

Министерство высшего и среднего специального образования РСФСР

Горьковский ордена Трудового Красного Знамени
научно-исследовательский радиофизический институт (НИРФИ)

П р е п р и н т № 224

ВОЗБУЖДЕНИЕ УПРУГИХ ВОЛН В ТВЕРДОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ
ПОВЕРХНОСТНЫМИ ИСТОЧНИКАМИ

В. П. Докучаев
А. В. Разин

Г о р ь к и й 1 9 8 7

Д о к у ч а е в В.П., Р а з и н А.В.

ВОЗБУЖДЕНИЕ УПРУГИХ ВОЛН В ТВЕРДОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ
ПОВЕРХНОСТНЫМИ ИСТОЧНИКАМИ. Горький, Препринт № 224/
Н И Р Ф И, 1987. - 33 с.

УДК 534.232

С использованием метода преобразований Фурье в интегральном виде получено решение задачи о возбуждении поверхностными силовыми источниками упругих волн в однородном твердом полупространстве. Распределение сил, действующих на поверхность полупространства, произвольным образом зависит от координат и времени. В качестве примера использования полученных общих соотношений приведены расчеты деформации поверхности полупространства под действием равномерно движущейся по ней вертикальной сосредоточенной силовой нагрузки. Для гармонического поверхностного источника типа крутоя, генерирующего только поперечные волны с горизонтальной поляризацией, проведено обобщение полученных результатов на случай упругой системы, содержащей слой, лежащий на полупространстве. Приведены результаты численных исследований мощности излучения объемных SH -волн и поверхностной волны Лява, возникающей в этой системе.

В в е д е н и е

Проблемы распространения волн в упругом полупространстве достаточно подробно рассмотрены в целом ряде работ /1-3/. В меньшей степени исследованы более сложные задачи излучения объемных и поверхностных волн различными источниками. В последнее время интерес к вопросам излучения волн источниками, действующими на поверхности, значительно возрос в связи с различными прикладными задачами сейсмологии и быстрым развитием техники ультразвуковой дефектоскопии промышленных материалов. Еще больший интерес к поверхностным акустическим волнам (ПАВ) проявили специалисты по радиоэлектронике, которые в течение последних двух десятилетий разработали принципиально новые элементы и устройства на основе ПАВ в пьезоэлектрических кристаллах /4, 5/. В связи с этим в настоящей работе рассмотрен ряд вопросов, касающихся возбуждения упругих волн в твердом полупространстве. Приведены примеры решения конкретных задач излучения объемных и поверхностных волн источниками возмущений, действующими на поверхности.

Основной интерес представляют два типа границ твердого тела с другими телами - свободная граница и граница с абсолютно-жестким телом при наличии "склейки" /6/. Математическая модель свободной границы хорошо описывает волновые процессы в упругом полупространстве; граничащем с газом, например, с атмосферой Земли. На свободной плоской границе равны нулю компоненты тензора упругих напряжений σ_{xz} , σ_{yz} , σ_{zz} , где ось Z направлена по нормали к границе. Модель границы упругой среды с абсолютно жестким телом при нали-

чи "склейки" соответствует более простым граничным условиям равенству нулю всех компонент смещения для точек границы. Интересно, что для обеих моделей имеют место поверхностные волны, распространяющиеся вдоль границы раздела. В случае свободной границы поверхностные волны получили название волн Рэлея; вопросы их возбуждения достаточно подробно изложены в работах /7-9/.

Круг интересных физических явлений, связанных с излучением поверхностных волн на границах упругих тел, весьма широк. В настоящей работе мы ограничимся анализом некоторых вопросов излучения поверхностных и объемных волн источниками, находящимися на свободной границе однородного упругого полупространства, а также системы упругий слой, лежащий на упругом полупространстве. Задачи, связанные с излучением волн в таких системах, представляют значительный интерес для сейсмологии и твердотельной электроники.

1. Интегральные выражения для потенциалов смещений

Введем декартову систему координат таким образом, чтобы плоскость xOy совпадала с поверхностью упругого тела. Пусть полупространство $z > 0$ занимает однородная и изотропная твердая среда, свойства которой полностью описываются коэффициентами Ламе λ, μ и плотностью ρ . Уравнение малых смещений $\vec{u}(\vec{r}, t)$ в упругой волне имеет вид

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \text{grad div } \vec{u} + \mu \Delta \vec{u}. \quad (1.1)$$

На свободной границе $z = 0$ компоненты тензора упругих напряжений P_{ik} , действующие на единичную площадку с нормалью по оси z , представим в виде

$$P_{xz} = -f_x(\vec{r}, t), \quad P_{yz} = -f_y(\vec{r}, t), \quad P_{zz} = -f_z(\vec{r}, t). \quad (1.2)$$

Здесь $f(\vec{r}, t)$ - распределение сторонних заданных поверхностных сил, \vec{r} - полярный вектор с компонентами x и y на поверхности $z=0$.

Естественно, что на свободной поверхности при $\xi = 0$ компоненты тензора $\rho_{i\bar{z}}$ ($i = 1, 2, 3$) равны нулю.

Введем для удобства скалярный и векторный потенциалы $\varphi(\vec{R}, t)$, $\vec{a}(\vec{R}, t)$ так, что

$$\vec{u}(\vec{R}, t) = \text{grad } \varphi + \text{rot } \vec{a} \quad (\text{I.3})$$

и условие калибровки

$$\text{div } \vec{a} = 0. \quad (\text{I.4})$$

Из основного уравнения для смещений (I.1) с помощью (I.3) и (I.4) получаем известные уравнения для потенциалов в твердом полупространстве

$$\Delta \varphi - \frac{1}{c_l^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0, \quad (\text{I.5})$$

$$\Delta \vec{a} - \frac{1}{c_t^2} \frac{\partial^2 \vec{a}}{\partial t^2} = 0, \quad (\text{I.6})$$

где введены скорости распространения продольных c_l и поперечных c_t объемных упругих волн

$$c_l = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad c_t = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}. \quad (\text{I.7})$$

В дальнейшем нам потребуются выражения для трех компонент тензора напряжений (I.2) через потенциалы φ и \vec{a} :

$$\rho_{xz} = 2\mu \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) - \rho \frac{\partial^2 a_y}{\partial t^2}, \quad (\text{I.8})$$

$$\rho_{yz} = 2\mu \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) + \rho \frac{\partial^2 a_x}{\partial t^2}, \quad (\text{I.9})$$

$$\rho_{zz} = 2\mu \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) + \lambda \Delta \psi. \quad (I.10)$$

При выводе (I.8)–(I.10) использованы уравнения (I.4) и (I.6) и для удобства исключена компонента Ω_z .

Таким образом сформулирована следующая краевая задача.

Даны волновые уравнения (I.5) и (I.6) с граничными условиями (I.2), (I.8)–(I.10); требуется найти возмущения в упругом полупространстве $z \geq 0$. Будем искать решение задачи с помощью преобразований Фурье. Сторонние источники, действующие на границе, представим в виде

$$\vec{f}(\vec{r}, t) = \int \int \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{F}(\vec{k}, \omega) e^{-i\omega t + i\vec{k}\vec{r}} d\omega d\vec{k} \quad (I.11)$$

с формулой обращения

$$\vec{F}(\vec{k}, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \int \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{f}(\vec{r}, t) e^{i\omega t - i\vec{k}\vec{r}} dt d\vec{r}. \quad (I.12)$$

Здесь $\vec{F}(\vec{k}, \omega)$ – пространственно-временная спектральная плотность внешних сил, действующих на границе, и использованы обозначения $\vec{k}\vec{r} = k_x x + k_y y$, $d\vec{r} = dx dy$, $d\vec{k} = dk_x dk_y$.

Мы воспользуемся следующей формой решений основных уравнений (I.5), (I.6):

$$\psi(\vec{R}, t) = \int \int \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\vec{k}, \omega) \exp[-i\omega t + i(\vec{k}\vec{r} + \alpha_z z)] d\omega d\vec{k}, \quad (I.13)$$

$$\vec{a}(\vec{R}, t) = \int \int \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{A}(\vec{k}, \omega) \exp[-i\omega t + i(\vec{k}\vec{r} + \alpha_z z)] d\omega d\vec{k}, \quad (I.14)$$

где для сокращения записи введены обозначения

$$\mathfrak{K}_l = \sqrt{K_l^2 - K^2} = i \sqrt{K^2 - K_l^2}, \quad (I.15)$$

$$\mathfrak{K}_t = \sqrt{K_t^2 - K^2} = i \sqrt{K^2 - K_t^2}; \quad (I.16)$$

$$K_l = \omega / C_l, \quad K_t = \omega / C_t.$$

Соответствующие листы римановых поверхностей для двузначных функций $\mathfrak{K}_l(\vec{k}, \omega)$ и $\mathfrak{K}_t(\vec{k}, \omega)$ выбраны в соответствии с принципом причинности (условием излучения) - возмущения с малыми поперечными волновыми числами $K = \sqrt{K_x^2 + K_y^2}$ должны иметь вид волн, уходящих от поверхности в область $\vec{z} \rightarrow \infty$, так как источники этих волн действуют на поверхности $\vec{z} = 0$. С другой стороны, возмущения с большими K должны быстро убывать по амплитуде при $\vec{z} \rightarrow \infty$. Перечисленным условиям удовлетворяет выбор соответствующих римановых листов в комплексном пространстве \vec{K} и ω (I.13) - (I.16).

Соотношения (I.13) и (I.14) содержат неизвестные спектральные плотности потенциалов $\Phi(\vec{k}, \omega)$ и $\bar{A}(\vec{k}, \omega)$, которые определяются через спектральные плотности источников возмущений $\bar{F}(\vec{k}, \omega)$ с помощью формул (I.8) - (I.10) и граничных условий (I.2). Таким образом, из перечисленных соотношений получаем систему неоднородных алгебраических уравнений:

$$2K_x \mathfrak{K}_l \Phi - 2K_x (K_y A_x - K_x A_y) - K_t^2 A_y = \mu^{-1} F_x(\vec{k}, \omega), \quad (I.17)$$

$$2K_y \mathfrak{K}_l \Phi - 2K_y (K_y A_x - K_x A_y) + K_t^2 A_x = \mu^{-1} F_y(\vec{k}, \omega), \quad (I.18)$$

$$(\mathfrak{K}_t^2 - K^2) \Phi - 2\mathfrak{K}_t (K_y A_x - K_x A_y) = \mu^{-1} F_z(\vec{k}, \omega). \quad (I.19)$$

Заметим, что спектр z -компоненты $a_z(\vec{R}, t)$ просто связан с $A_x(\vec{k}, \omega)$ и $A_y(\vec{k}, \omega)$ калибровочным соотношением (I.4):

$$\varepsilon_t A_z(\vec{k}, \omega) = -\kappa_x A_x(\vec{k}, \omega) - \kappa_y A_y(\vec{k}, \omega). \quad (I.20)$$

Из соотношений (I.I7) - (I.20) находим спектральные плотности $\Phi(\vec{k}, \omega)$ и $\vec{A}(\vec{k}, \omega)$ как функции спектральной плотности источников $F(\vec{k}, \omega)$, которая считается известной. Подставляя $\Phi(\vec{k}, \omega)$ и $\vec{A}(\vec{k}, \omega)$ в (I.I3) - (I.I4), окончательно получаем

$$\psi(\vec{R}, t) = \frac{1}{\mu} \iiint_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\varepsilon_t \vec{k} \vec{F} + (\varepsilon_t^2 - k^2) F_z}{D(\vec{k}, \omega)} e^{-i\omega t + i(\vec{k} \vec{r} + \varepsilon_t z)} d\omega d\vec{k}, \quad (I.21)$$

$$a_x(\vec{R}, t) = \iiint_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\kappa_x (\kappa_x F_y - \kappa_y F_x)}{\rho \omega^2 k^2} + \kappa_y \frac{(\varepsilon_t^2 - k^2) \vec{k} \vec{F} - 2\varepsilon_t k^2 F_z}{\mu k^2 D(\vec{k}, \omega)} \right] e^{-i\omega t + i(\vec{k} \vec{r} + \varepsilon_t z)} d\omega d\vec{k}, \quad (I.22)$$

$$a_y(\vec{R}, t) = \iiint_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\kappa_y (\kappa_x F_y - \kappa_y F_x)}{\rho \omega^2 k^2} - \kappa_x \frac{(\varepsilon_t^2 - k^2) \vec{k} \vec{F} - 2\varepsilon_t k^2 F_z}{\mu k^2 D(\vec{k}, \omega)} \right] e^{-i\omega t + i(\vec{k} \vec{r} + \varepsilon_t z)} d\omega d\vec{k}, \quad (I.23)$$

$$a_z(\vec{R}, t) = \iiint_{-\infty}^{+\infty} \frac{\kappa_y F_x - \kappa_x F_y}{\rho \omega^2 \varepsilon_t} e^{-i\omega t + i(\vec{k} \vec{r} + \varepsilon_t z)} d\omega d\vec{k}. \quad (I.24)$$

Здесь использованы обозначения $(\vec{k} \vec{F}) = \kappa_x F_x + \kappa_y F_y$ и введена сокращенная запись для детерминанта Рэлея системы (I.I7) - (I.I9):

$$D(\vec{k}, \omega) = (\alpha_t^2 - k^2)^2 + 4k^2 \alpha_t \alpha_{\bar{t}}. \quad (I.25)$$

Интегралы в (I.21) - (I.24) следует рассматривать в комплексном пространстве, состоящем из римановых поверхностей, выбранных в соответствии с правилами (I.15) - (I.16). Точки ветвления

$$K = \pm k_t, \quad K = \pm k_{\bar{t}}. \quad (I.26)$$

связаны с двумя типами нормальных объемных волн в упругом полупространстве. Некоторые из интегралов в (I.21) - (I.23) имеют также полюс $D(\vec{k}, \omega) = 0$, связанный с излучением поверхностной волны Рэлея /I-4/.

Таким образом, в интегральной форме получено полное решение задачи о возбуждении однородного упругого полупространства со свободной плоской границей силовыми источниками, действующими на этой границе.

Из соотношений (I.21) - (I.24) вытекает ряд простых следствий. Во-первых, если распределение источников таково, что силами давления можно пренебречь, $f_z(\vec{r}, t) = 0$, и, следовательно, $F_z(\vec{k}, \omega) = 0$, а распределения $f_x(\vec{r}, t)$, $f_y(\vec{r}, t)$ образуют соленоидальное поле сил на поверхности, то есть $\text{div} \vec{f} = 0$, то распределение этих сил не возбуждает продольные объемные волны ($\varphi = 0$ и $\Phi = 0$) и волны Рэлея (см. (I.21) - (I.23)). В этом случае удобно ввести соленоидальный потенциал $m(\vec{r}, t)$ по формуле

$$\vec{f} = \text{rot}(m(x, y, t) \vec{e}_z) \quad (I.27)$$

где \vec{e}_z - единичный вектор нормали к свободной поверхности. Спектральное представление (I.27) имеет вид

$$\vec{F}(\vec{k}, \omega) = i(\vec{k} \times \vec{e}_z) M(\vec{k}, \omega), \quad (I.28)$$

$$M(\vec{k}, \omega) = \frac{i}{(2\pi)^3} \iiint_{-\infty}^{+\infty} m(\vec{r}, t) e^{i\omega t - i\vec{k}\vec{r}} dt d\vec{r}. \quad (I.29)$$

При этом $\varphi = 0$, а компоненты вектор-потенциала в соответствии с (I.22) - (I.24) выражаются следующим образом через $M(\vec{k}, \omega)$:

$$\vec{a}_{\perp} = -i \iiint_{-\infty}^{+\infty} \frac{\vec{k} M(\vec{k}, \omega)}{\rho \omega^2} e^{-i\omega t + i(\vec{k}\vec{r} + \alpha_t z)} d\omega d\vec{k}, \quad (I.30)$$

$$a_{\parallel} = a_z = i \iiint_{-\infty}^{+\infty} \frac{k^2 M(\vec{k}, \omega)}{\rho \omega^2 \alpha_t} e^{-i\omega t + i(\vec{k}\vec{r} + \alpha_t z)} d\omega d\vec{k}. \quad (I.31)$$

Значение индексов „ \perp ” и „ \parallel ” относятся соответственно к поперечным и продольным компонентам потенциалов по отношению к оси z . Соотношения (I.30), (I.31) описывают чисто поперечные волны в упругом полупространстве.

Второе следствие основных уравнений (I.21)-(I.24) связано с возбуждением упругого полупространства тепловыми источниками. Предположим, что на поверхность сильно поглощающего упругого тела падает пучок электромагнитных волн. Часть энергии отразится от границы раздела, а прошедшая часть пучка поглощается в тонком приповерхностном слое. В простой математической модели можно считать, что на границе тела выполняется граничное условие

$$\frac{\partial T}{\partial z} = Q(\vec{r}, t) \quad \text{при} \quad z = 0, \quad (I.32)$$

где $Q(\vec{r}, t)$ - функция распределения теплового источника по поверхности тела, T - температура. Иными словами, при $z = 0$ считается заданным поток тепла внутрь твердого тела.

Основное уравнение теплопроводности твердых тел,

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \chi \Delta T, \quad (I.33)$$

где χ - коэффициент температуропроводности, имеет интегральное решение при достаточно произвольном распределении источников $Q(\vec{r}, t)$. Предположим, что решение (I.33) с граничным условием (I.32) извест-

но и, следовательно, температура $T(\vec{R}, t)$ - известная функция координат и времени.

В соответствии с основными положениями теории упругих деформаций при изменении температуры появляется дополнительное слагаемое в тензоре напряжений /10/,

$$\rho'_{ik} = -\alpha K T \delta_{ik}, \quad (I.34)$$

где K - модуль всестороннего сжатия, α - коэффициент теплового расширения твердого тела. Граничные условия (I.2) при $z = 0$ необходимо дополнить новым слагаемым (I.34):

$$\rho_{xz} = -f_x(\vec{r}, t), \quad \rho_{yz} = -f_y(\vec{r}, t), \quad \rho_{zz} = -\alpha K T(\vec{r}, t) - f_z(\vec{r}, t). \quad (I.35)$$

Отсюда следует, что для сильно поглощающих электромагнитные волны сред тепловое возбуждение эквивалентно некоторому распределению эффективной вертикальной силовой нагрузки

$$f_{z \text{ эф}} = \alpha K T(\vec{r}, t). \quad (I.36)$$

Заметим, что в этом описании теплового механизма генерации волн в упругом полупространстве не учитывается эффект объемного теплового возбуждения механических деформаций в среде. По-видимому, когда электромагнитные волны поглощаются в тонком приповерхностном слое вещества, объемное возбуждение становится несущественным. При этом предполагается, что поперечное сечение пучка в плоскости x, y значительно превосходит глубину проникновения электромагнитных волн в твердое тело.

2. Деформация поверхности упругого полупространства под действием сосредоточенной движущейся нагрузки

В качестве примера использования полученных выше общих соотношений рассмотрим смещения, создаваемые в однородном упругом полу-

пространстве постоянной сосредоточенной вертикальной нагрузкой, движущейся равномерно со скоростью v по его поверхности: $\vec{f} = (0, 0, F\delta(x - vt)\delta(y))$. Из соотношений (I.21)–(I.24), (I.12) и (I.3) можно получить следующие интегральные выражения для смещений:

$$u_x = \frac{iF}{4\pi^2\mu} \iiint_{-\infty}^{+\infty} \frac{k_x}{D(\vec{k}, \omega)} \left[(k_t^2 - 2k^2) e^{i\alpha_l z} - 2\alpha_l \alpha_t e^{i\alpha_t z} \right] \times \\ \times \delta(\omega - k_x v) e^{-i\omega t + i\vec{k}\vec{r}} d\omega d\vec{k}, \quad (2.1)$$

$$u_y = \frac{iF}{4\pi^2\mu} \iiint_{-\infty}^{+\infty} \frac{k_y}{D(\vec{k}, \omega)} \left[(k_t^2 - 2k^2) e^{i\alpha_l z} - 2\alpha_l \alpha_t e^{i\alpha_t z} \right] \times \\ \times \delta(\omega - k_x v) e^{-i\omega t + i\vec{k}\vec{r}} d\omega d\vec{k}, \quad (2.2)$$

$$u_z = \frac{iF}{4\pi^2\mu} \iiint_{-\infty}^{+\infty} \frac{\alpha_l}{D(\vec{k}, \omega)} \left[(k_t^2 - 2k^2) e^{i\alpha_l z} + 2k^2 e^{i\alpha_t z} \right] \times \\ \times \delta(\omega - k_x v) e^{-i\omega t + i\vec{k}\vec{r}} d\omega d\vec{k}. \quad (2.3)$$

Основной интерес представляют смещения на поверхности полупространства, поскольку именно они могут быть измерены в реальных условиях. В связи с этим при дальнейшем рассмотрении ограничимся случаем $z=0$. Пользуясь свойствами дельта-функции, вычислим интегралы по ω в (2.1) – (2.3), а в интегралах по волновому вектору \vec{k} перейдем к полярным координатам $k_x = k \cos \psi$, $k_y = k \sin \psi$. В результате будем иметь

$$u_{x0} = \frac{iF}{4\pi^2\mu} \int_0^{2\pi} \frac{I_1(\psi)}{D_1(\psi)} \cos \psi \left[M_t^2 \cos^2 \psi - 2 + 2\sqrt{1 - M_l^2 \cos^2 \psi} \sqrt{1 - M_t^2 \cos^2 \psi} \right] d\psi, \quad (2.4)$$

$$u_{y0} = \frac{iF}{4\pi^2\mu} \int_0^{2\pi} \frac{I(\psi)}{D_1(\psi)} \sin \psi \left[M_t^2 \cos^2 \psi - 2 + \right. \\ \left. + 2 \sqrt{1 - M_l^2 \cos^2 \psi} \sqrt{1 - M_l^2 \cos^2 \psi} \right] d\psi, \quad (2.5)$$

$$u_{z0} = - \frac{FM_t^2}{4\pi^2\mu} \int_0^{2\pi} \frac{I(\psi)}{D_1(\psi)} \cos^2 \psi \sqrt{1 - M_l^2 \cos^2 \psi} d\psi \quad (2.6)$$

В выражениях (2.4) - (2.6) использованы следующие обозначения:

$$x - vt = r \cos \psi, \quad y = r \sin \psi,$$

$$D_1(\psi) = (M_t^2 \cos^2 \psi - 2)^2 - 4 \sqrt{1 - M_l^2 \cos^2 \psi} \sqrt{1 - M_t^2 \cos^2 \psi},$$

где $M_{l,t} = v/c$; l, t - числа Маха, соответствующие продольным и поперечным волнам,

$$I(\psi) = \int_0^{\infty} e^{ikr \cos(\psi - \varphi)} dk. \quad (2.7)$$

Индекс "нуль" у символов смещений означает, что они взяты при $z = 0$.

По аналогии с известным равенством

$$\int_0^{\infty} e^{ikx} dk = \pi \delta(x) + \frac{i}{x}$$

можно получить соотношение

$$\int_0^{\infty} e^{ikf(x)} dk = \pi \delta(f(x)) + \frac{i}{f(x)}, \quad (2.8)$$

где $f(x)$ - действительная функция от действительного аргумента.

Используя (2.8), вычислим интеграл (2.7) и подставим результат в (2.4) - (2.6). После этого выражения для смещений поверхности полупространства примут вид

$$u_{x0} = \frac{iF}{4\pi\mu} \int_0^{2\pi} \frac{\cos\psi}{D_1(\psi)} \left(M_t^2 \cos^2\psi - 2 + 2\sqrt{1 - M_l^2 \cos^2\psi} \sqrt{1 - M_t^2 \cos^2\psi} \right) \delta[r \cos(\psi - \varphi)] d\psi - \frac{F}{4\pi^2\mu r} \int_0^{2\pi} \frac{\cos\psi}{D_1(\psi) \cos(\psi - \varphi)} \left(M_t^2 \cos^2\psi - 2 + 2\sqrt{1 - M_l^2 \cos^2\psi} \sqrt{1 - M_t^2 \cos^2\psi} \right) \times \sqrt{1 - M_t^2 \cos^2\psi} d\psi, \quad (2.9)$$

$$u_{y0} = \frac{iF}{4\pi\mu} \int_0^{2\pi} \frac{\sin\psi}{D_1(\psi)} \left(M_t^2 \cos^2\psi - 2 + 2\sqrt{1 - M_l^2 \cos^2\psi} \sqrt{1 - M_t^2 \cos^2\psi} \right) \times \delta[r \cos(\psi - \varphi)] d\psi - \frac{F}{4\pi^2\mu r} \int_0^{2\pi} \frac{\sin\psi}{D_1(\psi) \cos(\psi - \varphi)} \left(M_t^2 \cos^2\psi - 2 + 2\sqrt{1 - M_l^2 \cos^2\psi} \sqrt{1 - M_t^2 \cos^2\psi} \right) d\psi, \quad (2.10)$$

$$u_{z0} = - \frac{FM_t^2}{4\pi\mu} \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2\psi \sqrt{1 - M_l^2 \cos^2\psi}}{D_1(\psi)} \delta[r \cos(\psi - \varphi)] d\psi - \frac{iFM_t^2}{4\pi^2\mu r} \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2\psi \sqrt{1 - M_l^2 \cos^2\psi}}{D_1(\psi) \cos(\psi - \varphi)} d\psi, \quad (2.11)$$

где символ \int означает интеграл в смысле главного значения относительно точки, определяемой из уравнения $\cos(\psi - \varphi) = 0$.

Поскольку обычно скорости реальных нагрузок, движущихся по поверхностям твердых тел, бывает значительно меньше скоростей поверхностных и объемных волн, рассмотрим прежде всего случай медленного движения источника, $M_t < M_t < M_R < 1$, где $M_R = v/C_R$, C_R — скорость поверхностной волны Рэлея. При этом стоящая в знаменателях подынтегральных выражений в (2.9)–(2.11) функция $D_1(\psi)$ не имеет нулей в интервале интегрирования $0 \leq \psi \leq 2\pi$. Первые интегралы в (2.9)–(2.11) легко вычислять, воспользовавшись известным свойством дельта-функции от сложного аргумента:

$$\delta(\varphi(x)) = \sum_k \frac{\delta(x-x_k)}{\left| \frac{d\varphi(x)}{dx} \right|_{x=x_k}},$$

где x_k — простые нули функции $\varphi(x)$ /II/. В результате из (2.9)–(2.11) при $M_R < 1$ будем иметь

$$u_{x0} = -\frac{F}{4\pi^2 \mu r} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \psi (M_t^2 \cos^2 \psi - 2 + 2\sqrt{1 - M_t^2 \cos^2 \psi} \sqrt{1 - M_t^2 \cos^2 \psi})}{D_1(\psi) \cos(\psi - \varphi)} d\psi, \quad (2.12)$$

$$u_{y0} = -\frac{F}{4\pi^2 \mu r} \int_0^{2\pi} \frac{\sin \psi (M_t^2 \cos^2 \psi - 2 + 2\sqrt{1 - M_t^2 \cos^2 \psi} \sqrt{1 - M_t^2 \cos^2 \psi})}{D_1(\psi) \cos(\psi - \varphi)} d\psi, \quad (2.13)$$

$$u_{z0} = -\frac{F M_t^2 \sin^2 \varphi \sqrt{1 - M_t^2 \sin^2 \varphi}}{2\pi r \mu [(r - M_t^2 \sin^2 \varphi)^2 - 4\sqrt{1 - M_t^2 \sin^2 \varphi} \sqrt{1 - M_t^2 \sin^2 \varphi}]}. \quad (2.14)$$

При получении (2.14) учтено, что интеграл в смысле главного значе-

ния в (2.11) равен нулю как интеграл от периодической симметричной относительно оси ψ функции, период которой 2π совпадает с длиной интервала интегрирования. Отметим, что для вертикальных смещений поверхности полупространства получено точное аналитическое выражение.

Вычисление интегралов (2.12), (2.13) при произвольных скоростях движения источника оказывается затруднительным. В связи с этим рассмотрим практически важный случай $M_R \ll 1$. Разлагая подынтегральные функции в (2.12), (2.13) и формулу (2.14) в ряд по малым $M_{l,t}$ и ограничиваясь членами порядка $M_{l,t}^2$, получим следующие выражения для смещений поверхности упругого полупространства под действием равномерно движущейся точечной вертикальной нагрузки:

$$u_{x_0} = - \frac{F c_t^2 (x - vt)}{4\pi\mu [(x - vt)^2 + y^2] (c_l^2 - c_t^2)}, \quad (2.15)$$

$$u_{y_0} = - \frac{F c_t^2 y}{4\pi\mu [(x - vt)^2 + y^2] (c_l^2 - c_t^2)}, \quad (2.16)$$

$$u_{z_0} = \frac{F c_l^2}{4\pi\mu \sqrt{(x - vt)^2 + y^2} (c_l^2 - c_t^2)}. \quad (2.17)$$

Из (2.15)–(2.17) следует, что линии равных смещений при $z = 0$ представляют собой эллипсы, малые полуоси которых совпадают с траекторией источника.

В предельном случае $v = 0$ формулы (2.15)–(2.17) переходят в известные [10] выражения для смещений границы полупространства под действием неподвижной точечной вертикальной нагрузки.

3. Энергетические характеристики излучения волн Лява, возбуждаемых в системе упругий слой - упругое полупространство

Анализ сейсмограмм давно выявил наличие поверхностных волн, возбуждаемых при землетрясениях и искусственных взрывах. Изучение характеристик поверхностных волн позволяет детально исследовать наружные слои Земли - кору и верхнюю мантию /4,12/. Наблюдаются два основных типа поверхностных волн: волны Рэлея и волны Лява.

Рэлеевская поверхностная волна представляет собой линейную комбинацию продольных волн (Р - волны) и поперечных волн с вертикальной поляризацией (SV - волны) и может существовать в однородном упругом полупространстве со свободной границей. Вектор смещений частиц среды в этой поверхностной волне лежит в вертикальной плоскости. Дисперсионное уравнение для волны Рэлея в однородном полупространстве имеет вид /4/

$$D(\vec{k}, \omega) = 0, \quad (3.1)$$

где функция $D(\vec{k}, \omega)$ дается выражением (1.25). Из уравнения (3.1) следует, что дисперсия у рэлеевской волны отсутствует.

Волны Лява существенно отличаются от волн Рэлея прежде всего тем, что они возникают только при наличии вертикальной неоднородности упругого полупространства. Вектор смещений частиц среды в волнах Лява лежит в горизонтальной плоскости. Простейшая модель твердого тела, в котором существуют такие волны, - это упругий слой, лежащий на упругом полупространстве. При этом верхняя граница слоя должна быть свободной, а на нижней границе слоя должны выполняться условия "оклейки" с поверхностью полупространства - непрерывность всех компонент тензора напряжений и вектора смещений. Существенно, что скорость поперечной волны $C_1 = (\mu_1/\rho_1)^{1/2}$ в слое должна быть меньше скорости поперечной волны $C_2 = (\mu_2/\rho_2)^{1/2}$ в полупространстве (μ_1, μ_2 и ρ_1, ρ_2 - соответственно модули чистого сдвига и плотности слоя и полупространства). Только при выполнении этих условий существуют волны Лява, "прижатые" к слою - они экспоненциально затухают с ростом глубины в упругом полупространстве.

Подобные условия реализуются внутри литосферы Земли, включав-

шей в себя как земную кору, так и верхний слой мантии. Известно, что кора отделена от мантии достаточно резкой границей – разрывом Моховичича, на котором скачкообразно возрастают скорости упругих волн и плотность вещества. Толщина земной коры H изменяется от $H \approx 10$ км в океанических областях до нескольких десятков километров в горных районах континентальных областей Земли.

В этом разделе рассмотрены энергетические характеристики волн Лява, генерируемых поверхностными источниками в простейшей модели слоистой Земли – упругом слое, лежащем на упругом полупространстве.

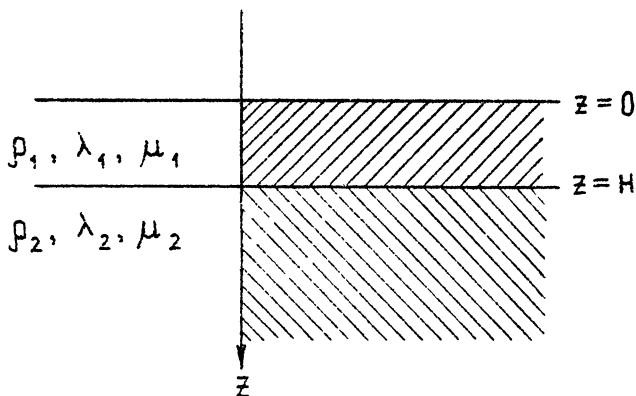


Рис. 1. К постановке задачи

В качестве источника этих волн удобно выбрать распределение сил на свободной поверхности, удовлетворяющее условиям (I.27) – (I.29). При этом, как показано в разд. I, возбуждаются только поперечные волны S_H – поляризации.

Для решения задачи достаточно ввести в слое и полупространстве только векторные потенциалы \vec{A}_1 и \vec{A}_2 (скалярные потенциалы $\varphi_{1,2}$ равны нулю аналогично (I.21) при условии (I.27)). Далее, условие калибровки вида (I.4) позволяет выбрать векторные потенциалы таким образом, чтобы единственными отличными от нуля их компонентами были вертикальные компоненты $\vec{A}_{1,2} = (0, 0, A_{1,2})$. Величины A_1 и A_2 подчиняются волновым уравнениям вида (I.6), которые должны решаться с

граничными условиями (I.2) на поверхности слоя ($z = 0$) и условиями типа "склейки"

$$\rho_{xz}^{(1)} = \rho_{xz}^{(2)}, \quad \rho_{yz}^{(1)} = \rho_{yz}^{(2)}, \quad \rho_{zz}^{(1)} = \rho_{zz}^{(2)}, \quad (3.2)$$

$$\mu_{x1} = \mu_{x2}, \quad \mu_{y1} = \mu_{y2}, \quad \mu_{z1} = \mu_{z2}$$

на границе слоя и полупространства при $z = H$.

Делая преобразование Фурье величин a_1, a_2 :

$$a_{1,2}(\vec{R}, t) = \iiint_{-\infty}^{+\infty} A_{1,2}(\vec{k}, \omega, z) e^{-i\omega t + i\vec{k}\vec{r}} d\omega d\vec{k}, \quad (3.3)$$

где $\vec{r} = (x, y)$ - двумерный и $\vec{R} = (x, y, z)$ - трехмерный вектор, с формулой обращения

$$A_{1,2}(\vec{k}, \omega, z) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint_{-\infty}^{+\infty} a_{1,2}(\vec{R}, t) e^{i\omega t - i\vec{k}\vec{r}} dt d\vec{r} \quad (3.4)$$

получим для Фурье образов $A_{1,2}$ обыкновенные дифференциальные уравнения:

$$\frac{d^2 A_{1,2}}{dz^2} + \left(\frac{\omega^2}{c_{1,2}^2} - k^2 \right) A_{1,2} = 0. \quad (3.5)$$

Граничные условия для уравнения (3.5) имеют вид

$$\mu_1 \frac{\partial A_1}{\partial z} = -M \quad \text{при } z = 0, \quad (3.6a)$$

$$\mu_1 \frac{\partial A_1}{\partial z} = \mu_2 \frac{\partial A_2}{\partial z}, \quad (3.6a)$$

при $z = H$.

$$A_1 = A_2 \quad (3.6b)$$

Величина M в (3.6a) определена формулой (I.29).

Решения уравнений (3.5) следует искать в виде

$$A_1 = \tilde{C}_1 e^{i\alpha_1 z} + \tilde{C}_2 e^{-i\alpha_1 z}, \quad (3.7)$$

$$A_2 = \tilde{C}_3 e^{i\alpha_2 z}, \quad (3.8)$$

где $\alpha_{1,2} = \sqrt{k_{1,2}^2 - k^2}$, $k_1 = \omega/c_1$ и $k_2 = \omega/c_2$ — волновые числа SH -волн соответственно в слое и в полупространстве. Для того, чтобы решение (3.8) в полупространстве либо имело вид уходящей в область $z \rightarrow \infty$ волны, либо экспоненциально спадало с ростом z при $k > k_2$, необходимо установить следующее правило извлечения корня α_2 :

$$\sqrt{k^2 - k_2^2} = i \sqrt{k^2 - k_2^2} \quad \text{при } k > k_2.$$

Константы $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2, \tilde{C}_3$ в (3.7), (3.8) определяются из граничных условий (3.6)

$$\tilde{C}_1 = \frac{iM(\alpha_1 \mu_1 + \alpha_2 \mu_2) e^{-i\alpha_1 H}}{2\alpha_1 \mu_1 (\alpha_2 \mu_2 \cos \alpha_1 H - i\alpha_1 \mu_1 \sin \alpha_1 H)}, \quad (3.9a)$$

$$\tilde{C}_2 = \frac{i M (\alpha_1 \mu_1 - \alpha_2 \mu_2) e^{i \alpha_1 H}}{2 \alpha_1 \mu_1 (\alpha_2 \mu_2 \cos \alpha_1 H - i \alpha_1 \mu_1 \sin \alpha_1 H)}, \quad (3.9б)$$

$$\tilde{C}_3 = \frac{i M e^{-i \alpha_2 H}}{\alpha_2 \mu_2 \cos \alpha_1 H - i \alpha_1 \mu_1 \sin \alpha_1 H}. \quad (3.9в)$$

Выражения для Фурье-образов Z - компонент векторных потенциалов в слое и в полупространстве, согласно (3.7) - (3.9), имеют вид

$$A_1 = \frac{i M \left[(\alpha_1 \mu_1 + \alpha_2 \mu_2) e^{i \alpha_1 (z-H)} + (\alpha_1 \mu_1 - \alpha_2 \mu_2) e^{-i \alpha_1 (z-H)} \right]}{2 \alpha_1 \mu_1 (\alpha_2 \mu_2 \cos \alpha_1 H - i \alpha_1 \mu_1 \sin \alpha_1 H)} \quad (3.10а)$$

$$A_2 = \frac{i M e^{i \alpha_2 (z-H)}}{\alpha_2 \mu_2 \cos \alpha_1 H - i \alpha_1 \mu_1 \sin \alpha_1 H}. \quad (3.10б)$$

Выражения для смещений в упругих волнах могут быть получены из соотношений (1.3), (3.3), (3.10) и имеют следующий интегральный вид:

$$u_{x_1} = - \iiint_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\alpha_1 \mu_1 + \alpha_2 \mu_2) e^{i \alpha_1 (z-H)} + (\alpha_1 \mu_1 - \alpha_2 \mu_2) e^{-i \alpha_1 (z-H)}}{2 \alpha_1 \mu_1 (\alpha_2 \mu_2 \cos \alpha_1 H - i \alpha_1 \mu_1 \sin \alpha_1 H)} \times \\ \times k_y M(\vec{k}, \omega) e^{-i \omega t + i \vec{k} \vec{r}} d\omega d\vec{k}, \quad (3.11а)$$

$$u_{y1} = \iiint_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\alpha_1 \mu_1 + \alpha_2 \mu_2) e^{i\alpha_1(z-H)} + (\alpha_1 \mu_1 - \alpha_2 \mu_2) e^{-i\alpha_1(z-H)}}{2\alpha_1 \mu_1 (\alpha_2 \mu_2 \cos \alpha_1 H - i\alpha_1 \mu_1 \sin \alpha_1 H)} \times$$

(3.II6)

$$\times k_x M(\vec{k}, \omega) e^{-i\omega t + ikr} d\omega d\vec{k},$$

$$u_{x2} = - \iiint_{-\infty}^{+\infty} \frac{M(\vec{k}, \omega) k_y \exp [i\alpha_2(z-H) - i\omega t + i\vec{k}\vec{r}]}{\mu_2 \alpha_2 \cos \alpha_1 H - i\mu_1 \alpha_1 \sin \alpha_1 H} d\omega d\vec{k},$$

(3.IIв)

$$u_{y2} = \iiint_{-\infty}^{+\infty} \frac{M(\vec{k}, \omega) k_x e^{i\alpha_2(z-H) - i\omega t + i\vec{k}\vec{r}}}{\mu_2 \alpha_2 \cos \alpha_1 H - i\mu_1 \alpha_1 \sin \alpha_1 H} d\omega d\vec{k}$$

(3.IIг)

В проблемах генерации волн любой физической природы большой интерес представляют энергетические характеристики излучения: полная излучаемая мощность, импеданс излучателя, диаграммы направленности.

Ниже будет вычислена мощность, излучаемая гармоническим источником

$$m(\vec{r}, t) = m_0(\vec{r}) e^{-i\omega_0 t} \quad (3.I2)$$

Фурье-образ поверхностного распределения вращательного момента (3.I2)

имеет вид

$$M(\vec{k}, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \int \int m_0(\vec{r}) e^{-i(\omega_0 - \omega)t - i\vec{k}\vec{r}} dt d\vec{r} = \quad (3.13)$$

$$= M_0(\vec{k}) \delta(\omega - \omega_0),$$

где

$$M_0(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int m_0(\vec{r}) e^{-i\vec{k}\vec{r}} d\vec{r} \quad (3.14)$$

и введено обычное обозначение для дельта-функции Дирака

$$\delta(\omega - \omega_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\omega - \omega_0)t} dt.$$

Подставляя (3.13) в (3.11) и интегрируя по частоте, получаем выражения для смещений, создаваемых в слое и в полупространстве гармоническим источником:

$$u_{x1} = -\frac{e^{-i\omega_0 t}}{\mu_1} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{M_0(\vec{k}) K_y [\mu_1 \alpha_1 \cos \alpha_1 (z-H) + i \mu_2 \alpha_2 \sin \alpha_1 (z-H)]}{\alpha_1 (\mu_2 \alpha_2 \cos \alpha_1 H - i \mu_1 \alpha_1 \sin \alpha_1 H)} \times \quad (3.15a)$$

$$\times e^{i\vec{k}\vec{r}} d\vec{k},$$

$$u_{y1} = \frac{e^{-i\omega_0 t}}{\mu_1} \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{M_0(\vec{k}) k_x [\mu_1 \alpha_1 \cos \alpha_1 (z-H) + i \mu_2 \alpha_2 \sin \alpha_1 (z-H)]}{\alpha_1 (\mu_2 \alpha_2 \cos \alpha_1 H - i \mu_1 \alpha_1 \sin \alpha_1 H)} \times \\ \times e^{i\vec{k}\vec{r}} d\vec{k}, \quad (3.156)$$

$$u_{x2} = - \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{M_0(\vec{k}) k_y \exp\{-i\omega_0 t + i[\vec{k}\vec{r} + \alpha_2(z-H)]\}}{\mu_2 \alpha_2 \cos \alpha_1 H - i \mu_1 \alpha_1 \sin \alpha_1 H} d\vec{k}, \quad (3.15b)$$

$$u_{y2} = \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{M_0(\vec{k}) k_x \exp\{-i\omega_0 t + i[\vec{k}\vec{r} + \alpha_2(z-H)]\}}{\mu_2 \alpha_2 \cos \alpha_1 H - i \mu_1 \alpha_1 \sin \alpha_1 H} d\vec{k}. \quad (3.15r)$$

Мощность излучения упругих волн поверхностным источником с распределением вращательного момента вида (3.12) удобно определить по реакции среды, оказывающей обратное воздействие на источник. При этом мгновенное значение мощности излучения определяется по формуле

$$W = \iint_{-\infty}^{+\infty} (\vec{f} \vec{v}) \Big|_{z=0} d\vec{r}, \quad (3.16)$$

где \vec{f} — сила, действующая на поверхность твердого тела (см. (I.27)) и $\vec{v} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}$ — скорость смещений частиц среды в области, занятой источником. Среднее за период гармонического процесса $T = 2\pi/\omega_0$ значение мощности равно

$$W = -\frac{1}{2} \operatorname{Re} i \omega_0 \iint_{-\infty}^{+\infty} m^*(\vec{r}) \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \Big|_{z=0} dx dy, \quad (3.17)$$

где звездочка означает комплексное сопряжение и Re - символ реальной части выражения. Подставляя в (3.17) соотношения (3.15а), (3.15б) для смещений получаем следующее выражение для средней за период излучаемой мощности:

$$\begin{aligned} \bar{W} &= \frac{2\pi^2 \omega_0}{\mu_1} \times \\ &\times \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k^2 M_0(\vec{k}) M_0^*(\vec{k}) (\mu_1 \alpha_1 \cos \alpha_1 H - i \mu_2 \alpha_2 \sin \alpha_1 H)}{\alpha_1 (\mu_2 \alpha_2 \cos \alpha_1 H - i \mu_1 \alpha_1 \sin \alpha_1 H)} d\vec{k}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Как частный случай соотношения (3.18) может быть получена формула для мощности излучения возбуждаемых поверхностными источником SH - волн в однородном полупространстве. Переход к однородной среде может быть осуществлен двумя способами. Во-первых, можно положить параметры полупространства λ_2, μ_2, ρ_2 , равными соответствующим параметрам слоя, что приводит к выражению

$$\bar{W} = \frac{2\pi^2 \omega_0}{\mu_1} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k^2 M_0(\vec{k}) M_0^*(\vec{k})}{\alpha_1} d\vec{k}. \quad (3.19)$$

Во-вторых, можно устремить к бесконечности толщину слоя, $H \rightarrow \infty$ причем для получения правильного результата при выполнении предель-

ного перехода необходимо учесть наличие в среде источника малого поглощения - малой положительной (в соответствии с выбором временного фактора в виде $\exp(-i\omega_0 t)$) мнимой части волнового числа K_1 . Эта операция также приводит к выражению (3.19). И, наконец, можно устремить толщину слоя к нулю, $H \rightarrow 0$, в результате чего для излучаемой мощности получаем

$$\bar{W} = \frac{2\pi^2 \omega_0}{\mu_2} \operatorname{Re} \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{\kappa^2 M_0(\vec{\kappa}) M_0^*(\vec{\kappa})}{\varepsilon_2} d\vec{\kappa}. \quad (3.20)$$

Формулы (3.19) и (3.20) отличаются друг от друга индексами стоящих в знаменателях величин. Это связано с тем, что в (3.19) вся среда характеризуется параметрами λ_1, μ_1, ρ_1 , соответствующими слою, а в (3.20) - параметрами λ_2, μ_2, ρ_2 , соответствующими полупространству.

Если характерные размеры источника l много меньше длины излучаемой волны, $\kappa l \ll 1$, то можно считать это точечным и положить в (3.12) $m_0(\vec{r}) = \Phi \delta(x) \delta(y)$ (тогда в (3.19) $M_0 = \Phi/4\pi^2$), где Φ - постоянная величина с размерностью пары сил в механике. Для точечного источника из (3.19) получаем простое выражение для излучаемой мощности:

$$\bar{W} = \frac{\omega_0^4 \Phi^2}{8\pi \mu_1 c_1^3}, \quad (3.21)$$

где учтено значение табличного интеграла

$$\int_0^a \frac{x^3 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{2}{3} a^3. \quad (3.22)$$

Подробный анализ соотношения (3.18) проведем также для случая точечного источника, когда выражение для излучаемой мощности принимает вид

$$W = \frac{\omega_0^2 P^2}{4\pi\mu_1} \operatorname{Re} \int_0^\infty \frac{k^3 (\mu_1 x_1 \cos x_1 H - i \mu_2 x_2 \sin x_1 H)}{x_1 (\mu_2 x_2 \cos x_1 H - i \mu_1 x_1 \sin x_1 H)} d\vec{k}. \quad (3.23)$$

При выделении реальной части в (3.23) необходимо учесть вклад лежащих на оси интегрирования полюсов подынтегрального выражения, определяемых из решения уравнения

$$\mu_2 x_2 \cos x_1 H - i \mu_1 x_1 \sin x_1 H = 0, \quad (3.24)$$

представляющего собой дисперсионное уравнение для поверхностных волн Лява (см., например, /13/). Его анализ показывает, что фазовые скорости волн Лява C_ϕ лежат в интервале между скоростью поперечных волн в слое и скоростью поперечных волн в полупространстве. Характерный вид зависимостей фазовых скоростей волн Лява от частоты, задаваемой безразмерным параметром $\Omega = H/\lambda_1$ - отношением толщины слоя к длине поперечной волны в слое, показан на рис. 2. Приведенные на этом рисунке результаты получены из численного решения трансцендентного уравнения

$$\sqrt{x^2 - \eta^2} \cos(a\sqrt{1-x^2}) - \varepsilon \eta^2 \sqrt{1-x^2} \sin(a\sqrt{1-x^2}) = 0, \quad (3.25)$$

где $\eta = c_1/c_2$, $x = c_2/c_\phi$, $\varepsilon = \rho_1/\rho_2$.

Таким образом, средняя за период волны излучаемая мощность представляется в виде интеграла, соответствующего излучению объем-

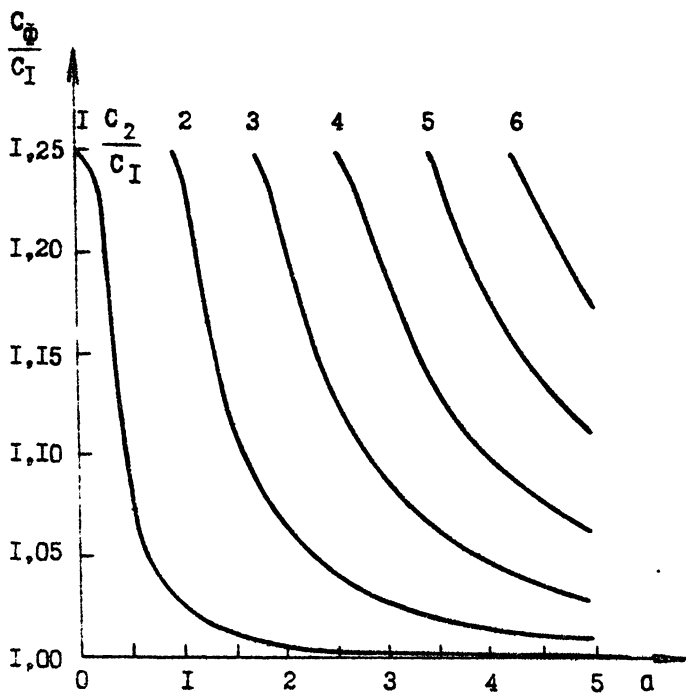


Рис. 2. Зависимости фазовых скоростей первых шести мод волны Лява от безразмерного параметра $\alpha = H/\lambda_1$. Расчеты проведены для случая $\epsilon = \rho_1/\rho_2 = 0,9$, $\eta = C_1/C_2 = 0,8$. Цифры у кривых соответствуют номерам мод.

ной SH - волны, и суммы полувывчетов, соответствующих дискретным модам поверхностных волн Лява:

$$W = \frac{\omega_0 \Phi^2 \mu_2}{4\pi} \int_0^{k_2} \frac{k^3 \sqrt{k_2^2 - k^2} dk}{\mu_2^2 (k_2^2 - k^2) \cos^2(H\sqrt{k_1^2 - k^2}) + \mu_1^2 (k_1^2 - k^2) \sin^2(H\sqrt{k_1^2 - k^2})} + \quad (3.26)$$

$$+ \frac{\omega_0 \Phi^2}{4\mu_1} \sum_{i=1}^N \operatorname{Res} \left[\frac{k^3 (\mu_1 \alpha_i \cos \alpha_i H + \mu_2 q_{i2} \sin \alpha_i H)}{\alpha_i (\mu_2 q_{i2} \cos \alpha_i H - \mu_1 \alpha_i \sin \alpha_i H)}, k = k_i \right].$$

В (3.26) $q_{i2} = \sqrt{k_2^2 - k_i^2}$, k_i - волновое число i -й моды Лява, определяемое из уравнения (3.24), N - число мод при данной толщине слоя H и частоте волны ω_0 . Для дальнейшего исследования удобно привести (3.26) к виду

$$\bar{W} = \frac{\omega_0 \Phi^2 k_1^3}{4\pi \mu_2} W_0, \quad (3.27)$$

где

$$W_0 = W_v + \sum_{i=1}^N W_{Li} \quad (3.28)$$

представляет собой безразмерную величину,

$$W_v = \int_0^1 \frac{x^3 \sqrt{\eta^2 - x^2} dx}{(\eta^2 - x^2) \cos^2(a\sqrt{1-x^2}) + \varepsilon^2 \eta^4 (1-x^2) \sin^2(a\sqrt{1-x^2})} \quad (3.29)$$

численный коэффициент, характеризующий мощность излучения объем-
ной волны,

$$W_{L_i} = \pi \frac{\sqrt{x_i^2 - \eta^2} \left[1 - x_i^2 + (x_i^2 - \eta^2) / (\varepsilon^2 \eta^4) \right]}{(1 - x_i^2)(1 + \varepsilon \eta^2 \alpha \sqrt{x_i^2 - \eta^2}) + (x_i^2 - \eta^2)(1 + \alpha \sqrt{x_i^2 - \eta^2} / (\varepsilon \eta^2))} \quad (3.30)$$

численный коэффициент, соответствующий моде с номером i , x_i - определяющий эту моду корень уравнения (3.25), N - число мод при заданной толщине слоя $M = \alpha \lambda_1$.

На рис. 3. приведены зависимости безразмерной мощности, излучаемой в первые шесть мод Лява, от безразмерного параметра α . Из рассмотрения рис. 3 следует, что наиболее эффективно возбуждается первая мода. Толщина слоя, соответствующая максимальной мощности первой моды составляет приблизительно половину длины поперечной волны в слое. С увеличением номера моды ее мощность уменьшается: мощность моды с номером n всегда выше, чем моды с номером $n+1$. С ростом частоты волны безразмерная мощность каждой моды падает.

На рис. 4 показаны зависимости от частоты мощности излучения объемной поперечной волны W_v , суммарной мощности поверхностных волн $W_L = \sum_{i=1}^N W_{L_i}$ и полной излучаемой мощности W_0 . Из рисунка видно, что мощность поверхностных волн превышает мощность объемной волны (обратное утверждение справедливо только при $\alpha \rightarrow 0$). Зависимости $W_v(\alpha)$ и $W_L(\alpha)$ имеют осциллирующий характер. При увеличении частоты от некоторого ее значения, соответствующего локальному минимуму W_v , мощность объемной волны нарастает до момента появления очередной моды Лява. Вновь возникшая мода уносит определенную часть энергии, в результате чего мощность объемной волны падает, а суммарная мощность поверхностных волн возрастает. При дальнейшем росте частоты мощность поверхностных мод уменьшается, а мощность объемной волны вновь начинает возрастать. Размах осцилляций уровней излучаемой мощности W_L , W_v уменьшается с увеличением частоты, эти уровни стремятся к величинам, получаемым из (3.28) при $\alpha \rightarrow \infty$, $N \rightarrow \infty$.

При малых толщинах слоя (или низких частотах) мощность волн

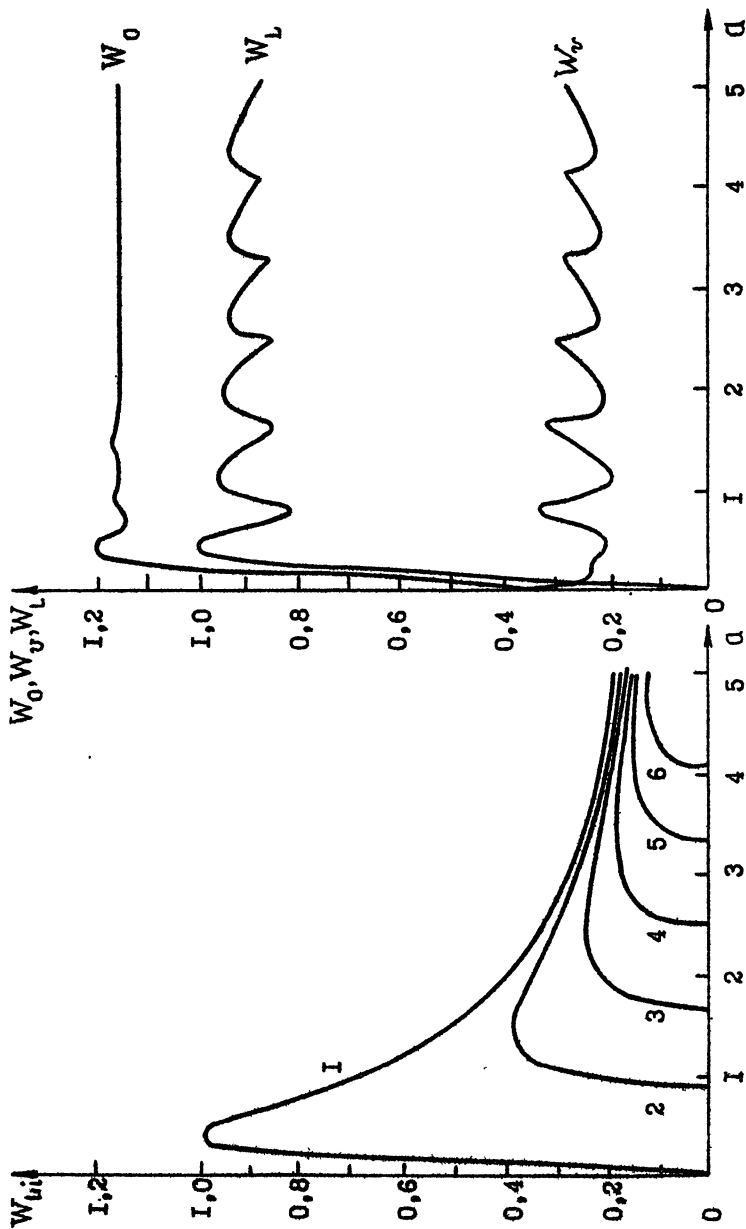


Рис. 3. Зависимость безразмерной мощности W_{Li} , излучаемой в прегриде шесть мод волны Лява от безразмерной толщины слоя D при $\epsilon = 0,9$; $\eta = 0,8$. Цифры у кривых соответствуют от номерам мод.

Рис. 4. Зависимости численных коэффициентов, характеризующих мощность объемной волны W_{gr} , суммарную мощность волны Лява W_L и полную излучаемую мощность W_0 от безразмерной толщины слоя D при $\epsilon = 0,9$, $\eta = 0,8$.

Лява W_L стремится к нулю, а мощность объемной волны W_V - к величине, определяемой из (3.29) при $a \rightarrow 0$. В соответствии с (3.22) при $\eta = c_1/c_2 = 0,8$ получаем $W_V(a \rightarrow 0) \approx 0,34I$.

Полная излучаемая мощность уже при толщинах слоя $H \gtrsim \tilde{\lambda}_1$ практически не меняется и соответствует величине мощности объемной волны, излучаемой точечным источником в однородное полупространство с параметрами λ_1, μ_1, ρ_1 . Действительно, из (3.21), (3.22) следует, что в отсутствие вертикальной неоднородности среды

$$W = \frac{\omega_0 \varphi^2 k_1^3}{4\pi \mu_2} \left(\frac{2}{3} \frac{\mu_2}{\mu_1} \right) \approx 1,16 \frac{\omega_0 \varphi^2 k_1^3}{4\pi \mu_2}$$

при выбранных значениях $\varepsilon = 0,9$ и $\eta = 0,8$. Из рассмотрения рис.4 следует, что

$$\lim_{a \rightarrow 0} W_V \approx 0,34I, \quad (3.31)$$

$$\lim_{a \rightarrow \infty} W_0 \approx 1,16. \quad (3.32)$$

Соотношения (3.31) и (3.32) находятся в полном соответствии с приведенными выше аналитическими оценками и подтверждают, тем самым, правильность полученных численных результатов.

Приведенные в данном разделе результаты могут быть использованы для различных практических целей, в частности, для оценок уровней и спектров микросейсм, создаваемых поверхностными источниками. Например, при толщине слоя $H = 20$ км наиболее интенсивно будут возбуждаться волны Лява, определяемые длиной поперечной волны $\tilde{\lambda}_1 \approx 2H = 40$ км, что при скорости поперечных волн в слое $c_1 = 5$ км/с соответствует частоте $f = 0,125$ Гц. Полученное значение f является характерной частотой микросейсм.

Л и т е р а т у р а

- I. Ewing W.M., Jardetsky W.S., Press F. Elastic waves in layered media. - New York, McGraw-Hill Book Co., Inc., 1957, 380 p.
2. Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах. - М.: Наука, 1973. - 343 с.
3. Аки К., Ричардс П. Количественная сейсмология. Т.1, 2. - М.: Мир, 1983.
4. Витторов И.А. Звуковые поверхностные волны в твердых телах. - М.: Наука, 1981. - 287 с.
5. Поверхностные акустические волны / Под ред. А.А.Олинера. Пер. с англ. под ред. И.С.Реза. - М.: Мир, 1981. - 390 с.
6. Исакович М.А. Общая акустика. - М.: Наука, 1973. - 496 с.
7. Miller G.F., Pursey Н. The field and radiation impedance of mechanical radiators on the free surface of a semi-infinite isotropic solid. - Proc.Roy.Soc., ser.A, 1954, v.223, p.521-541.
8. Miller G.F., Pursey Н. On the partition of energy between elastic waves in a semi-infinite solid. - Proc.Roy.Soc., ser.A, 1955, v.233, N 1192, p.55-69.
9. Гушин В.В., Докучаев В.П., Заславский Ю.М., Коняхова И.Д. О распределении мощности между различными типами излучаемых волн в полубезграничной упругой среде. - В кн.: Исследование Земли невзрывными источниками. - М.: Наука, 1981. - С. 113-118.
10. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория упругости. - М.: Наука, 1965. - 204 с.
11. Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике. - М.: Наука, 1979. - 320 с.
12. Левшин А.Л. Поверхностные и каналовые сейсмические волны. - М.: Наука, 1973. - 176 с.
13. Бреховских Л.М., Гончаров В.В. Введение в механику сплошных сред. - М.: Наука, 1982. - 335 с.

Дата поступления статьи
6 февраля 1987г.

Владимир Платонович Докучаев

Андрей Владимирович Разян

ВОЗБУЖДЕНИЕ УПРУГИХ ВОЛН В ТВЕРДОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ
ПОВЕРХНОСТНЫМИ ИСТОЧНИКАМИ

Подписано в печать 13.02.87 г. МЦ 00315. Формат 60x84/16
Бумага множительная. Печать офсетная. Объем 2,02 усл. печ. л
Тираж 120. Заказ 4541. Бесплатно

Отпечатано на ротационте НИРФИ