

Министерство высшего и среднего специального образования РСФСР

Горьковский ордена Трудового Красного Знамени  
научно-исследовательский радиофизический институт (НИРФИ)

---

П р е п р и н т № 225

ЭВОЛЮЦИОННОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ВОЛНЫ РЕЛЕЯ  
НА ГРАНИЦЕ ОДНОРОДНОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

А. В. Соколов

Горький 1987

С о к о л о в А. В.

ЭВОЛЮЦИОННОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ВОЛНЫ РЕЛЕЯ НА ГРАНИЦЕ ОДНОРОДНОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА. Горький, Препринт № 225 / НИРФИ, 1987.-19 с.

УДК 534.222

В работе получено нелинейное эволюционное уравнение для волны Рэлея на границе однородного полупространства. Исследуются решения эволюционного уравнения для граничного условия, заданного в виде гармонического сигнала.

## В в е д е н и е

Линейные уравнения классической теории упругости допускают решения в виде продольных и поперечных возмущений /1/. В линейной однородной среде продольные и поперечные волны распространяются без взаимодействия. Нелинейность среды приводит к связанности этих возмущений, что существенно усложняет исследование эволюции сигналов в упругой твердой среде по сравнению с соответствующими задачами для жидкости или газа /2/. В простейшем случае одноволнового приближения в квадратично-нелинейной среде продольные плоские волны описываются уравнением простой волны /3/. Плоская сдвиговая волна в квадратично-нелинейной среде не испытывает воздействия нелинейности.

Если упругое твердое тело имеет границу или скачки параметров среды, становится возможным существование в такой системе поверхностных или граничных волн /4/. Анализ нелинейного взаимодействия внутри подсистемы поверхностных волн существенно усложняется наличием линейной связи между продольными и поперечными возмущениями, составляющими поверхностную волну, а также сложностью структуры поля по неволновой координате.

В последнее время нелинейные искажения поверхностных рэлеевских волн рассматривались в целом ряде работ /5-10/. В /6/ получены уравнения для комплексных амплитуд гармоник синусоидальной у источника рэлеевской волны. В /7/ применением процедуры многих масштабов получено интегро-дифференциальное уравнение для Фурье-компоненты рэлеевской волны, имеющей сплошной спектр. Однако применение указанной процедуры возможно при некоторых ограничениях на ширину спектра рассматриваемого сигнала.

В настоящей работе применением регулярной процедуры перехода к нормальным переменным нелинейной граничной задачи /12,13/ получено в первом приближении точное интегро-дифференциальное уравнение для горизонтальной компоненты колебательной скорости рэлеевской волны, не имеющее ограничений на ширину спектра исследуемого сигнала.

## I. Исходные уравнения

Рассмотрим упругое изотропное полупространство  $a_2 > 0$ ;  $a_1, a_3$  — две другие декартовы координаты в плоскости границы  $a_2 = 0$ . Мера деформации среды в окрестности материальной точки с начальными координатами  $a_i$  определяется компонентами тензора деформации Грина  $\chi_{ij}$ :

$$\chi_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial a_j} + \frac{\partial u_j}{\partial a_i} + \frac{\partial u_k}{\partial a_i} \frac{\partial u_k}{\partial a_j} \right), \quad (1)$$

где  $u_i$  — компоненты вектора перемещений. Внутренняя энергия изотропного твердого тела определяется компонентами деформации  $\chi_{ij}$  и энтропией  $S$  [3]. Акустические волны для широкого диапазона частот можно рассматривать в адиабатическом приближении. При этом внутренняя энергия определяется только деформацией среды. Для адиабатических процессов представим внутреннюю энергию единицы массы среды  $U(\chi_{ij})$  в виде разложения по степеням тензора деформаций с точностью до кубических слагаемых:

$$\rho_0 U = \frac{1}{2} \lambda I_1^2 + \mu I_2 + \alpha I_1^3 + \beta I_1 I_2 + \gamma I_3 + O(\chi_{ij}^4). \quad (2)$$

Здесь  $I_1 = \chi_{ij}$ ,  $I_2 = \chi_{ij} \chi_{ij}$ ,  $I_3 = \chi_{ij} \chi_{jk} \chi_{ik}$  — инварианты тензора деформаций;  $\lambda, \mu$  — линейные модули среды,  $\alpha, \beta, \gamma$  — модули третьего порядка,  $\rho_0$  — невозмущенная плотность. Уравнения движения в форме Лагранжа и граничные условия на поверхности полупространства  $a_2 = 0$  запишем в следующем виде [3]:

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial L_{ik}}{\partial a_k}, \quad L_{i2} = 0. \quad (3,4)$$

В отсутствие внутреннего трения компоненты  $L_{ik}$  определяются соотношением

$$L_{ik} = \rho_0 \frac{\partial U}{\partial (\chi_{ik})}$$

Ограничимся рассмотрением двумерных волновых процессов с вектором перемещений  $\vec{u}(a_1, a_2, t) = (u_1, u_2, 0)$ . Выберем пространственный и временной масштабы таким образом, чтобы в новых переменных ( $a_1 \rightarrow x, a_2 \rightarrow y, t \rightarrow t$ ) скорость поперечной волны была равна единице. В переменных  $x, y, t$  уравнение движения (3) для горизонтальной  $u$  и вертикальной  $v$  компонент перемещений принимает вид /8/

$$u_{tt} - ru_{xx} - u_{yy} - (r-1)v_{xy} = F_{1,x} + F_{2,y}, \quad (5)$$

$$v_{tt} - v_{xx} - rv_{yy} - (r-1)u_{xy} = G_{1,x} + G_{2,y}, \quad (6)$$

где

$$r = c_d^2 / c_s^2, \quad c_d^2 = (\lambda + 2\mu) / \rho_0, \quad c_s^2 = \mu / \rho_0,$$

$$F_1 = c_1^2 u_x^2 + c_2^2 v_y (2u_x + v_y) + c_3^2 u_y v_x + c_4^2 (u_y^2 + v_x^2),$$

$$F_2 = (c_3^2 v_x + 2c_4^2 u_y)(u_x + v_y),$$

$$G_1 = (c_3^2 u_y + 2c_4^2 v_x)(u_x + v_y),$$

$$G_2 = c_1^2 v_y^2 + c_2^2 u_x (2v_y + u_x) + c_3^2 u_y v_x + c_4^2 (u_y^2 + v_x^2),$$

$$c_1^2 = 3(\lambda + 2\mu + 2\alpha + 2\beta + 2\gamma) / 2\rho_0 c_s^2 \equiv \frac{3}{2} r + 3\chi_1,$$

$$c_2^2 = (\lambda + 6\alpha + 2\beta) / 2\rho_0 c_s^2 \equiv \frac{1}{2} r - 1 + 3\chi_1 - 2\chi_2,$$

$$c_3^2 = (2\mu + 2\beta + 3\gamma) / 2\rho_0 c_s^2 \equiv 1 + \chi_2,$$

$$c_4^2 = (2\lambda + 4\mu + 2\beta + 3\gamma) / 4\rho_0 c_s^2 \equiv \frac{1}{2} (r + \chi_2),$$

$$\chi_1 = (\alpha + \beta + \gamma) / \rho_0 c_s^2, \quad \chi_2 = (\beta + \frac{3}{2}\gamma) / \rho_0 c_s^2.$$

Граничные условия в новых переменных принимают вид

$$u_y + v_x + F_2 = 0, \quad (7)$$

$$(r-2)u_x + rv_y + G_2 = 0. \quad (8)$$

## 2. Эволюционное уравнение для рэлеевской волны

В уравнениях движения (5), (6) перейдем к Фурье - представлению по переменным  $x, t$ . Полученную систему уравнений запишем в матричном виде:

$$\hat{I} \frac{\partial \vec{q}}{\partial y} + \hat{A}(k, \omega) \vec{q} = \vec{\Phi}(\vec{q}). \quad (9)$$

Здесь  $\vec{q} = (\bar{u}; \bar{u}_y; \bar{v}; \bar{v}_y)^T$ ,  $\vec{\Phi} = (0; \bar{\Phi}_2; 0; \bar{\Phi}_4)^T$ ,

$$\bar{\Phi}_2 = -ik\bar{F}_1 - \bar{F}_{2,y}, \quad \bar{\Phi}_4 = -r^{-1}(ik\bar{G}_1 + \bar{G}_{2,y}),$$

$$\begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \end{pmatrix} = \hat{F}_k \hat{F}_\omega \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \bar{F}_n \\ \bar{G}_n \end{pmatrix} = \hat{F}_k \hat{F}_\omega \begin{bmatrix} F_n \\ G_n \end{bmatrix},$$

$$\hat{F}_k[f] = \int f e^{-ikx} dx, \quad \hat{F}_\omega[f] = \int f e^{i\omega t} dt,$$

$\hat{I}$  - единичная матрица; верхний знак  $T$  означает транспонирование,

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ \omega^2 - rk^2 & 0 & 0 & (r-1)ik \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & (1-r^{-1})ik & r^{-1}(\omega^2 - k^2) & 0 \end{pmatrix}$$

Представим вектор переменных  $\vec{q}$  в виде разложения по собственным векторам  $\vec{\Psi}_n(k, \omega)$  матрицы  $\hat{A}$ :

$$\vec{q} = \hat{T} \vec{M},$$

$$\hat{T} = (\vec{\Psi}_1, \vec{\Psi}_2, \vec{\Psi}_3, \vec{\Psi}_4), \quad \vec{M} = (M_1, M_2, M_3, M_4)^T. \quad (10)$$

Здесь  $\hat{A} \vec{\Psi}_n = \lambda_n \vec{\Psi}_n$ ,  $\text{Det.} |\hat{A} - \lambda_n \hat{I}| = 0$ ,  $n = 1 \dots 4$ ;

$$\vec{\Psi}_l = \frac{i}{\omega} \left( 1; \mp \lambda_l; \mp \frac{\lambda_l}{ik}; \frac{\lambda_l^2}{ik} \right)^T, \quad l = 1, 3,$$

$$\vec{\Psi}_m = \frac{i}{\omega} \left( 1; \mp \lambda_m; \pm \frac{ik}{\lambda_m}; -ik \right)^T, \quad m = 2, 4,$$

$$\lambda_{1,3} = \pm \sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{r}}, \quad \lambda_{2,4} = \pm \sqrt{k^2 - \omega^2}.$$

Из вида выражений для собственных значений  $\lambda_n$  следует, что собственные векторы  $\vec{\Psi}_{1,3}$  описывают продольные волны,  $\vec{\Psi}_{2,4}$  - поперечные. При этом векторы  $\vec{\Psi}_{1,2}$  соответствуют затухающим от границы возмущениям,  $\vec{\Psi}_{3,4}$  - нарастающим. Поверхностная волна Рэлея образована комбинацией векторов  $\vec{\Psi}_1$  и  $\vec{\Psi}_2$ .

Подставляя разложение (10) в матричную систему (9) и домножая слева на матрицу  $\hat{T}^{-1}$ , получим уравнения для коэффициентов разложения  $M_n(k, y, \omega)$ :

$$\left[ \frac{d}{dy} + \lambda_n \right] M_n = (\vec{\zeta}_n, \vec{\Phi}) \equiv B_n, \quad n = 1 \dots 4. \quad (11)$$

Здесь  $\vec{\zeta}_n$  - строки матрицы  $\hat{T}^{-1}$ :

$$\vec{\zeta}_n = \frac{i}{2\omega} \left( -rk^2, \pm \frac{k^2}{\lambda_1}, \mp \frac{ik\lambda_1^2}{\lambda_1}, ikr \right), \quad n = 1, 3,$$

$$\vec{\zeta}_m = \frac{i}{2\omega} \left( r\lambda_1^2, \mp \lambda_2, \pm ik\lambda_2, -ikr \right), \quad m = 2, 4.$$

Формальное интегрирование уравнений (11) приводит к соотношениям

$$M_n = e^{-\lambda_n y} \left[ A_n(k, \omega) + \int_0^y e^{\lambda_n y'} B_n dy' \right], \quad n = 1 \dots 4 \quad (12)$$

Условие ограниченности смещений при  $y \rightarrow \infty$  определяет выражения для констант интегрирования  $A_{3,4}$ :

$$A_n(\kappa, \omega) = - \int_0^{\infty} e^{\lambda_n y} B_n dy, \quad n = 3, 4.$$

Константы интегрирования  $A_{1,2}$  описывают подсистему поверхностных волн. Выражения для  $A_{1,2}$  следуют из граничных условий на поверхности полупространства  $y = 0$ . Преобразование Фурье по переменным  $x, t$  в соотношениях (7), (8) приводит к системе уравнений вида

$$\bar{u}_y + i\kappa \bar{v} + \bar{F}_2 = 0, \quad (13)$$

$$(r-2)i\kappa \bar{u} + r\bar{v}_y + \bar{G}_2 = 0. \quad (14)$$

На границе  $y = 0$  смещения  $\bar{u}$  и  $\bar{v}$  представляются следующими соотношениями:

$$\bar{u} = \frac{i}{\omega} [A_1 + A_2 + A_3 + A_4], \quad (15)$$

$$\bar{v} = \frac{i}{\omega} \left[ \frac{\lambda_1}{i\kappa} (A_3 - A_1) + \frac{i\kappa}{\lambda_2} (A_2 - A_4) \right]. \quad (16)$$

После подстановки (15), (16) в граничные условия (13), (14) получаем систему уравнений относительно неизвестных  $A_1$  и  $A_2$ :

$$2\lambda_1 \lambda_2 A_1 + (\lambda_2^2 + \kappa^2) A_2 = 2\lambda_1 \lambda_2 A_3 + (\lambda_2^2 + \kappa^2) A_4 - i\omega \lambda_2 \bar{F}_2 \equiv D_1, \quad (17)$$

$$(\lambda_2^2 + \kappa^2) A_1 + 2\kappa^2 A_2 = -(\lambda_2^2 + \kappa^2) A_3 - 2\kappa^2 A_4 - \omega \kappa \bar{G}_2 \equiv D_2. \quad (18)$$

Решение алгебраической системы (17), (18) имеет вид

$$A_1 = \frac{2\kappa^2 D_1 - (\lambda_2^2 + \kappa^2) D_2}{\Delta(\kappa, \omega)} \equiv \frac{Q_1}{\Delta(\kappa, \omega)}, \quad (19)$$

$$A_2 = \frac{-(\lambda_2^2 + \kappa^2) D_1 + 2\lambda_1 \lambda_2 D_2}{\Delta(\kappa, \omega)} \equiv \frac{Q_2}{\Delta(\kappa, \omega)}, \quad (20)$$



где  $\Delta(k, \omega) = -(\lambda_2^2 + k^2)^2 + 4k^2 \lambda_1 \lambda_2 \equiv -\omega^4 R(\frac{k}{\omega})$ ,  $R(\frac{k}{\omega})$  - функция Рэлея [11], которая при любых соотношениях линейных параметров среды  $\lambda, \mu, \rho$  имеет два простых корня  $k/\omega = \pm 1/c$ ,  $c$  - скорость поверхностной волны. Таким образом, при фиксированном значении  $k$  на комплексной плоскости  $\omega$  определитель  $\Delta(k, \omega)$ , имеет два простых нуля и две пары точек ветвления:  $\omega_{1,2} = \pm k$ ,  $\omega_{3,4} = \pm \sqrt{k}$ . Структура и характер расположения особенностей на комплексной плоскости  $\omega$  определяет функции  $A_1$  и  $A_2$  в виде следующего разложения

$$A_n = \frac{1}{\omega - kc} \left[ \frac{Q_n}{\frac{\partial \Delta}{\partial \omega}} \right] \Big|_{\omega=kc} + \frac{1}{\omega + kc} \left[ \frac{Q_n}{\frac{\partial \Delta}{\partial \omega}} \right] \Big|_{\omega=-kc} + E_n(k, \omega), \quad (21)$$

$$n = 1, 2,$$

где функции  $E_{1,2}$  обусловлены точками ветвления и представляют собой упругие поля, распространяющиеся вдоль  $\mathcal{X}$  со скоростями, отличными от  $c$ . Другие два слагаемых в соотношении (21) представляют рэлеевские волны, распространяющиеся во встречных направлениях. Рассмотрим рэлеевскую волну, распространяющуюся в сторону растущих  $\mathcal{X}$ . В одноволновом приближении соотношение (21) принимает вид

$$A_1 = \frac{1}{\omega - kc} \left[ \frac{2k^2 D_1 - (\lambda_2^2 + k^2) D_2}{\frac{\partial \Delta}{\partial \omega}} \right] \Big|_{\omega=kc}, \quad (22)$$

$$A_2 = \frac{1}{\omega - kc} \left[ \frac{-(\lambda_2^2 + k^2) D_1 + 2\lambda_1 \lambda_2 D_2}{\frac{\partial \Delta}{\partial \omega}} \right] \Big|_{\omega=kc} \quad (23)$$

Из соотношений (22), (23) следует, что  $A_2 = \rho A_1$ , где  $\rho = \frac{c^2 - 2}{2}$ .

Умножим уравнение (22) на  $i(\omega - kc)$  и сделаем обратное преобразование Фурье по  $\omega$ . В результате получим уравнение в нормальной форме для переменной  $A_k(t) \equiv A_1(k, t)$ :

$$\frac{dA_K}{dt} + i\kappa c A_K = \left\{ -i\kappa \left[ \delta_3 A_3(\kappa, t) + \delta_4 A_4(\kappa, t) - 2i c \delta_2 \operatorname{sgn}(\kappa) \bar{F}_2 + c(2-c^2) \bar{G}_2 \right] \right\} / \Delta_1. \quad (24)$$

Здесь

$$\delta_1 = \sqrt{1 - \frac{c^2}{r}}, \quad \delta_2 = \sqrt{1 - c^2}, \quad \delta_3 = 4\delta_1 \delta_2 + 2 - c^2,$$

$$\delta_4 = 4(2 - c^2), \quad \Delta_1 = 4c \left[ 2 - c^2 - \frac{\delta_2}{\delta_1 r} - \frac{\delta_1}{\delta_2} \right] = \kappa^3 \frac{d\Delta}{d\omega} \Big|_{\omega = \kappa c},$$

$$A_3 = -\frac{i}{2c} \int_0^{\infty} dy \exp[-\kappa \operatorname{sgn}(\kappa) \delta_1 y] \left[ \frac{\operatorname{sgn}(\kappa)}{\delta_1} \bar{F} + \bar{G} \right], \quad (25)$$

$$A_4 = +\frac{i}{2c} \int_0^{\infty} dy \exp[-\kappa \operatorname{sgn}(\kappa) \delta_2 y] \left[ \operatorname{sgn}(\kappa) \delta_2 \bar{F} + \bar{G} \right], \quad (26)$$

$$\bar{F} = i\kappa \bar{F}_1 + \bar{F}_{2,y}, \quad \bar{G} = \kappa \bar{G}_1 - i\bar{G}_{2,y}. \quad (27)$$

Функции  $\bar{F}_{1,2}$  и  $\bar{G}_{1,2}$  можно записать в виде свертки функции  $\bar{u}_x$ ,  $\bar{u}_y$ ,  $\bar{v}_x$ ,  $\bar{v}_y$  (нижние индексы  $x$ ,  $y$  обозначают производную по соответствующей координате). Из разложения по собственным векторам (10) для поверхностной волны ( $\omega = \kappa c$ ) в первом приближении имеем

$$\bar{u}_x = -\frac{1}{c} [g_1 + p g_2] A_\kappa(t), \quad \bar{u}_y = \frac{\operatorname{sgn}(\kappa)}{ic} [\delta_1 g_1 + p \delta_2 g_2] A_\kappa(t) \quad (28)$$

$$\bar{v}_x = \frac{\operatorname{sgn}(\kappa)}{ic} [\delta_1 g_1 + p \delta_2^{-1} g_2] A_\kappa(t), \quad \bar{v}_y = \frac{1}{c} [\delta_1^2 g_1 + p g_2] A_\kappa(t) \quad (29)$$

где  $g_n = \exp[-\kappa \operatorname{sgn}(\kappa) \delta_n y]$ ;  $n = 1, 2$ .

Соотношения (28), (29) позволяют выразить функции  $\overline{F}_{1,2}$ ,  $\overline{G}_{1,2}$ ,  $A_3$ ,  $A_4$  через переменную  $A_K(t)$ . В результате уравнение (24) принимает вид

$$\frac{dA_K}{dt} + i\omega A_K + iK \varepsilon_{\Gamma P} \int ds_K A_{K_1} A_{K_2} + iK \int \varepsilon_{OB}(K, K_1, K_2) A_{K_1} A_{K_2} ds_K = 0, \quad (30)$$

где  $\omega = Kc$ ,  $ds_K = \delta(K - K_1 - K_2) dK_1 dK_2$ ; параметры  $\varepsilon_{\Gamma P}$  и  $\varepsilon_{OB}$  обусловлены соответственно нелинейностью граничных условий (7), (8) и уравнений движения (5), (6);

$$\varepsilon_{\Gamma P} = \left[ \frac{2\delta_2}{c} \tau_1 + \frac{2-c^2}{c} \tau_2 \right] / \Delta_1, \quad (31)$$

$$\varepsilon_{OB} = \left[ (4\delta_1 \delta_2 + 2 - c^2) \tau_3 + 4(2 - c^2) \tau_4 \right] / \Delta_1, \quad (32)$$

$$\tau_1 = (1 - \delta_1^2) \left[ c_3^2 (\delta_1 + \rho \delta_2^{-1}) + 2c_4^2 (\delta_1 + \rho \delta_2) \right],$$

$$\begin{aligned} \tau_2 = & c_1^2 (\delta_1^2 + \rho^2) + c_2^2 (1 + \rho)(1 - \rho - 2\delta_1^2) - c_3^2 (\delta_1 + \rho \delta_2) (\delta_1 + \rho \delta_2^{-1}) - \\ & - c_4^2 \left[ (\delta_1 + \rho \delta_2)^2 + (\delta_1 + \rho \delta_2^{-1})^2 \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{m+2} = & \frac{(-1)^m}{2c^3} \left[ \frac{|K| \omega_{m1} + \delta_1 (|K_1| + |K_2|) \omega_{m2}}{\delta_m |K| + \delta_1 (|K_1| + |K_2|)} + \frac{|K| \omega_{m3} + (|K_1| \delta_1 + |K_2| \delta_2) \omega_{m4}}{\delta_m |K| + \delta_1 |K_1| + \delta_2 |K_2|} \right. \\ & \left. + \frac{|K| \omega_{m5} + (\delta_2 |K_1| + \delta_1 |K_2|) \omega_{m6}}{\delta_m |K| + \delta_2 |K_1| + \delta_1 |K_2|} + \frac{|K| \omega_{m7} + \delta_2 (|K_1| + |K_2|) \omega_{m8}}{\delta_m |K| + \delta_2 (|K_1| + |K_2|)} \right], \end{aligned}$$

$$w_{m1} = [c_1^2 + c_2^2 \delta_1^2 (\delta_1^2 - 2) - \delta_1^2 (c_3^2 + 2c_4^2)] \varkappa_m + \delta_1 (1 - \delta_1^2) (c_3^2 + 2c_4^2),$$

$$w_{m2} = \delta_1 (1 - \delta_1^2) (c_3^2 + 2c_4^2) \varkappa_m + c_1^2 \delta_1^4 + c_2^2 (1 - 2\delta_1^2) - \delta_1^2 (c_3^2 + 2c_4^2),$$

$$w_{m3} = \rho [c_1^2 - \delta_1^2 c_2^2 - \delta_1 \delta_2^{-1} c_3^2 - \delta_1 (\delta_2 + \delta_2^{-1}) c_4^2] \varkappa_m,$$

$$w_{m4} = \rho [c_1^2 \delta_1^2 - c_2^2 - \delta_1 \delta_2^{-1} c_3^2 - \delta_1 (\delta_2 + \delta_2^{-1}) c_4^2],$$

$$w_{m5} = \rho [c_1^2 - c_2^2 (2 - \delta_1^2) - \delta_1 \delta_2 c_3^2 - \delta_1 (\delta_2 + \delta_2^{-1}) c_4^2] \varkappa_m + \rho (1 - \delta_1^2) (\delta_2 c_3^2 - 2\delta_2^{-1} c_4^2),$$

$$w_{m6} = \rho [\delta_1^2 c_1^2 + c_2^2 (1 - 2\delta_1^2) - \delta_1 \delta_2 c_3^2 - \delta_1 (\delta_2 + \delta_2^{-1}) c_4^2] + \\ + \rho (1 - \delta_1^2) (\delta_2^{-1} c_3^2 - 2\delta_2 c_4^2),$$

$$w_{m7} = \rho^2 [c_1^2 - c_2^2 - c_3^2 - c_4^2 (\delta_2^2 + \delta_2^{-2})] \varkappa_m,$$

$$w_{m8} = w_{m7} / \varkappa_m, \quad m = 1, 2,$$

$$\varkappa_1 = \delta_1^{-1}, \quad \varkappa_2 = \delta_2.$$

Структура поляризационных векторов  $\vec{\Phi}_{1,2}$  указывает, что переменная  $A_k(t)$  с точностью до коэффициента  $(1 + \rho)$  совпадает с комплексной амплитудой горизонтальной колебательной скорости рэлеевской волны  $\partial u(k, t) / \partial t \equiv v_1(k, 0, t)$  на поверхности полупространства.

Из соотношения (31) для матричного коэффициента  $\varepsilon_{\Gamma P}$  следует, что связанное с ним нелинейное слагаемое в переменных  $x, t$  имеет вид  $\varepsilon_{\Gamma P} \frac{\partial}{\partial x} A^2(x, t)$ , т.е. совпадает с нелинейным оператором в уравнении простой волны. Слагаемое с коэффициентом  $\varepsilon_{OB}$ , обусловленное нелинейностью уравнений движения, в переменных  $x, t$  порождает нелинейное слагаемое в виде четырехкратного интеграла. Таким образом, для горизонтальной колебательной скорости  $v_1(x, t) = A(x, t)(1 + \rho)$  имеем эволюционное уравнение

$$\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\varepsilon_1}{c^2} \frac{\partial v_1^2}{\partial \tau} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial \tau} \hat{F}_x^{-1} \int dS_k \varepsilon_2(k, k_1, k_2) \hat{F}_{k_1} [v_1] \hat{F}_{k_2} [v_1] = 0, \quad (33)$$

где  $\hat{F}_x^{-1}$  - оператор обратного преобразования Фурье,  $\varepsilon_1 = \varepsilon_{\Gamma P} / (1 + \rho)$ ,  $\varepsilon_2 = \varepsilon_{OB} / (1 + \rho)$ ,  $\tau = t - x/c$ .

### 3. Нелинейные искажения рэлеевской волны

Эволюционное уравнение (33) в первом приближении полностью описывает процесс распространения рэлеевской волны. Рассмотрим искажение рэлеевской волны, синусоидальной при  $x = 0$ :  $v_1(0, t) = v_n \sin(t)$ . В процессе распространения сигнал будет обогащаться высшими гармониками. При чем для любого  $x > 0$  горизонтальную компоненту колебательной скорости можно представить в виде ряда по синусам, задержанным на время  $x/c$

$$v_1(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_{1n}(x) \sin(n\tau), \quad \tau = t - \frac{x}{c}. \quad (34)$$

Генерация именно синусоидальных компонент обусловлена действительностью значений коэффициентов  $E_1$  и  $E_2$ . В результате нелинейных искажений профиль горизонтальной компоненты колебательной скорости будет укрупняться и на некотором расстоянии от источника образуется разрыв. Нелинейные искажения вертикальной компоненты колебательной скорости, имеющей на всех частотах фазовый сдвиг  $\pi/2$  качественно отличаются. При увеличении крутизны профиля горизонтальной компоненты у вертикальной составляющей в каждом периоде растет уединенный выброс (ср. /15/). Положение выброса точно соответствует максимальной крутизне профиля горизонтальной компоненты скорости. В момент образования разрыва функции  $v_1(x, t)$  у вертикальной составляющей образуется логарифмическая особенность. Таким образом, традиционная в сейсмических измерениях вертикальная компонента колебательной скорости имеет нетрадиционный характер нелинейных искажений.

Рассмотрим нелинейные искажения компонент смещений рэлеевской волны. Смещения частиц можно определить интегрированием соответствующей компоненты колебательной скорости. Интегрирование гармонического ряда изменяет фазу всех гармоник на  $\pi/2$ . При этом амплитудный спектр приобретает множитель  $1/n$  ( $n$  - номер гармоники). Следовательно, профиль вертикальной компоненты смещений в процессе нелинейного искажения гармонического у источника сигнала приобретает пилообразную форму. При этом у горизонтальной составляющей смещений в каждом периоде формируется уединенный выброс. Однако разрыв и логарифмическая особенность в компонентах смещений, в от-

личие от колебательных скоростей, не возникает. На спектральном языке это связано с относительно более слабым представлением высокочастотных компонент, что обусловлено множителем  $1/\eta$ . Отсутствие разрыва у вертикальной компоненты смещений  $U$  следует также из уравнений движения, которые получены в предположении сплошности среды. Из непрерывности функции  $U$  следует отсутствие логарифмической особенности у компоненты  $U$ .

В точках полупространства с ненулевой вертикальной координатой  $y$ , компоненты Фурье - спектра поверхностной волны преобразуются множителем, экспоненциально-зависящей от частоты (на поверхности полупространства этот множитель для всех частот тождественно равен единице). Экспоненциальный характер высокочастотной асимптотики спектра сигнала снимает особенности в компонентах вектора колебательной скорости, т.е. в решениях  $\dot{u}(x, y, t)$  и  $\dot{v}(x, y, t)$  при  $y \neq 0$  разрыв и логарифмическая особенность отсутствуют. Таким образом, нелинейные искажения поверхностной волны наиболее сильно проявляются на самой границе  $y = 0$ .

Рассмотрим особенности процесса нелинейного искажения поверхностной волны с точки зрения закона сохранения волновой энергии:

$$v_{11}^2(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_{1n}^2(x)}{n^m} \quad (35)$$

( $m = 1, 0$  - для поверхностной и объемной волны соответственно). Сравним генерацию второй гармоники в поверхностной и объемной волне при условии что амплитуды высших гармоник ( $n \geq 3$ ) тождественно равны нулю. Из соотношения (35) следует, что при малом уровне второй гармоники  $\Delta v_{1,2}$  изменение амплитуды первой гармоники  $\Delta v_{11}$  можно представить в виде

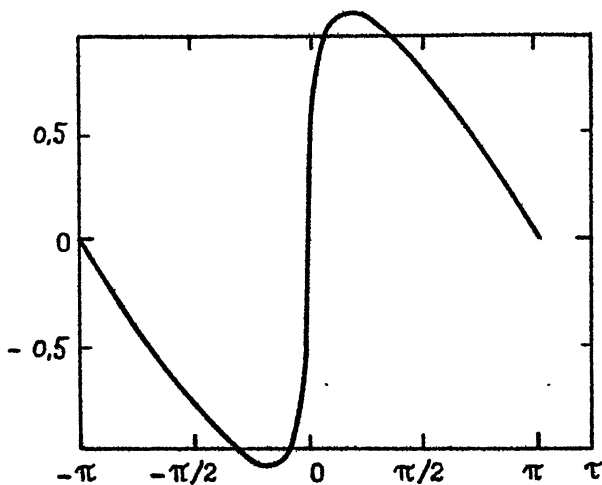
$$\Delta v_{11} = - \frac{\Delta v_{12}^2}{v_{11} 2^m} \quad (36)$$

В результате уменьшение первой гармоники поверхностной волны вдвое меньше соответствующих изменений в объемной волне, что физически обусловлено меньшим проникновением в полупространство поверхностных волн большей частоты. Учет генерации высших гармоник ( $n \geq 3$ ) не приводит к качественным изменениям. Таким образом процесс нели-

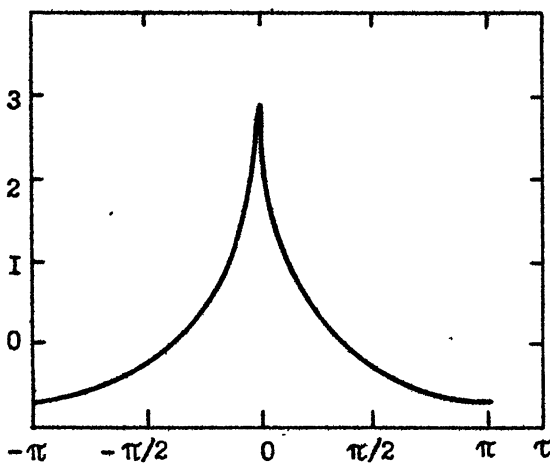
нейного искажения рэлеевской волны должен сопровождаться увеличением плотности волновой энергии на самой поверхности полупространства (возникает поток энергии по вертикальной координате, направленный к границе полупространства). Эффект возрастания плотности волновой энергии вблизи поверхности полупространства сопровождается увеличением размаха в профиле горизонтальной колебательной скорости и соответствующей площади полупериода.

#### 4. Численное решение эволюционного уравнения

Исследуем количественные характеристики нелинейного искажения гармонического у источника сигнала применением численных методов на ЭВМ. Для этого подставим в эволюционном уравнении (33) ряд  $v_1(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_{1n}(x) \sin(n\tau)$ . После разделения по частотам получим бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений для амплитуд гармоник  $v_{1n}(x)$ . Поскольку отсутствуют методы решения бесконечномерных систем уравнений, ограничим число взаимодействующих гармоник номером  $N = 100$ . Система решалась методом Рунге-Кутты пятого порядка. Расчеты были выполнены для среды с параметрами  $\alpha = \beta = \gamma = 100\lambda$ ,  $\lambda = \mu$ : Процесс численного моделирования нелинейного искажения контролировался выполнением закона сохранения энергии. До координаты образования разрыва относительные изменения энергии составляли не более  $10^{-6}$ . На рис. 1, 2 представлены профили компонент скоростей и компонент смещений на поверхности полупространства. Расстояние от источника гармонического сигнала равно приблизительно  $x \approx 0,5 x_p$ ,  $x_p = r / N_p v_{11}$ ,  $N_p = [-3 + 6(\alpha + \beta + \gamma)] / 2(\lambda + 2\mu)$  - параметр нелинейности продольной плоской волны. Величина  $x_p$  равна расстоянию образования разрыва в продольной плоской волне с амплитудой колебательной скорости у гармонического источника равной  $v_{11}$ . Из рис. 1а видно, что размах горизонтальной колебательной скорости вблизи координаты образования разрыва в поверхностной волне увеличивается по сравнению с исходным значением приблизительно на 7%. При этом увеличение соответствующей площади полупериода составляет около 10%. Плотность энергии на поверхности полупространства увеличивается приблизительно на 20%.



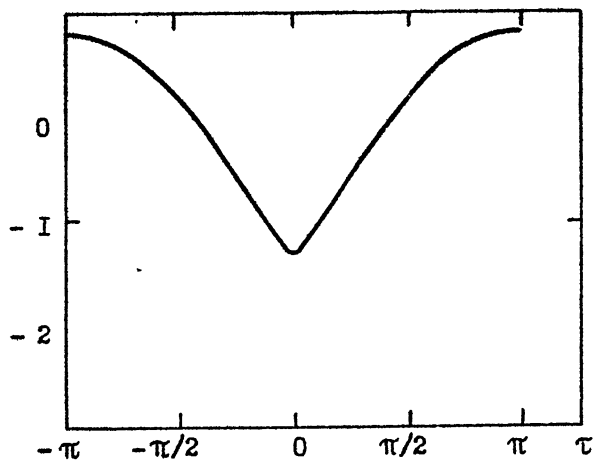
а) Профиль горизонтальной компоненты



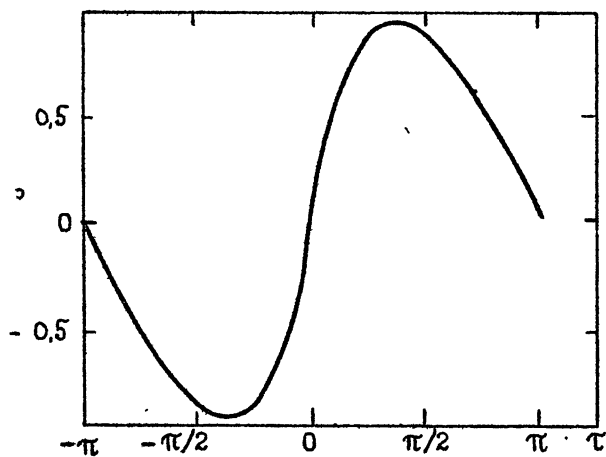
б) Профиль вертикальной компоненты

Рис. 1 Профили колебательных скоростей в волне Рэлея, нормированные к единице при  $x = 0$





а) Профиль горизонтальной компоненты



б) Профиль вертикальной компоненты

Рис. 2. Профили компонент смещений в волне Рэлея, нормированные к единице при  $x = 0$

## Л и т е р а т у р а

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория упругости. - М.: Наука, 1965.
2. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. - М.: Мир, 1977.
3. Блэнд Д. Нелинейная динамическая теория упругости. - М.: Мир, 1972.
4. Викторов И.А. Звуковые поверхностные волны в твердых телах. - М.: Наука, 1981.
5. Kalyanasundaram N. Nonlinear surface acoustic waves on an isotropic solid. - Int.J.Engin.Sci., 1981, v.19, p. 279 - 286.
6. Kalyanasundaram N., Ravindran R., Prasad P. Coupled amplitude theory of nonlinear surface waves. - J.Acoust.Soc.Amer., 1982, v.72, p. 488 - 493.
7. Lardner R.W. Nonlinear surface waves on an elastic solid. - Int.J.Engin.Sci., 1983, v.21, p. 1331 - 1342.
8. Lardner R.W. Nonlinear Rayleigh waves: Harmonic generation, parametric amplification and thermoviscous damping. - J.Appl. Phys., 1984, v.55, p. 3251 - 3260.
9. David E.A. A uniform asymptotic solution for nonlinear surface acoustic waves. - Int.J.Engin.Sci., 1985, v.23, p. 699 - 708.
10. Parker D.F., Talbot P.M. Nonlinear elastic surface waves. - Nonlinear Deformation Waves. Berlin, 1983.
11. Аки К., Ричардс П. Количественная сейсмология. Т. I. - М.: Мир, 1983.
12. Петров В.В. Взаимодействие объемных и поверхностных волн в нелинейных средах. Дис. канд. физ.-мат. наук. - Горький, 1979. - 101 с.
13. Новиков А.А., Сазонтов А.Г. Нелинейная теория взаимодействия гравитационных волн с горизонтальной гидродинамической турбулентностью. - В сб.: Теория океанических процессов. - 1981. - С.103-114.

14. Постников Л.В. К вопросу отыскания и исследования квазигармонических колебаний в слабонелинейных системах. // Изв. вузов. Радиофизика. - 1971. - Т. 14, № . - С. 1700-1707.
15. Островский Л.А., Пелиновский Е.И., Фридман В.Е. Распространение акустических волн конечной амплитуды в неоднородной среде при наличии каустик. // Акуст. ж. - 1976. - Т. 22, № 6. - С.914-921.

Дата поступления статьи

17 февраля 1987 года

**Александр Васильевич Соколов**

**ЭВОЛЮЦИОННОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ВОЛНЫ РЭЛЕЯ  
НА ГРАНИЦЕ ОДНОРОДНОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА**

---

Подписано к печати 23.02.87 г. МЦ 00319. Формат 60x84/16.  
Бумага множительная. Печать офсетная. Объем 1,23 усл.л.  
Заказ 4544. Тираж 120. Бесплатно.

---

Отпечатано на ротативе НИРФИ