, больших угла полного внутреннего отражения, коэффициент отражения звуковых волн имеет вид [6]  $V = \exp(i\psi \operatorname{sign} \omega)$ . Игнорирование такого рода зависимости коэффициента отражения от  $\omega$  приводит к тому, что звуковое поле в области углов, превышающих угол полного внутреннего отражения, представляется комплексной величиной [4, 5]. Во-вторых, необходимо указывать пределы применимости метода перевала для двойных интегралов, поскольку при формальном его ис-

пользовании для углов, больших угла полного внутреннего отражения, нарушается принцип причинности: звуковой сигнал приходит в точку наблюдения сколь угодно рано.

В настоящей работе с использованием развитого в [6] подхода решена задача о переходном излучении, возникающем при пересечении равномерно движущимся источником массы плоской границы раздела двух однородных газообразных полупространств с различными акустическими свойствами. Использование методов контурного интегрирования позволило свести появляющиеся в процессе решения задачи двойные интегралы Фурье, описывающие поля, к однократным интегралам от действительной функции в конечных пределах. Эти интегралы могут быть легко вычислены с помощью ЭВМ, однако в некоторых наиболее интересных случаях, например, на границе раздела сред и на траектории движения источника, удается получить точные аналитические выражения для поля, создаваемого движущимся источником. Кроме того, использованный в работе метод позволяет найти волновую часть поля и указать пределы применимости метода перевала.

В статье рассматриваются случаи дозвукового и сверхзвукового движения источника. В дозвуковом случае детально исследуется влияние эффектов полного внутреннего отражения на формирование полей переходного излучения. Показано, что в области углов, больших критического, возбуждается боковая волна, а поле переходного излучения содержит кроме дельта-импульса распределённое в пространстве возмущение.

При движении источника со сверхзвуковой скоростью исследуются эффекты интерференции волны Маха и переходного излучения. Обсуждается влияние конечности размеров источника на формирование излучения Маха.

## I. Переходное излучение при дозвуковом движении источника

Рассмотрим два однородных газообразных полупространства с границей раздела, совпадающей с плоскостью  $Z = 0$  декартовой системы координат. Первую среду, занимающую полупространство  $Z < 0$ , будем характеризовать скоростью звука  $C_1$  и плотностью  $\rho_1$ . Скорость звука и плотность второй среды, занимающей область  $Z > 0$ , обозначим соответственно  $C_2$  и  $\rho_2$ . (рис.1). Для определенности будем считать,

что плотность правого полупространства и скорость звука в нем больше, чем соответствующие величины в левом полупространстве:  $C_2 > C_1$ ,  $\rho_2 > \rho_1$ .

Пусть точечный источник массы мощности  $Q$  движется равномерно со скоростью  $v$  из области  $z = -\infty$  в положительном направлении оси  $z$ . Введём потенциалы скоростей смещений частиц левой и правой сред в соответствии с формулами

$$\vec{v}_1 = \text{grad } \varphi_1, \quad \vec{v}_2 = \text{grad } \varphi_2.$$

Нетрудно показать, что потенциалы удовлетворяют уравнениям

$$\Delta \varphi_1 - \frac{1}{C_1^2} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} = \frac{Q}{\rho_1} \delta(x) \delta(y) \delta(z - vt), \quad (1)$$

$$\Delta \varphi_2 - \frac{1}{C_2^2} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2} = \frac{Q}{\rho_2} \delta(x) \delta(y) \delta(z - vt), \quad (2),$$

которые необходимо решать с граничными условиями равенства давлений,

$$\rho_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} = \rho_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial t}, \quad (3)$$

и равенства нормальных к границе составляющих скоростей смещений,

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial z}, \quad (4)$$

при  $z = 0$ . Пользуясь процедурой преобразования Фурье по времени и координатам  $x, y$ , можно получить решения уравнений (1), (2) в интегральном виде:

$$\varphi_1 = \varphi_1^{(1)} + \varphi_1^{(2)}, \quad (5)$$

$$\varphi_2 = \varphi_2^{(1)} + \varphi_2^{(2)}, \quad (6)$$

где

$$\varphi_{1,2}^{(1)} = \frac{Q}{4\pi^2 \rho_{1,2} v} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{\alpha J_0(\alpha \rho) e^{i \frac{\omega}{v}(z-vt)}}{\omega^2 / C_{1,2}^2 - \alpha^2 - \omega^2 / v^2} d\omega d\alpha, \quad (7)$$

$$\varphi_1^{(2)} = \frac{Q}{4\pi^2 \rho_1 v} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{V_1(\omega, \alpha) \alpha J_0(\alpha \rho) \exp(-i\omega t - i\sqrt{\omega^2 / C_1^2 - \alpha^2} z)}{\omega^2 / C_1^2 - \alpha^2 - \omega^2 / v^2} d\omega d\alpha \quad (8)$$

$$+ \frac{Q}{4\pi^2 \rho_2 v} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} W_1(\omega, z) z J_0(z\rho) \exp(-i\omega t - i\sqrt{\omega^2/c_1^2 - z^2} z) d\omega dz, \quad (9)$$

$$\varphi_2^{(2)} = \frac{Q}{4\pi^2 \rho_2 v} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} z J_0(z\rho) e^{-i\omega t + i\sqrt{\omega^2/c_2^2 - z^2} z} \left[ \frac{V_2(\omega, z)}{\omega^2/c_1^2 - z^2 - \omega^2/v^2} - \frac{W_2(\omega, z)}{\omega^2/c_2^2 - z^2 - \omega^2/v^2} \right] dz d\omega$$

В выражениях (7) - (9)  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$  - расстояние от траектории источника в плоскости  $z = \text{const}$ ,  $J_0$  - функция Бесселя нулевого порядка,

$$V_1(\omega, k) = \frac{\rho_2 \frac{\omega}{v} - \rho_1 \sqrt{\frac{\omega^2}{c_2^2} - z^2}}{\rho_1 \sqrt{\frac{\omega^2}{c_2^2} - z^2} + \rho_2 \sqrt{\frac{\omega^2}{c_1^2} - z^2}},$$

$$W_1(\omega, k) = \frac{\rho_2}{\left( \rho_1 \sqrt{\frac{\omega^2}{c_2^2} - z^2} + \rho_2 \sqrt{\frac{\omega^2}{c_1^2} - z^2} \right) \left( \sqrt{\frac{\omega^2}{c_2^2} - z^2} + \frac{\omega}{v} \right)},$$

$$V_2(\omega, k) = \frac{\rho_2 \left( \frac{\omega}{v} + \sqrt{\frac{\omega^2}{c_1^2} - z^2} \right)}{\rho_1 \sqrt{\frac{\omega^2}{c_2^2} - z^2} + \rho_2 \sqrt{\frac{\omega^2}{c_1^2} - z^2}},$$

$$W_2(\omega, k) = \frac{\rho_1 \frac{\omega}{v} + \rho_2 \sqrt{\frac{\omega^2}{c_1^2} - z^2}}{\rho_1 \sqrt{\frac{\omega^2}{c_2^2} - z^2} + \rho_2 \sqrt{\frac{\omega^2}{c_1^2} - z^2}}.$$

Контур интегрирования по  $\omega$  в (7)-(9) проходит выше точек ветвления  $\omega = \pm c_{1,2} z$ ,  $\text{Im} \omega > 0$ . Это можно показать, вводя в среды слабое затухание. Из условия ограниченности подынтегральных выражений в (7) - (9) при  $|z| \rightarrow \infty$  необходимо считать, что

$$\sqrt{\omega^2/c_{1,2}^2 - z^2} = i \left| \sqrt{z^2 - \omega^2/c_{1,2}^2} \right| \text{ при } z > \frac{|\omega|}{c_{1,2}}.$$

Входящие в (5) и (6) потенциалы  $\varphi_{1,2}^{(1)}$  соответствуют статическим возмущениям, создаваемым в однородной безграничной среде движущимся точечным источником массы. Вычисляя интегралы (7), получаем для потенциалов статических полей, а также для возмущений дав-

ления, которое связано с потенциалами скоростей равенством

$$p_{1,2} = -\rho_{1,2} \frac{\partial \psi_{1,2}}{\partial t}, \text{ следующие выражения:}$$

$$\psi_{1,2}^{(1)} = -\frac{Q}{4\pi\rho_{1,2}\sqrt{\rho^2(1-M_{1,2}^2)+(z-vt)^2}}, \quad \psi_{1,2}^{(1)} = \frac{Qv(z-vt)}{4\pi[\rho^2(1-M_{1,2}^2)+(z-vt)^2]^{3/2}},$$

где  $M_{1,2} = v/c_{1,2}$  - числа Маха. В работе [4] аналогичный результат был получен для силового источника.

Потенциалы  $\psi_{1,2}$  в (5), (6) описывают поле, связанное с наличием границы раздела сред. Именно эта часть поля представляет наибольший интерес.

Рассмотрим звуковое поле, связанное наличием границы раздела, в первой среде,  $z < 0$ . В интеграле (8) сделаем замену переменной интегрирования [6]:

$$\omega = c_1 \alpha' x, \quad x = \alpha'. \quad (10)$$

При этом

$$\psi_1^{(2)} = -\frac{QM_1}{4\pi^2\rho_1(1-M_1^2)} \int_{L_x} \frac{V_1(x)}{x^2 + \frac{M_1^2}{1-M_1^2}} I(x) dx + \frac{Q}{4\pi^2\rho_2 M_2} \int_{L_x} W_1(x) I(x) dx, \quad (11)$$

где

$$I(x) = \int_0^\infty \exp[-i\alpha'(c_1 t x + z\sqrt{x^2-1})] J_0(\alpha' \rho) d\alpha', \quad (12)$$

$$V_1(x) = \frac{\rho_2 \frac{x}{M_1} - \rho_1 \sqrt{n^2 x^2 - 1}}{\rho_2 \sqrt{x^2 - 1} + \rho_1 \sqrt{n^2 x^2 - 1}}, \quad (13)$$

$$W_1(x) = \frac{\rho_2}{(\rho_1 \sqrt{n^2 x^2 - 1} + \rho_2 \sqrt{x^2 - 1})(\sqrt{n^2 x^2 - 1} + \frac{x}{M_1})}, \quad (14)$$

$$n = c_1/c_2 < 1.$$

Поскольку контур интегрирования по  $\omega$  в (8) проходит выше действительной оси,  $\text{Im } \omega > 0$ , то в соответствии с (10) контур  $L_x$  также

проходит в области  $\text{Im } x > 0$ . При некоторых значениях  $\text{Im } x$  интеграл (I2) может оказаться расходящимся. Это означает, что контур интегрирования  $L_x$  не может проходить произвольно в области  $\text{Im } x > 0$ . Наложить ограничения на величину  $\text{Im } x$  можно, например, путем введения в подынтегральное выражение в (I2) регуляризирующего множителя  $e^{\text{pr}(-\lambda x')}$ , где  $\lambda \rightarrow 0$  [6]:

$$I(x) = \int_0^{\infty} e^{-i x' (C_1 t x + \pm \sqrt{x^2 - 1} - i \lambda)} J_0(x' \rho) dx'. \quad (I2')$$

При этом выбор пути интегрирования  $L_x$  будет определяться величиной  $\lambda$ . Подробное обсуждение замены (I0) и возникающих при её использовании вопросов, в частности, исследование сходимости интеграла (I2'), содержится в [6]. Здесь лишь отметим, что введение регуляризирующего множителя соответствует переходу от точечного источника к источнику конечных размеров,

$$\delta(x) \delta(y) \rightarrow \frac{\lambda}{2\pi(\lambda^2 + \rho^2)^{3/2}}.$$

Все дальнейшие вычисления будут проведены при  $\lambda \neq 0$ ; переход к точечному источнику можно осуществить, полагая в конечных результатах  $\lambda = 0$ .

Вычисляя интеграл (I2'), приводим выражение для потенциала скоростей  $\varphi_1^{(2)}$  к виду

$$\varphi_1^{(2)} = -\frac{QM_1}{4\pi^2 \rho_1^2 (1 - M_1^2)} \int_{L_x} \frac{V_1(x) dx}{(x^2 + \beta^2) F(x)} + \frac{Q}{4\pi^2 \rho_2^2 M_1} \int_{L_x} \frac{W_1(x)}{F(x)} dx, \quad (I5)$$

где  $F(x) = \sqrt{\rho^2 - (C_1 t x - \sqrt{x^2 - 1} |z| - i \lambda)^2}$ ,  $\beta^2 = M_1^2 / (1 - M_1^2)$ . Входящие в (I3) - (I5) аналитические функции  $\sqrt{x^2 - 1}$ ,  $\sqrt{n^2 x^2 - 1}$ ,  $F(x)$  определены на комплексной плоскости  $x$  следующим образом:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 - 1} = x, \quad (I6)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{n^2 x^2 - 1} = n x, \quad (I7)$$

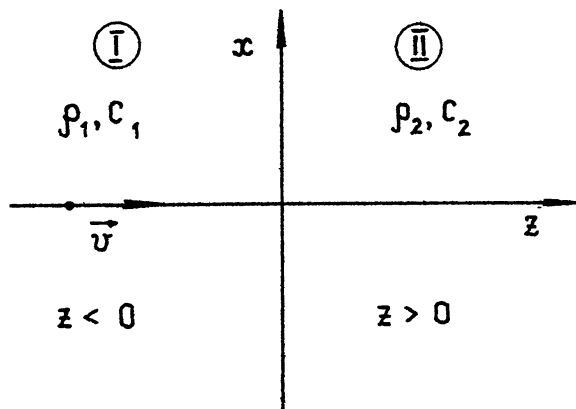
$$\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = \sqrt{\rho^2 + z^2} = R > 0. \quad (I8)$$

В интеграле (I5) сделаем еще одну замену [6]:

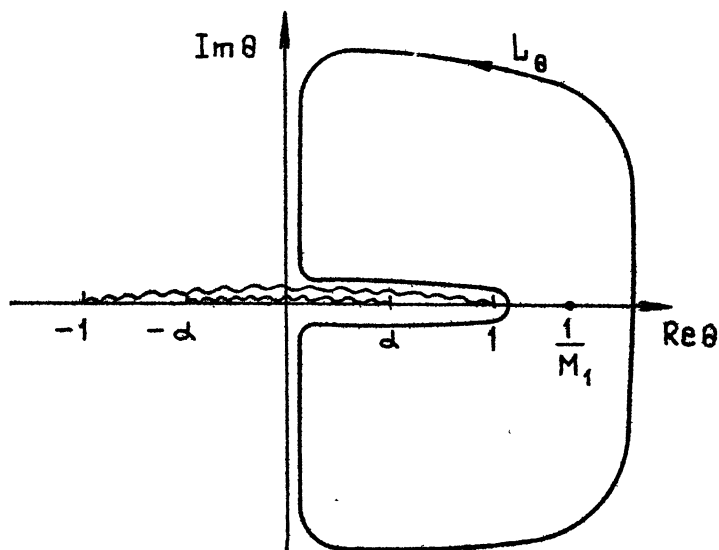
$$x = \frac{1}{\sqrt{1 - \theta^2}}, \quad \theta = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x}. \quad (I9)$$

При этом контур  $L_x$  переходит в замкнутый контур  $L_\theta$ , который изо-





Р и с 1. К постановке задачи.



Р и с 2. Контур интегрирования и особые точки полиинтегрального выражения (23) при  $M_1 < 1$ . Разрезы показаны волнистыми линиями.

бражён на рис.2. Для совместного выполнения (I6),(I9) необходимо считать, что

$$\lim_{\theta \rightarrow \infty} \sqrt{1-\theta^2} = -i\theta. \quad (20)$$

Это определяет аналитическую функцию  $\sqrt{1-\theta^2}$  на комплексной плоскости  $\theta$ . Далее, поскольку функция  $F(x)$  определена при  $x \rightarrow 0$  как положительное число, то после подстановки в неё зависимости (I9) от  $\theta$  будем иметь

$$F(x) = -\frac{iR}{\sqrt{1-\theta^2}} e_1(\theta), \quad (21)$$

где корень

$$e_1(\theta) = \sqrt{(\theta-\psi_1)(\theta-\psi_2) - \frac{2i\lambda}{R^2} \sqrt{1-\theta^2}(c_1 t |z|)} \quad (22)$$

определен как положительное число при  $\theta \rightarrow \infty$  и введено обозначение

$$\psi_{1,2} = \frac{1}{R^2} (c_1 t |z| \pm \rho \sqrt{R^2 - c_1^2 t^2}).$$

Таким образом, после замены переменной (I9) выражение для потенциала  $\varphi_1^{(2)}$  примет следующий, наиболее удобный для исследования методами контурного интегрирования, вид:

$$\varphi_1^{(2)} = \frac{Qi}{4\pi^2 \rho_1 M_1 R} \oint_{L_\theta} \frac{\theta V_1(\theta) d\theta}{e_1(\theta) (\theta^2 - \frac{1}{M_1^2})} + \frac{Qi}{4\pi^2 \rho_2 M_1 R} \oint_{L_\theta} \frac{\theta W_1(\theta) d\theta}{e_1(\theta)}, \quad (23)$$

где

$$V_1(\theta) = \frac{\rho_2 / M_1 - \rho_1 \sqrt{\theta^2 - \alpha^2}}{\rho_2 \theta + \rho_1 \sqrt{\theta^2 - \alpha^2}}, \quad (24)$$

$$W_1(\theta) = \frac{\rho_2}{(\rho_2 \theta + \rho_1 \sqrt{\theta^2 - \alpha^2})(\sqrt{\theta^2 - \alpha^2} + 1/M_1)}, \quad (25)$$

$$\alpha^2 = 1 - n^2 > 0, \quad \lim_{\theta \rightarrow \infty} \sqrt{\theta^2 - \alpha^2} = \theta.$$

Особыми точками подынтегральных выражений в (23) внутри контура  $L_\theta$  являются точки ветвления функции  $e(\theta)$  и полюс  $\theta = \frac{1}{M_1}$  (рис. 2).

Анализ, аналогичный проведённому в [6], показывает, что при  $|z| > c_1 t$  функция  $e_1(\theta)$  не имеет точек ветвления на выбранном листе римановой поверхности. При этом отличен от нуля только первый интеграл в (23); он пропорционален вычету в полюсе  $\theta = 1/M_1$  и соответствует статистически чистому полю изображения источника, движущегося с дозвуковой скоростью. Таким образом, в пределе точечного источника,  $\lambda \rightarrow 0$ , для области пространства, куда ещё не пришёл импульс переходного излучения, из (23) получаем

$$\varphi_{1st}^{(2)} = - \frac{Q}{4\pi p_1 \sqrt{p^2(1-M_1^2) + (z+vt)^2}} \frac{p_2 - p_1 \sqrt{1-M_1^2 + M_2^2}}{p_2 + p_1 \sqrt{1-M_1^2 + M_2^2}} \quad (26)$$

Если  $|z| < c_1 t$ , то помимо полюса  $\theta = \frac{1}{M_1}$  внутри контура  $L_\theta$  подынтегральное выражение в (23) содержит точки ветвления функции  $e_1(\theta)$  [6]:

$$\theta_{1,2} = \psi_1 \pm i \frac{\lambda \sin^2(\delta - \delta_1)}{R \sin \delta_1}, \quad (27)$$

где  $\delta = \arccos(|z|/R)$ ,  $\delta_1 = \arccos(c_1 t/R)$ .

Выражение для поля переходного излучения может быть получено интегрированием по берегам разреза, соединяющего точки ветвления  $\theta_1$  и  $\theta_2$  (см. рис. 2). При этом необходимо учесть наличие точек ветвления  $\theta = \pm \alpha$  у функций  $V_1(\theta)$  и  $W_1(\theta)$  и  $\theta = \pm I$  у подкоренного выражения в (22) и рассмотреть две возможности:  $\text{Re } \theta_1 > \alpha$  и  $\text{Re } \theta_1 < \alpha$ .

Рассмотрим первый случай,  $\text{Re } \theta_1 > \alpha$ . Это неравенство означает, что рассматривается область углов, меньших угла полного внутреннего отражения, поскольку  $\min \text{Re } \theta_1 = \frac{|z|}{R} = \cos \delta$  ( $\delta$  - угол наблюдения)  $\alpha = \cos \theta_0$ , где  $\theta_0$  - угол полного внутреннего отражения. При  $R > c_1 t$ , то есть до момента прихода сферического импульса переходного излучения, из (23) следует, что

$$\varphi_{1tr}^{(2)} = \frac{Q i}{2\pi^2 M_1 R} \left[ \frac{1}{p_1} \int_{\substack{\theta_1 \\ 0 < \text{Im } \theta \rightarrow 0}}^{\theta_1} \frac{\theta V_1(\theta) d\theta}{e_1(\theta)(\theta^2 - 1/M_1^2)} + \frac{1}{p_2} \int_{\substack{\theta_1 \\ 0 < \text{Im } \theta \rightarrow 0}}^{\theta_1} \frac{\theta W_1(\theta) d\theta}{e_1(\theta)} + \right. \\ \left. + \frac{1}{p_1} \int_{\substack{\theta_2 \\ 0 > \text{Im } \theta \rightarrow 0}}^1 \frac{\theta V_1(\theta) d\theta}{e_1(\theta)(\theta^2 - 1/M_1^2)} + \frac{1}{p_2} \int_{\substack{\theta_2 \\ 0 > \text{Im } \theta \rightarrow 0}}^1 \frac{\theta W_1(\theta) d\theta}{e_1(\theta)} \right]. \quad (28)$$

В предельном случае  $\lambda \rightarrow 0$  в (28) точки ветвления  $\theta_1$  и  $\theta_2$  лежат сколь угодно близко к действительной оси, причём  $\text{Re}\theta_1 = \text{Re}\theta_2$ . При этом, очевидно,  $\varphi_{1tr}^{(2)} = O(\lambda)$ .

Если  $R < c_1 t$  (это соответствует области пространства, куда уже пришел сферический импульс переходного излучения), то в (23) можно сразу перейти к пределу  $\lambda \rightarrow 0$ , поскольку  $\Psi_1$  и  $\Psi_2$  имеют собственные отличные от нуля мнимые части при  $\lambda = 0$ . Таким образом потенциал переходного излучения можно записать в виде ( $\lambda \rightarrow 0$ )

$$\varphi_{1tr}^{(2)} = \frac{iQH(t-R/c_1)}{4\pi^2 R M_1} \oint_{L(\Psi_1, \Psi_2)} \frac{\theta}{e_1(\theta)} \left[ \frac{V_1(\theta)}{\rho_1(\theta^2 - 1/M_1^2)} + \frac{W_1(\theta)}{\rho_2} \right] d\theta, \quad (29)$$

где контур интегрирования  $L(\Psi_1, \Psi_2)$  охватывает разрез, соединяющий точки ветвления  $\Psi_{1,2}$  и

$$H\left(t - \frac{R}{c_1}\right) = \begin{cases} 1, & t > R/c_1, \\ 0, & t < R/c_1, \end{cases}$$

- функция Хевисайда.

Перейдём к рассмотрению переходного излучения при  $\text{Re}\theta_1 < \alpha$  (область углов, больших угла полного внутреннего отражения). В этом случае уже при  $R > c_1 t$  интеграл по берегам разреза, проведенного между точками ветвления  $\theta = \theta_{1,2}$ , оказывается отличным от нуля в пределе  $\lambda \rightarrow 0$ . Это связано с тем, что корень  $\sqrt{\theta^2 - \alpha^2}$ , входящий в функции  $V_1(\theta)$  и  $W_1(\theta)$  (см. (24), (25)), имеет разные знаки на верхнем и нижнем берегах разреза ( $-\alpha, \alpha$ ). Таким образом, ещё до прихода в точку наблюдения сферической волны, переходное излучение отлично от нуля и соответствующий потенциал равен ( $\lambda \rightarrow 0$ )

$$\varphi_{1бок}^{(2)} = \frac{QH(\alpha - \Psi_1)}{\pi^2 R} \int_{\alpha}^{\Psi_1} \frac{\theta \sqrt{\alpha^2 - \theta^2}}{\sqrt{(\theta - \Psi_1)(\theta - \Psi_2)} [(\rho_2^2 - \rho_1^2)\theta^2 + \rho_1^2 \alpha^2]} \times \left[ \frac{\rho_2}{\theta M_1 - 1} + \frac{\rho_1 + \rho_2 M_1 \theta}{1 + M_1^2(\alpha^2 - \theta^2)} \right] d\theta, \quad R > c_1 t,$$

где учтено, что (24) и (25) можно записать в виде

$$V_1(\theta) = \frac{\rho_2^2 \theta / M_1 - \rho_1^2 (\alpha^2 - \theta^2)}{(\rho_2^2 - \rho_1^2)\theta^2 + \rho_1^2 \alpha^2} - i \frac{\rho_1 \rho_2 \sqrt{\alpha^2 - \theta^2} (\theta + 1/M_1)}{(\rho_2^2 - \rho_1^2)\theta^2 + \rho_1^2 \alpha^2}, \quad (24')$$

$$W_1(\theta) = \frac{M_1 \rho_2 [\rho_2 \theta - \rho_1 M_1 (\alpha^2 - \theta^2)]}{[1 + M_1^2 (\alpha^2 - \theta^2)] [(\rho_2^2 - \rho_1^2) \theta^2 + \rho_1^2 \alpha^2]} \quad (25')$$

$$- i \frac{M_1 \rho_2 (\rho_1 + M_1 \rho_2 \theta) \sqrt{\alpha^2 - \theta^2}}{[1 + M_1^2 (\alpha^2 - \theta^2)] [(\rho_2^2 - \rho_1^2) \theta^2 + \rho_2^2 \alpha^2]} .$$

Выражение (30) соответствует боковой волне, время прихода которой в точку наблюдения определяется из условия  $[\theta] \psi_1 = \alpha$ , или

$$t_{\text{бок}} = \cos(\delta - \theta_0) \frac{R}{c_1}, \quad \frac{|z|}{R} < \cos \theta_0. \quad (31)$$

Как следует из (30), боковая волна существует в интервале времени  $t_{\text{бок}} < t < R/c_1$ .

Если  $R < c_1 t$  (в точку наблюдения пришла сферическая волна), то, как и в случае  $\psi_1 > \alpha$ , можно под интегралами (23) перейти к пределу  $\lambda \rightarrow 0$ . Из представлений (24'), (25') функций  $V_1(\theta)$  и  $W_1(\theta)$  следует, что наличие разреза  $(-\alpha, \alpha)$  не существенно для тех слагаемых в подынтегральном выражении (23), которые содержат  $\text{Re } V_1(\theta)$  и  $\text{Re } W_1(\theta)$ . Для них результат интегрирования аналогичен (29). Члены, пропорциональные  $\text{Im } V_1(\theta)$  и  $\text{Im } W_1(\theta)$  под интегралами в (23), содержат корни  $\sqrt{\theta^2 - \alpha^2}$ , знаки которых различны при  $\text{Im } \theta > 0$  и  $\text{Im } \theta < 0$ . Соответствующая часть потенциала  $\varphi_1^{(2)}$  дается интегралом вида (30). Таким образом, для потенциала переходного излучения при  $R < c_1 t$  получаем

$$\varphi_{1tr}^{(2)} = \varphi_{11}^{(2)} + \varphi_{12}^{(2)}, \quad (32)$$

где

$$\varphi_{11}^{(2)} = \frac{i Q N(t - R/c_1)}{4\pi^2 R M_1} \oint_{L(\psi_1, \psi_2)} \frac{\theta}{e_1(\theta)} \left[ \frac{\text{Re } V_1(\theta)}{\rho_1 (\theta^2 - 1/M_1^2)} + \frac{\text{Re } W_1(\theta)}{\rho_2} \right] d\theta, \quad (33)$$

$$\varphi_{12}^{(2)} = \frac{Q N(\alpha - \text{Re } \psi_1)}{2\pi^2 R} \int_{\alpha}^{\psi_1} \frac{\theta \sqrt{\alpha^2 - \theta^2}}{\sqrt{(\theta - \psi_1)(\theta - \psi_2) [(\rho_2^2 - \rho_1^2) \theta^2 + \rho_1^2 \alpha^2]}} d\theta \quad (34)$$

$$\times \left\{ \rho_2 / (\theta M_1 - 1) + (\rho_1 + \rho_2 M_1 \theta) / [1 + M_1^2 (\alpha^2 - \theta^2)] \right\} d\theta + \text{к.с.}$$

Вычислить интегралы (29), (30), (33), (34) аналитически при произвольных координатах точки наблюдения не удастся. В связи с этим ниже будут рассмотрены асимптотики полей переходного излучения вблизи фронтов сферической и боковой волн, а также получены точные аналитические результаты для частных случаев точек наблюдения, находящихся на траектории источника ( $\rho = 0$ ) и на границе раздела сред ( $z=0$ ).

Вблизи фронта сферической волны, где  $R \approx c_1 t$  и  $\psi_1 \approx \psi_2 \approx |z|/R$ , так что  $e_1(\theta) \approx \theta - |z|/R$ , потенциал переходного излучения  $\varphi_{1tr}^{(2)}$  (29) пропорционален вычету в полюсе  $\theta = |z|/R$  и равен

$$\varphi_{1tr}^{(2)} = - \frac{QH(t-R/c_1)|z|}{2\pi R^2 M_1} \left[ \frac{V_1(|z|/R)}{\rho_1 \left( \frac{z^2}{R^2} - \frac{1}{M_1^2} \right)} + \frac{W_2(|z|/R)}{\rho_2} \right]. \quad (35)$$

Из (35) следует, что возмущение давления в звуковой волне в области углов, меньших угла полного внутреннего отражения, имеет вид дельта-импульса:

$$p_{1tr}^{(2)} = \frac{Q \delta(t-R/c_1)|z|}{2\pi R^2 M_1} \left[ \frac{V_1(|z|/R)}{z^2/R^2 - 1/M_1^2} + \frac{W_2(|z|/R)}{\pi} \right], \quad (36)$$

где  $\pi = \frac{\rho_2}{\rho_1}$  - отношение плотностей сред.

Аналогичный результат был получен в работе [4] с использованием метода перевала.

В области углов, превышающих угол полного внутреннего отражения, вблизи фронта сферической волны также существует часть поля, пропорциональная дельта-импульсу (она определяется потенциалом  $\varphi_{11}^{(2)}$  в (32)), однако кроме этого есть звуковая волна, даваемая потенциалом  $\varphi_{12}^{(2)}$ . Рассмотрим асимптотику этой волны при  $R \approx c_1 t$ . Запишем входящий под интеграл (34) корень  $\sqrt{(\theta - \psi_1)(\theta - \psi_2)}$  в виде  $\sqrt{(\theta - |z|/R)^2 + \gamma^2}$ , где  $\gamma^2 = (\rho^2/R^2)(c_1^2 t^2/R^2 - 1) > 0$ . Поскольку вблизи фронта сферической волны основной вклад в интеграл (34) даст область  $\theta \approx \psi_1 \approx \frac{|z|}{R}$ , то в (34) можно везде, кроме выписанного выше корня, положить  $\theta \approx \psi_1$ , так что

$$\varphi_{12}^{(2)} \approx \frac{Q \psi_1 \sqrt{d^2 - \psi_1^2}}{\pi^2 R \left[ (\rho_2^2 - \rho_1^2) \psi_1^2 + \rho_1^2 d^2 \right]} \times \left[ \frac{\rho_2}{\psi_1 M_1 - 1} + \frac{\rho_1 + \rho_2 M_1 \psi_1}{1 + M_1^2 (d^2 - \psi_1^2)} \right] \int_{d-\psi_1}^{\psi_1} \frac{d\theta}{\sqrt{(\theta - |z|/R)^2 + \gamma^2}}. \quad (37)$$

Интеграл в (37) является табличным. При  $R \rightarrow c_1 t$  он приближенно равен

$$\int_{\alpha}^{\psi_1} \frac{d\theta}{\sqrt{(\theta - |z|/R)^2 + y^2}} \approx \ln \left( \frac{\rho}{R} \sqrt{\frac{c_1^2 t^2}{R^2} - 1} \right).$$

Аналогично может быть вычислено поле боковой волны при  $R \geq c_1 t$  (см. (30)). Таким образом, поле переходного излучения в области углов, больших угла полного внутреннего отражения, при  $R \approx c_1 t$  имеет следующий вид:

$$P = P_{11} + P_{12},$$

где

$$P_{11} = \frac{Q |z| \delta(t - R/c_1)}{2\pi R^2 M_1} \left[ \frac{\operatorname{Re} V_1(|z|/R)}{z^2/R^2 - 1/M_1^2} + \frac{\operatorname{Re} W_2(|z|/R)}{m} \right],$$

$$P_{12} = - \frac{Q \rho_1 |z| \sqrt{d^2 - z^2/R^2}}{2\pi^2 R^2 [(p_2^2 - p_1^2)(z^2/R^2) + p_1^2 d^2]} \times$$

$$\times \left[ \frac{\rho_2}{|z| M_1/R - 1} + \frac{\rho_1 + \rho_2 M_1 |z|/R}{1 + M_1^2 (d^2 - z^2/R^2)} \right] \cdot \frac{1}{t - R/c_1}. \quad (38)$$

Из (38) следует, что вблизи фронта сферической волны поле давления содержит кроме дельта-импульса распределенное возмущение, пропорциональное  $(t - R/c_1)^{-1}$ . Поскольку  $P_{12}$  убывает с расстоянием от точки пересечения источником границы раздела сред как  $R^{-1}$ , то вклады  $P_{11}$  и  $P_{12}$  в поле переходного излучения равноправны.

Результат (38) может быть получен также с помощью метода перевала. Из этого утверждения следует, что метод перевала даёт правильный результат вблизи фронта сферической волны, т.е. при условии  $|R - c_1 t| \ll R$ .

Рассмотрим теперь поле боковой волны вблизи её переднего фронта, когда  $d \approx \psi_1$ . В этом случае под интегралом (30) везде, кроме корней  $\sqrt{d - \theta}$  и  $\sqrt{\theta - \psi_1}$ , можно положить  $\theta = d$ , так что

$$\psi_{1 \text{бок}}^{(2)} \approx \frac{Q \sqrt{2} H(d - \psi_1) H(R/c_1 - t)}{\pi^2 R \rho_2 \sqrt{d(d - \psi_2)}} \left( \frac{1}{d M_1 - 1} + \frac{1}{m} + M_1 d \right) I_1, \quad (39)$$

где

$$I_1 = \int_{\alpha}^{\psi_1} \frac{\sqrt{\alpha - \theta}}{\sqrt{\theta - \psi_1}} d\theta.$$

Вычислим входящий в (39) интеграл  $I_1$ . Переходя на комплексную плоскость  $\theta$  видим, что искомым интеграл  $I_1$  связан с интегралом по берегам разреза, проведенного по оси  $\text{Re } \theta$  от точки  $\theta = \psi_1$  до точки  $\theta = \alpha$ , соотношением

$$I_1 = \frac{1}{2i} \oint \frac{\sqrt{\theta - \alpha}}{\sqrt{\theta - \psi_1}} d\theta. \quad (40)$$

Интеграл (40) легко вычислить, растянув контур интегрирования на бесконечность. В результате будем иметь для  $I_1$  следующее значение:

$$\int_{\alpha}^{\psi_1} \frac{\sqrt{\alpha - \theta}}{\sqrt{\theta - \psi_1}} d\theta = \frac{\pi}{2} (\psi_1 - \alpha). \quad (41)$$

Подставляя (41) в (39), получаем выражение для потенциала боковой волны вблизи её переднего фронта:

$$\varphi_{1\text{бок}}^{(2)} = \frac{Q(\psi_1 - \alpha) N(\alpha - \psi_1) N(R/c_1 - t)}{2\pi R \rho_2 \sqrt{\alpha} \sqrt{\frac{\rho}{R} \sqrt{1 - c_1^2 t^2 / R^2}}} \left( \frac{1}{\alpha M_1 - 1} + \frac{1}{\pi} + M_1 \alpha \right). \quad (42)$$

Кроме рассмотренных выше асимптотик поля переходного излучения вблизи фронтов сферической и боковой волн в ряде частных случаев удастся получить точные аналитические результаты. Так, на траектории движения источника, где

$$\beta = 0, \quad \psi_1 = \psi_2 = c_1 t / |z|, \quad \text{из (29) имеем}$$

$$\varphi_{1\text{tr}}^{(2)} = - \frac{QN(t - R/c_1)\psi_1}{2\pi |z| \rho_1 M_1} \left[ \frac{V_1(\psi_1)}{\psi_1^2 - 1/M_1^2} + \frac{W_1(\psi_1)}{\pi} \right]. \quad (43)$$

Вблизи фронта сферической волны, когда  $\psi_1 \approx 1$ , поле давления, определяемое потенциалом (43), представляет собой дельта-импульс, что согласуется с (36).



Перейдем к рассмотрению волнового поля на границе раздела сред. Точные аналитические выражения для переходного излучения при  $z = 0$  могут быть получены в случае медленного движения источника. Полагая в (30)  $z = 0$ ,  $M_1 \ll 1$ , для поля боковой волны будем иметь выражение

$$\varphi_{\text{бок}}^{(2)} = \frac{Q(1-m)H(\alpha-\varphi_1)H(R/c_1-t)}{\pi^2 R \rho_1} \int_{\alpha}^{\varphi_1} \frac{\theta \sqrt{\alpha^2 - \theta^2} d\theta}{[(m^2-1)\theta^2 + \alpha^2] \sqrt{\theta^2 - \varphi_1^2}} \quad (44)$$

Остановимся на вычислении интеграла

$$I_2 = \int_{\alpha}^{\varphi_1} \frac{\theta \sqrt{\alpha^2 - \theta^2} d\theta}{[(m^2-1)\theta^2 + \alpha^2] \sqrt{\theta^2 - \varphi_1^2}} \quad (45)$$

Введём вспомогательный интеграл

$$\Omega = \oint_{C(\alpha, \varphi_1)} \frac{\theta \sqrt{\theta^2 - \alpha^2} d\theta}{[(m^2-1)\theta^2 + \alpha^2] \sqrt{\theta^2 - \varphi_1^2}}, \quad (46)$$

$C(\alpha, \varphi_1)$

где контур интегрирования  $C(\alpha, \varphi_1)$  охватывает разрезы, проведённые между точками  $\theta = -\alpha$ ,  $\theta = -\varphi_1$  и  $\theta = \varphi_1$ ,  $\theta = \alpha$  (р и с. 3). Аналитическая функция  $f(\theta) = \sqrt{\theta^2 - \alpha^2}$  определена следующим образом:

$$f(\theta) = \begin{cases} \sqrt{\theta^2 - \alpha^2} > 0, & \theta > \alpha \\ i \sqrt{\alpha^2 - \theta^2} \operatorname{sign} \operatorname{Im} \theta, & -\alpha < \theta < \alpha \\ -\sqrt{\theta^2 - \alpha^2} < 0, & \theta < -\alpha \end{cases} \quad (47)$$

Аналитическая функция  $\sqrt{\theta^2 - \varphi_1^2}$  определена аналогично. Из (47) следует, что справедливо равенство  $\Omega = 4i I_2$ .

Растянем контур интегрирования  $C(\alpha, \varphi_1)$  в (46) на бесконечность. При этом необходимо учесть вклад полюсов  $\theta_p = \pm \frac{\alpha}{\sqrt{m^2-1}}$ . Интеграл по окружности бесконечно большого радиуса легко вычислить, устремляя в подынтегральном выражении  $\theta$  к бесконечности. После проведения необходимых выкладок для потенциала боковой волны при  $z = 0$  будем иметь

следующее выражение:

$$\varphi_{1\text{бок}}^{(2)} = - \frac{Q(\sqrt{\alpha^2 + (m^2 - 1)\psi_1^2} - \alpha m) H(\alpha - \psi_1) H(R/c_1 - t)}{2\pi R \rho_1 (1+m) \sqrt{\alpha^2 + (m^2 - 1)\psi_1^2}}. \quad (48)$$

Выражение для потенциала сферической волны на границе раздела сред может быть получено аналогичным способом. При  $z = 0$  (23) принимает вид

$$\varphi_1^{(2)} = \frac{Q i}{4\pi^2 R M_1 \rho_1} \oint_{L_\theta} \frac{\theta}{\sqrt{\theta^2 + \psi^2}} \left[ \frac{V_1(\theta)}{\theta^2 - \frac{1}{M_1^2}} + \frac{W_1(\theta)}{m} \right] d\theta, \quad (49)$$

где

$$\psi = \frac{\rho}{R} \sqrt{c_1^2 t^2 / R^2 - 1}.$$

Растянем контур интегрирования  $L_\theta$  на бесконечность. При этом необходимо учесть интеграл по берегам разреза, проведенного между точками ветвления  $\theta = \pm \alpha$  и вычеты в тех полюсах подынтегрального выражения в (49), которые затрагиваются при деформации контура интегрирования. Это будет полюс  $\theta = -\frac{1}{M_1}$  в первом и  $\theta = -\frac{1}{M_1} \sqrt{1 + \alpha^2 M_1^2}$  во втором из входящих в квадратные скобки в (49) слагаемых. Других полюсов функции  $V_1(\theta)$  и  $W_1(\theta)$ , записанные в виде (24), (25), не имеют. \*

Нетрудно показать, что интеграл по бесконечно удаленному контуру равен нулю. Интеграл по берегам разреза  $(-\alpha, \alpha)$  в общем случае вычислить не удастся, однако при медленном движении источника,  $M_1 \ll 1$ , этот интеграл обращается в нуль, поскольку подынтегральная функция нечетна, а пределы интегрирования симметричны. После несложных расчетов для потенциала  $\varphi_1^{(2)}$  при  $z = 0$  получаем

$$\varphi_1^{(2)} = \frac{Q(m-1)}{4\pi R \rho_1 (m+1)} \left[ H\left(t - \frac{R}{c_1}\right) - H\left(\frac{R}{c_1} - t\right) \right]. \quad (50)$$

\* ) Функции  $V_1(\theta)$  и  $W_1(\theta)$ , представленные в виде (24'), (25'), имеют полюса  $\theta = \pm \frac{\alpha}{\sqrt{m^2 - 1}}$ . Сумма соответствующих вычетов равна нулю.

Из (48) и (50) следует, что поле давления на границе раздела сред описывается выражением

$$p = - \frac{Q c_1^2 t m \alpha (m-1) H(t - R/c_2) H(R/c_1 - t)}{2\pi R^3 [\alpha^2 + (m^2 - 1)\psi_1^2]^{3/2}}. \quad (51)$$

Таким образом, акустическое возмущение при  $z = 0$  существует в интервале времени  $R/c_2 < t < R/c_1$  и не содержит сосредоточенного сферического импульса. Действительно, пересекающий границу раздела сред источник во многом аналогичен звуковому излучателю, находящемуся на границе. Для последнего отраженная сферическая волна при  $z = 0$  повторяет форму падающей волны с коэффициентом отражения [6]

$$V_{\text{отр}}(\delta = \pi/2) = -1 \quad (52)$$

так, что фактически на границе существует только боковая волна. Амплитуда давления в (51) убывает обратно пропорционально квадрату расстояния,

$$p \sim R^{-2}. \quad (53)$$

При произвольной дозвуковой скорости источника интегралы (23) могут быть оценены численно. Для этого необходимо растянуть контур интегрирования  $L_\theta$  на бесконечность. Интеграл по окружности бесконечно большого радиуса и вычеты в затрагиваемых при деформации контура полюсах вычисляются аналитически. Численный расчет необходим лишь для интеграла по берегам разреза, соединяющего точки ветвления  $\theta = \pm \alpha$ , причем подынтегральная функция является действительной и не имеет особенностей внутри отрезка интегрирования.

Рассмотрим переходное излучение во второй среде,  $z > 0$ . Делая в интеграле (9) замену  $\omega = c_2 x', x = x'$  и поступая далее так же, как при рассмотрении поля в полупространстве  $z < 0$ , представим выражение для потенциала  $\varphi_2^{(2)}$  в виде

$$\varphi_2^{(2)} = \frac{iQ}{4\pi^2 R \rho_2 M_2} \oint_{L_\theta} \frac{\theta}{e_2(\theta)} \left[ \frac{V_2(\theta)}{\theta^2 - \beta^2} - \frac{W_2(\theta)}{\theta^2 - 1/M_2^2} \right] d\theta, \quad (54)$$

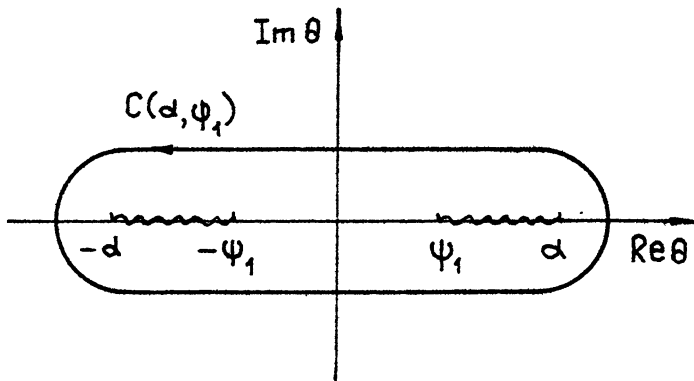


Рис 3. Контур интегрирования  $C(\alpha, \psi_1)$ .  
Разрезы показаны волнистыми линиями.

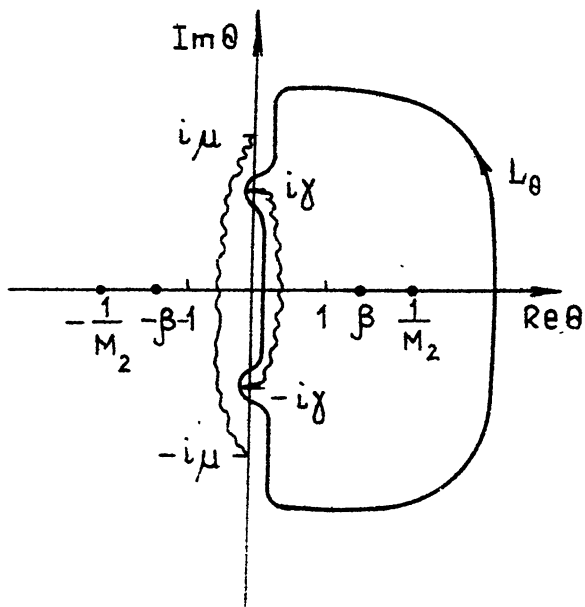


Рис 4. Контур интегрирования  $L_\theta$  и особые точки  
подынтегрального выражения (58)<sup>θ</sup>

где

$$e_2(\theta) = \sqrt{(\theta - \psi_3)(\theta - \psi_4) + q(\lambda)},$$

$$q(\lambda) = -\frac{2i\lambda}{R^2} \sqrt{1 - \theta^2} (c_2 t - \theta z),$$

$$\psi_{3,4} = \frac{1}{R^2} (c_2 t z \pm \rho \sqrt{R^2 - c_2^2 t^2}),$$

$$V_2(\theta) = \frac{\rho_2 (1/M_2 + \sqrt{\theta^2 + \mu^2})}{\rho_1 \theta + \rho_2 \sqrt{\theta^2 + \mu^2}},$$

$$W_2(\theta) = \frac{\rho_1 \frac{1}{M_2} + \rho_2 \sqrt{\theta^2 + \mu^2}}{\rho_1 \theta + \rho_2 \sqrt{\theta^2 + \mu^2}},$$

$$\mu^2 = \frac{1}{n^2} - 1 > 0, \quad \beta^2 = 1 + \frac{1}{n^2} \left( \frac{1}{M_1^2} - 1 \right) > 0.$$

Контур интегрирования  $L_\theta$  имеет вид, аналогичный показанному на рис. 2.

Если  $c_2 t < z$ , то аналитическая функция  $e_2(\theta)$  не имеет точек ветвления на выбранном листе римановой поверхности, и значение интеграла (54) определяется полюсами  $\theta = 1/M_2$  и  $\theta = \beta$ . Это отражает тот факт, что в области пространства, куда ещё не пришло переходное излучение, существует только статическое поле, определяемое потенциалом

$$\varphi_{2st} = -\frac{Q}{4\pi R^2 \rho_2 M_2} \left[ \frac{V_2(\beta)}{\sqrt{(\beta - \psi_3)(\beta - \psi_4)}} - \frac{W_2\left(\frac{1}{M_2}\right)}{\sqrt{(1/M_2 - \psi_3)(1/M_2 - \psi_4)}} \right]. \quad (55)$$

Если  $z < c_2 t$ , то рассмотрение, аналогичное проведенному выше для среды  $z < 0$ , показывает, что вблизи фронта сферической волны,  $c_2 t \approx R$ , переходное излучение представляет собой дельта-импульс:

$$\rho_{2tr} \approx -\frac{Qz}{4\pi R^2 \rho_2 M_2} \left[ \frac{V_2(z/R)}{z^2/R^2 - \beta^2} - \frac{W_2(z/R)}{z^2/R^2 - 1/M_2^2} \right] \delta\left(t - \frac{R}{c_2}\right). \quad (56)$$

Для точек наблюдения, лежащих на траектории движения источника ( $\rho = 0$ ,  $\psi_3 = \psi_4 = c_2 t / z$ ), интеграл (54) вычисляется точно и потенциал переходного излучения дается выражением.

$$\psi_{2tr} = - \frac{QH(t-R/c_2)\psi_3}{2\pi R\rho_2 M_2} \left[ \frac{V_2(\psi_3)}{\psi_3^2 - \beta^2} - \frac{W_2(\psi_3)}{\psi_3^2 - 1/M_2^2} \right]. \quad (57)$$

Вблизи фронта звуковой волны,  $\psi_3 \approx 1$ , из (57) можно получить для давления результат, аналогичный (56).

В случае медленного движения источника,  $M_2 < M_1 \ll 1$ , точные аналитические результаты могут быть получены для полей на границе раздела сред. При  $z = 0$  (54) удобно переписать в виде

$$\psi_2^{(2)} = \frac{iQ}{4\pi^2 R\rho_2 M_2} \oint \frac{\theta}{\sqrt{\theta^2 + \chi^2}} \left[ \frac{V_2(\theta)}{\theta^2 - \beta^2} - \frac{W_2(\theta)}{\theta^2 - 1/M_2^2} \right] d\theta, \quad (58)$$

где  $\chi^2 = c_2^2 t^2 / \rho^2 - 1$ . Особые точки подынтегрального выражения (58) показаны на рис. 4. Ими являются полюса  $\theta = \beta$  и  $\theta = 1/M_2$  и разрезы, соединяющие точки ветвления  $\theta = \pm i\chi$  и  $\theta = \pm i\mu$ . Вклад вычетов в полюсах  $\theta = \beta$ ,  $\theta = 1/M_2$  в пределе  $M_2 \rightarrow 0$  равен

$$\psi = - \frac{Q(m-1)}{4\pi R\rho_2(1+m)}. \quad (59)$$

Для потенциала  $\psi_\chi$ , даваемого интегралом по контуру  $C_\chi$ , охватывающему разрез  $(-i\chi, i\chi)$ , при  $M_2 \rightarrow 0$  имеем

$$\psi_\chi = \frac{iQH(t-R/c_2)}{4\pi^2 R\rho_2(1+m)} (I_3 - mI_4), \quad (60)$$

где

$$I_3 = \oint_{C_\chi} \frac{\theta^2 d\theta}{\sqrt{\theta^2 + \chi^2}(\theta^2 + m^2\mu^2/(m^2-1))},$$

$$I_4 = \oint_{C_\gamma} \frac{\theta \sqrt{\theta^2 + \mu^2} d\theta}{\sqrt{\theta^2 + \gamma^2} \left( \theta^2 + \frac{m^2 \mu^2}{m^2 - 1} \right)}.$$

При вычислении интегралов в (60) необходимо рассмотреть два случая:

$$\gamma < \mu \quad \text{или} \quad R > c_1 t, \quad \text{и} \quad \gamma > \mu \quad \text{или} \quad R < c_1 t.$$

В первом случае  $I_4 = 0$  вследствие нечётности подынтегральной функции. Интеграл  $I_3$  легко вычислить, растягивая контур интегрирования на бесконечность. В результате для потенциала  $\varphi_\gamma$  получаем

$$\varphi_\gamma = -\frac{Q}{2\pi R \rho_2 (1+m)} \left[ 1 - \frac{m\mu}{\sqrt{m^2(\mu^2 - \gamma^2) + \gamma^2}} \right] H\left(\frac{R}{c_1} - t\right) H\left(t - \frac{R}{c_2}\right). \quad (61)$$

Если  $\gamma > \mu$ , то значение интеграла  $I_4$  отлично от нуля:

$$I_4 = 2\pi i, \quad I_3 = 2\pi i$$

и результат интегрирования в (60) имеет вид

$$\varphi_\gamma = \frac{Q(m-1) H\left(t - \frac{R}{c_1}\right)}{2\pi R \rho_1 (1+m)m}. \quad (62)$$

Таким образом, полученные выражения для потенциалов на границе раздела сред при  $z = +0$  (59), (61), (62) и при  $z = -0$  (48), (51), (52) удовлетворяют граничному условию (3).

## II. Излучение сверхзвукового источника

Перейдем к случаю сверхзвукового движения источника. Вначале рассмотрим кратко излучение звуковых волн источником, движущимся в безграничной среде. Из (7) следует, что при  $M_{1,2} > 1$  потенциал источника массы и возмущение давления даются выражениями

$$\psi_{1,2}^{(1)} = - \frac{Q}{2\pi \rho_{1,2} \sqrt{(z-ut)^2 - \rho^2(M_{1,2}^2 - 1)}} , \quad (63)$$

$$\rho_{1,2}^{(1)} = \frac{Q v (z-ut)}{2\pi [(z-ut)^2 - \rho^2(M_{1,2}^2 - 1)]^{3/2}} , \quad (64)$$

причём поле отлично от нуля только в пределах конуса, определяемого условием

$$\rho < \frac{vt - z}{\sqrt{M_{1,2}^2 - 1}}$$

(конус Маха). На самом конусе, при  $\rho = \frac{vt - z}{\sqrt{M_{1,2}^2 - 1}}$ , поле точечного источника обращается в бесконечность. Используя в интеграле (7) замену (10), можно показать, что для источника вида  $\frac{\lambda}{2\pi(\lambda^2 + \rho^2)^{3/2}} \delta(z-ut)$ , имеющего конечные размеры в плоскости, перпендикулярной направлению движения, давление на конусе Маха конечно и пропорционально  $\lambda^{-3/2}$ .



Займёмся теперь вычислением потенциала  $\psi_1^{(2)}$  (23). Сразу отметим, что при  $M_I > I$  второй из входящих в (23) интегралов может быть проанализирован так же, как в случае  $M_I < I$ . Изменения, связанные с перемещением полюса  $\theta = \frac{I}{M_I}$  из области  $\text{Re } \theta > 1$  в интервал

$0 < \text{Re } \theta < 1$  (р и с. 5), касаются лишь первого интеграла в (23):

$$I = \oint_{L_\theta} \frac{\theta V_1(\theta) d\theta}{\left(\theta^2 - \frac{1}{M_1^2}\right) e_1(\theta)}. \quad (65)$$

Вычислим интеграл (65). Для определённости сначала будем полагать  $d < 1/M_1$ . Это неравенство означает, что угол падения волны Маха,  $\chi = \pi/2 - \theta_M$ ,  $\theta_M = \arcsin \frac{1}{M_1}$ , меньше угла полного внутреннего отражения  $\theta_0 = \arcsin n$ . При  $|z| > c_1 t$  подынтегральное выражение не имеет особых точек внутри контура интегрирования  $L_\theta$ , так что  $I = 0$ . В случае  $|z| < c_1 t$  аналитическая функция  $e_1(\theta)$  имеет точки ветвления  $\theta_{1,2}$ , даваемые выражением (27). При  $t < R/c_1$ , т.е. до момента прихода сферической волны, интеграл (65) отличен от нуля только, когда  $\psi_1 < 1/M_1$ . При этом воз-

можны две ситуации:  $d < \psi_1$  и  $d > \psi_1$ . Остановимся на первой из них. Контур интегрирования  $L_\theta$  стянем к разрезу, соединяющему точки ветвления  $\theta_1$  и  $\theta_2$ . В пределе  $\lambda \rightarrow 0$  эти точки становятся сколь угодно близкими, а разрез  $(-I, I)$  можно опустить. Полюс  $\theta = \frac{1}{M_1}$ , таким образом, оказывается дважды охваченным замкнутыми контурами интегрирования, между которыми проходит кольцевой разрез. Поскольку внутри этого разреза корень  $e_1(\theta)$  меняет знак, а внутренний контур интегрирования имеет обратное направление обхода, то можно опустить разрез и считать, что полюс дважды обходится в положительном направлении. В результате получим

$$I = 2\pi i \frac{V_1(1/M_1)}{e_1(1/M_1)}. \quad (66)$$

Если  $\psi_1 < \alpha$ , то к (66) следует добавить интеграл по берегам разреза  $(-\alpha, \alpha)$ , соответствующий боковой волне

$$I_6 = 4i \int_{\alpha}^{\psi_1} \frac{\theta \operatorname{Im} V_1(\theta) d\theta}{\left(\theta^2 - \frac{1}{M_1^2}\right) e_1(\theta)}. \quad (67)$$

В случае  $R < c_1 t$  в выражении (23) для  $\psi_1^{(2)}$  можно сразу перейти к пределу  $\lambda \rightarrow 0$ . При этом, как и в (29),

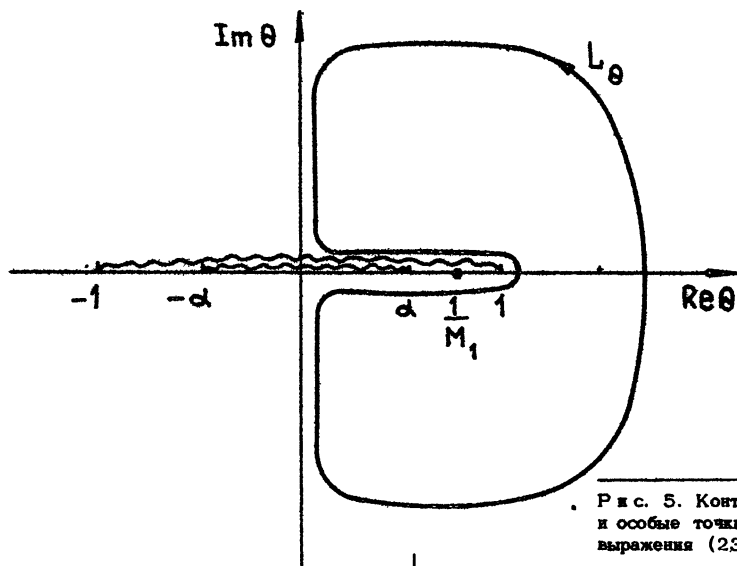
$$I = \oint_{L(\psi_1, \psi_2)} \frac{\theta V(\theta) d\theta}{\left(\theta^2 - \frac{1}{M_1^2}\right) e_1(\theta)}. \quad (68)$$

Выражение (68) может быть легко проанализировано вблизи фронта сферической волны, когда  $t \approx R/c_1$ . При условии  $\operatorname{Re} \psi_{1,2} > 1/M_1$  из (68) получаем

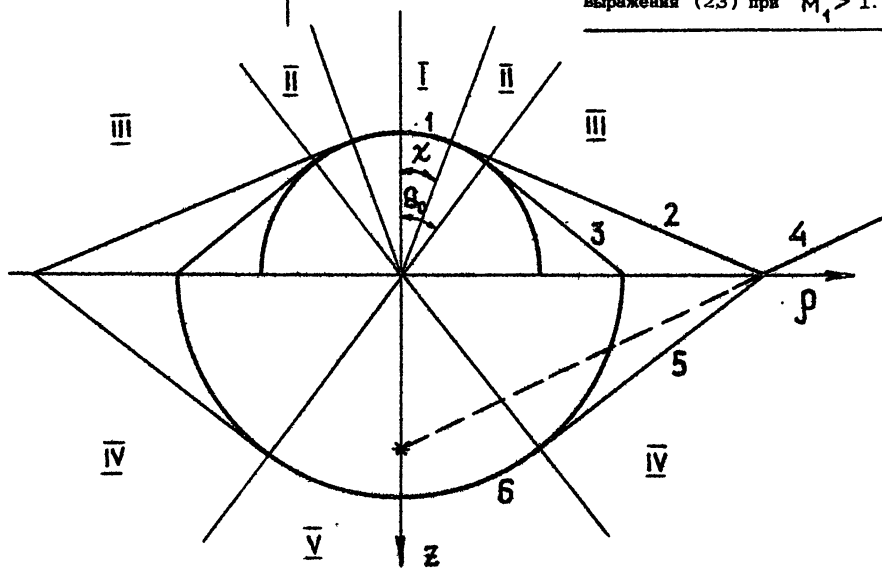
$$I = 2\pi i \frac{|z| V_1\left(\frac{|z|}{R}\right)}{R \left(\frac{z^2}{R^2} - \frac{1}{M_1^2}\right)}, \quad R < c_1 t. \quad (69)$$

Если  $\alpha < \operatorname{Re} \psi_{1,2} < 1/M_1$ , то с учётом дважды обходимого полюса  $\theta = 1/M_1$  имеем

$$I = 2\pi i \frac{|z| V_1(|z|/R)}{R \left(\frac{z^2}{R^2} - \frac{1}{M_1^2}\right)} + 2\pi i \frac{V_1(1/M_1)}{e_1(1/M_1)}. \quad (70)$$



Р и с. 5. Контур интегрирования и особые точки подынтегрального выражения (23) при  $M_1 > 1$ .



Р и с. 6. Картина волновых фронтов при  $\chi < \theta_0$ ,  $M_2 < 1$ . Арабскими цифрами обозначены: 1 – фронт сферической волны при  $z < 0$ , 2 – фронт отраженной волны Маха, 3 – фронт боковой волны, 4 – фронт падающей волны Маха, 5 – фронт преломленной волны Маха, 6 – фронт сферической волны при  $z > 0$ . Звездочкой обозначено положение источника.

Если же  $\operatorname{Re} \psi_{1,2} < \alpha$ , то вблизи фронта сферической волны выражение для  $I$  следует записать в виде

$$I = 2\pi i \left[ \frac{|z| \operatorname{Re} v_1\left(\frac{|z|}{R}\right)}{R \left(\frac{z^2}{R^2} - \frac{1}{M_1^2}\right)} + \frac{v_1\left(\frac{1}{M_1}\right)}{e_1\left(\frac{1}{M_1}\right)} \right] + I_\rho, \quad (71)$$

где

$$I_\rho = 4i \int_{\alpha}^{|z|/R} \frac{\theta \operatorname{Im} v_1(\theta) d\theta}{\left(\theta^2 - \frac{1}{M_1^2}\right) e_1(\theta)} \quad (72)$$

соответствует распределенному возмущению.

При выполнении условия  $1/M_1 < \alpha$  (угол падения волны Маха больше угла полного внутреннего отражения) до момента прихода сферической волны,  $t < R/C_1$ , интеграл (65) отличен от нуля, если  $\psi_1 < \alpha$ . В интервале  $1/M_1 < \psi_1 < \alpha$  значение интеграла дается формулой (67), что соответствует наличию боковой волны. Если в (65)  $\psi_1 < 1/M_1 < \alpha$ , то

$$I = 2\pi i \frac{\operatorname{Re} v_1\left(\frac{1}{M_1}\right)}{e_1\left(\frac{1}{M_1}\right)} + \quad (73)$$

$$+ 4i \int_{\alpha}^{\psi_1} \frac{\theta \operatorname{Im} v_1(\theta) d\theta}{\left(\theta^2 - \frac{1}{M_1^2}\right) e_1(\theta)},$$

где символ  $\int$  означает интеграл в смысле главного значения. Действительно, для членов, пропорциональных  $\operatorname{Re} V_1(\theta)$ , наличие разреза  $(-\alpha, \alpha)$  не существенно и результат получается аналогично (66). Для слагаемых, пропорциональных  $\operatorname{Im} V_1(\theta)$ , необходимо учесть разрез  $(-\alpha, \alpha)$  и полюс  $\theta = 1/M_1$ , лежащий внутри промежутка интегрирования, что и приводит к выражению (73).

После прихода сферической волны вблизи её фронта, когда  $t \geq \frac{R}{C_1}$ , при условии  $\operatorname{Re} \psi_{1,2} > \alpha$  интеграл (65) приближённо дается выражением (69). Если  $1/M_1 < \operatorname{Re} \psi_{1,2} < \alpha$ , то

$$I = 2\pi i \frac{|z| \operatorname{Re} V_1\left(\frac{|z|}{R}\right)}{\frac{z^2}{R^2} - \frac{1}{M_1^2}} + I_p \quad (74)$$

В случае  $\operatorname{Re} \psi_{1,2} < 1/M_1 < \alpha$  результат получается аналогично (71) и (73):

$$I = 2\pi i \left[ \frac{|z| \operatorname{Re} V_1\left(\frac{|z|}{R}\right)}{R \left(\frac{z^2}{R^2} - \frac{1}{M_1^2}\right)} + \frac{\operatorname{Re} V_1\left(\frac{1}{M_1}\right)}{e_1\left(\frac{1}{M_1}\right)} \right] +$$

$$+ 4i \int_{\alpha}^{|z|/R} \frac{\theta \operatorname{Im} V_1(\theta) d\theta}{\left(\theta^2 - \frac{1}{M_1^2}\right) e_1(\theta)} \quad (75)$$

Таким образом, если угол падения волны Маха  $\chi$  меньше угла полного внутреннего отражения  $\theta_0$  ( $\alpha < 1/M_1$ ), то в области  $\operatorname{Re} \psi_{1,2} > 1/M_1$  (область I на рис. 6), где нет боковой волны и отраженной волны Маха, потенциал переходного излучения вблизи фронта сферической волны, как и в случае  $M_1 < 1$ , дается выражением (35).

Соответствующее возмущение представляет собой дельта-импульс.

При условии  $\alpha < \operatorname{Re} \psi_{1,2} < 1/M_1$  (область II на р и с.6) перед сферической звуковой волной в точку наблюдения приходит волна, соответствующая отражённому от границы раздела сред конусу Маха. Потенциал этой волны равен

$$\varphi_M = - \frac{Q V_1 \left( \frac{1}{M_1} \right) H \left( \frac{1}{M_1} - \operatorname{Re} \psi_{1,2} \right)}{2\pi R \rho_1 \sqrt{(1 - M_1 \psi_1)(1 - M_2 \psi_2)}}. \quad (76)$$

Если  $\operatorname{Re} \psi_{1,2} < \alpha < \frac{1}{M_1}$  (область III на р и с. 6), то в точку наблюдения последовательно приходят волна Маха, боковая и сферическая волны. Потенциал боковой волны описывается выражением (30). Сферическая волна в этом случае состоит из сосредоточенного и распределённого возмущений. Их потенциалы даются соответственно выражениями (33) и (34).

Если  $1/M_1 < \alpha$ , т.е. угол падения волны Маха превышает угол полного внутреннего отражения (р и с. 7), то в области I, где  $\operatorname{Re} \psi_{1,2} > \alpha$ , существует только сферическая волна, описываемая потенциалом (35) и имеющая вблизи своего фронта вид дельта-импульса. В области II на р и с. 7, которая соответствует условию  $\frac{1}{M_1} < \operatorname{Re} \psi_{1,2} \leq \alpha$ , сферическая волна состоит из сосредоточенного и распределённого возмущений, описываемых потенциалами (33) и (34). Она приходит в точку наблюдения после боковой волны, потенциал которой дается выражением (30).

В области III на р и с. 7 ( $\operatorname{Re} \psi_{1,2} < \frac{1}{M_1} < \alpha$ ) в точку наблюдения первой приходит боковая волна, описываемая потенциалом

$$\varphi_B = - \frac{Q H(\alpha - \psi_1)}{\pi^2 R M_1} \left[ \frac{1}{\rho_1} \int_{\alpha}^{\psi_1} \frac{\theta \operatorname{Im} V_1(\theta) d\theta}{\left(\theta^2 - \frac{1}{M_1^2}\right) e_1(\theta)} + \right.$$

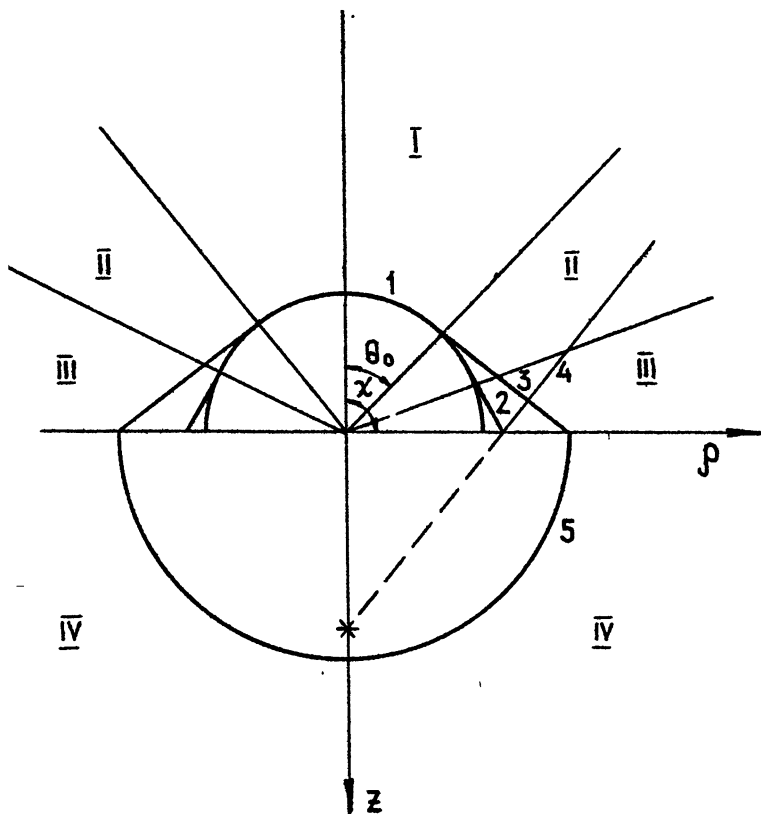


Рис. 7. Картина волновых фронтов при  $\chi > \theta_0$ ,  $M_2 < 1$ . Арабскими цифрами обозначены: 1 - фронт сферической волны при  $Z < 0$ , 2 - фронт отраженной волны Маха, 3 - фронт боковой волны, 4 - фронт падающей волны Маха, 5 - фронт сферической волны при  $Z > 0$ .

$$+ \frac{1}{\rho_2} \int_{\alpha}^{\psi_1} \left[ \frac{\theta \operatorname{Im} W_1(\theta) d\theta}{e_1(\theta)} \right], \quad (77)$$

затем отраженный конус Маха,

$$\psi_M = - \frac{Q \operatorname{Re} V_1\left(\frac{1}{M_1}\right) H\left(\frac{1}{M_1} - \operatorname{Re} \psi_{1,2}\right)}{2\pi R M_1 \rho_1 e_1\left(\frac{1}{M_1}\right)}, \quad (78)$$

и, наконец, сферическая волна. Последняя состоит из сосредоточенного возмущения, описываемого потенциалом (33), и распределённого возмущения, потенциал которого вблизи фронта волны имеет вид

$$\begin{aligned} \psi_P = & - \frac{Q}{\pi^2 R M_1} \left[ \frac{1}{\rho_1} \int_{\alpha}^{|z|/R} \frac{\theta \operatorname{Im} V_1(\theta) d\theta}{\left(\theta^2 - \frac{1}{M_1^2}\right) e_1(\theta)} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{\rho_2} \int_{\alpha}^{|z|/R} \frac{\theta \operatorname{Im} W_1(\theta) d\theta}{e_1(\theta)} \right]. \quad (79) \end{aligned}$$



Асимптотики потенциалов (77), (79) вблизи фронтов сферической и боковой волн могут быть вычислены подобно тому, как это было сделано в случае дозвукового движения источника.

Вычислим поле во второй среде ( $z > C$ ) при  $M_1 > 1$ . Поскольку  $C_1 < C_2$ , то движение источника в полупространстве  $z > 0$  может быть как дозвуковым (если  $1 < M_1 < 1/\mu$ ), так и сверхзвуковым ( $M_1 > 1/\mu$ ).

Рассмотрим вначале ситуацию, когда  $M_2 < 1$ . Если  $z > C_2 t$ , то аналитическая функция  $e_2(\theta)$  не имеет точек ветвления на выбранном листе римановой поверхности. Единственной особой точкой подынтегрального выражения в (54) является полюс  $\theta = 1/M_2$ , вычет в котором соответствует статическому полю движущегося источника

$$\varphi_{2st} = \frac{Q W_2 \left( \frac{1}{M_2} \right)}{4\pi R \rho_2 M_2 e_2 \left( \frac{1}{M_2} \right)} \quad (80)$$

Если  $z < C_2 t < R$ , то функция  $e_2(\theta)$  имеет точки ветвления

$$\theta_{3,4} = \psi_3 \pm i \frac{\lambda}{R} \frac{\sin^2(\Delta - \Delta_1)}{\sin \Delta_1},$$

где  $\Delta = \arccos \frac{z}{R}$ ,  $\Delta_1 = \arccos \frac{C_2 t}{R}$ . Нетрудно видеть, что если угол падения волны Маха в первой среде меньше угла полного внутреннего отражения,  $\chi < \theta_0$  ( $\alpha < 1/M_1$ ), то в знаменателе первого члена под интегралом в выражении (54)  $0 < \beta^2 < 1$ . При условии  $\operatorname{Re} \theta_{3,4} < \beta$  (область IV на р и с. 6) удвоенный вычет в полюсе  $\theta = \beta$  даёт преломлённую волну Маха, описываемую по-

$$\Psi_{M_2} = - \frac{Q V_2(\beta) H(\beta - \Psi_3)}{2\pi R M_2 \rho_2 e_2(\beta)}. \quad (81)$$

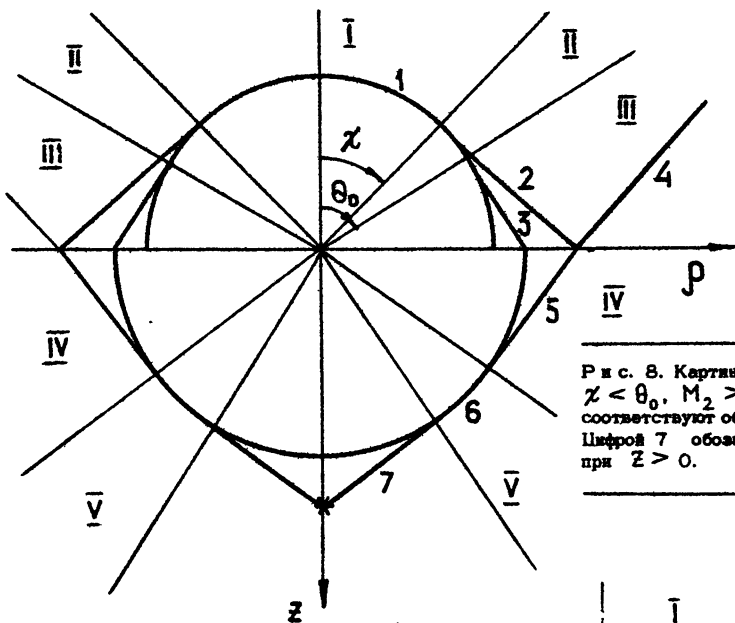
Если угол падения волны Маха больше угла полного внутреннего отражения ( $\alpha > 1/M_1$ ), то в (54)  $\beta^2 < 0$ , и прошедшей волны Маха при  $z > 0$  нет (р и с. 7).

Рассмотрение, аналогичное проведённому выше, показывает, что в полупространстве  $z > 0$  существует сферическая волна представляющая вблизи своего фронта,  $t \approx R/c_2$ , дельта-импульс:

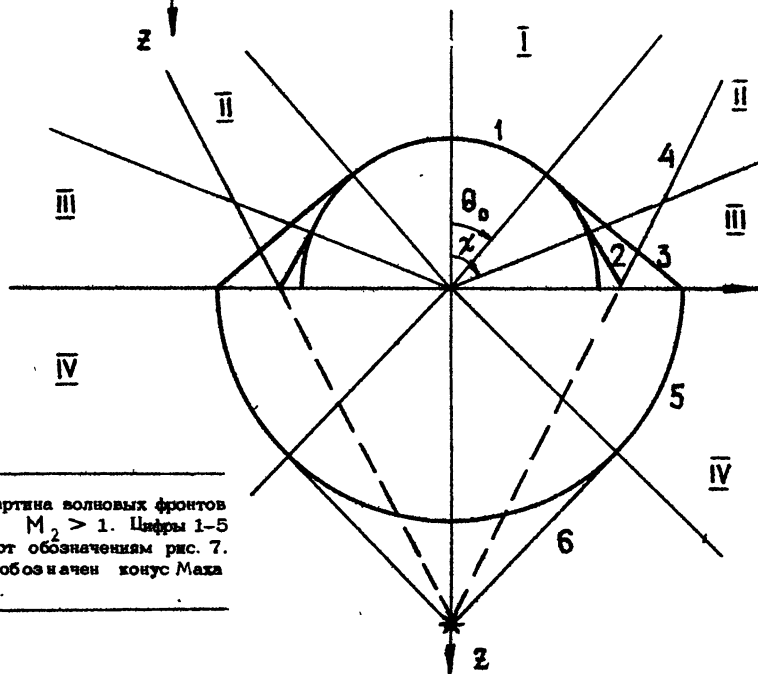
$$P_{2c\phi} = - \frac{Qz}{2\pi R^2 M_2 \rho_2} \left[ \frac{V_2\left(\frac{z}{R}\right)}{\frac{z^2}{R^2} - \beta^2} - \frac{W_2\left(\frac{z}{R}\right)}{\frac{z^2}{R^2} - \frac{1}{M_2^2}} \right] \delta\left(t - \frac{R}{c_2}\right).$$

Если  $M_1 > \frac{1}{n}$ , так что и во второй среде источник движется со сверхзвуковой скоростью,  $M_2 > 1$ , то вместо статического поля  $\Psi_{2st}$  второй член под интегралом (54) при условии  $\text{Re } \Psi_3 < 1/M_2$  даёт волну Маха, описываемую потенциалом

$$\Psi_{2M} = \frac{Q W_2\left(\frac{1}{M_2}\right)}{2\pi R \rho_2 M_2 e_2\left(\frac{1}{M_2}\right)} = \frac{Q}{2\pi \int_2 \sqrt{(z-ut)^2 - \rho^2 (M_2^2 - 1)}}. \quad (82)$$



Р и с. 8. Картина волновых фронтов  $\chi < \theta_0$ ,  $M_2 > 1$ . Цифры 1-6 соответствуют обозначениям рис. 6. Цифрой 7 обозначен конус Маха при  $z > 0$ .



Р и с. 9. Картина волновых фронтов при  $\chi > \theta_0$ ,  $M_2 > 1$ . Цифры 1-5 соответствуют обозначениям рис. 7. Цифрой 6 обозначен конус Маха при  $z > 0$ .

Для получения полной картины волн в полупространстве  $z > 0$  необходимо учесть поле, создаваемое движущимся источником в безграничной среде (формула (63)). При этом в области  $\text{Re} \psi_3 < 1/M_2$  выражения (82) и (63) компенсируют друг друга, так что волна Маха существует только в области  $\rho < \frac{v_1 - z}{\sqrt{M_2^2 - 1}}$ ,  $z > c_2^2 t / v$  (рис. 8, 9).

К переходному излучению, однако, следует относить только сферический сосредоточенный импульс и, при условии  $\chi < \theta_0$ , преломлённую волну Маха.

Итак, если угол падения волны Маха меньше угла полного внутреннего отражения, то во второй среде ( $z > 0$ ) в области IV на рис. 6, 8 ( $\text{Re} \psi_3 < \beta$ ) в точку наблюдения сначала приходит волна, соответствующая преломлённому конусу Маха, а затем сосредоточенный сферический импульс (рис. 6, 8). В области V существует только сферическая волна.

Если угол падения волны Маха больше угла полного внутреннего отражения, то преломлённой волны Маха при  $z > 0$  нет и переходное излучение представляет собой сосредоточенный сферический импульс.

В заключение отметим, что использование методов контурного интегрирования позволяет провести подробное численное исследование переходного акустического излучения при произвольных координатах точки наблюдения и скорости источника. Кроме того, изложенная методика вычисления двойных интегралов Фурье может быть применена при решении более сложной задачи о падении источника массы на границу раздела газ - твёрдое тело и ряда аналогичных проблем в электродинамике.

## Л и т е р а т у р а

1. Гинзбург В.Л., Франк И.М. Излучение равномерно движущегося электрона, возникающее при его переходе из одной среды в другую. - ЖЭТФ, 1946, т. 16, вып. I, с. 15-22.
2. Тер-Микаэлян М.Л. Влияние среды на электромагнитные процессы при высоких энергиях. - Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1969, 457 с.

3. Гинзбург В.Л., Цытович В.Н. Переходное излучение и переходное рассеяние. - М.: Наука, 1984, 360 с.
4. Докучаев В.П. К теории излучения звуковых волн при движении малых тел в газообразных средах. - ЖЭТФ, 1962, т.43, № 2, с. 595 - 604.
5. Коломенский А.А. Переходное излучение звука оптико-акустическим источником. - Препринт ФИАН СССР № 123. М.: 1979, 32 с.
6. Курин В.В., Немцов Б.Е., Эйрман В.Я. Предвестник и боковые волны при отражении импульсов от границы раздела двух сред. - УФН, 1985, т.147, вып. I, с. 157-180.

Дата поступления статьи

27 октября 1986 г

Борис Ефимович Немцов  
Андрей Владимирович Разин  
ИЗЛУЧЕНИЕ ЗВУКА ИСТОЧНИКОМ МАССЫ,  
ПЕРЕСЕКАЮЩИМ ГРАНИЦУ РАЗДЕЛА СРЕД

---

Подписано в печать 28.11.86 г МЦ 01258 Формат 60x84/16  
Бумага множительная Печать офсетная. Объем 2,35 усл печ л.  
Тираж 120 Заказ 4495 Бесплатно

---

Отпечатано на ротатристе ЧИРФИ