

Министерство высшего и среднего специального образования РСФСР

Горьковский ордена Трудового Красного Знамени  
научно-исследовательский радиофизический институт (НИРФИ)

П р е п р и н т № 229

О ПЕРЕХОДНОМ ИЗЛУЧЕНИИ АКУСТИКО-ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН  
ИСТОЧНИКАМИ, ДВИЖУЩИМИСЯ В АТМОСФЕРЕ  
НАД ПОВЕРХНОСТЬЮ ЗЕМЛИ

Г.И.Григорьев  
Н.Г.Денисов  
О.Н.Савина

Г о р ь к и й 1987

Григорьев Г.И., Денисов Н.Г., Савина О.Н.

О ПЕРЕХОДНОМ ИЗЛУЧЕНИИ АКУСТИКО-ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН  
ИСТОЧНИКАМИ, ДВИЖУЩИМИСЯ В АТМОСФЕРЕ НАД ПОВЕРХНОСТЬЮ ЗЕМЛИ.

Горький, Препринт № 229 / НИРФИ, 1987.

13 с.

УДК 534.874.3:621.371.222.1

Анализируется переходное излучение акустико-гравитационных волн и поверхностной волны Ламба линейным источником массы, движущимся по вертикали в изотермической атмосфере над твердой поверхностью Земли. Получены простые представления для структуры фронта объемных возмущений и поверхностных волн. Найдены потери энергии движущегося источника на излучение поверхностных волн.

Существует обширная литература, в которой исследуются различные варианты задач об излучении акустико-гравитационных волн в неоднородной атмосфере [1-9]. Среди них можно выделить работы [8,9], посвященные анализу переходного излучения, возникающего при пересечении источниками границы раздела двух сред. В работе [8] были исследованы пространственные возмущения, генерируемые телом при пересечении границы раздела, без учета возбуждения поверхностных волн. Та же задача с учетом поверхностной волны была рассмотрена в [9].

Основные трудности в решении подобных задач состоят в описании структуры волновых полей. В [10] найдено точное решение задачи о переходном излучении звуковых волн источником, пересекающим границу раздела недиспергирующих сред. В настоящей работе дано детальное исследование структуры акустико-гравитационных и поверхностных волн, генерируемых в атмосфере Земли над жесткой поверхностью вертикально движущимся линейным источником массы. Решение основывается на простом представлении функции Грина, полученной в [4].

Линейные уравнения, описывающие поле источника массы, движущегося с постоянной скоростью в стратифицированном идеальном газе атмосферы, хорошо известны [1]. Для волновой функции

$$\Psi = p \exp(k, z), \quad (1)$$

где  $p$  - отклонение давления от равновесного, эти уравнения имеют вид:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^4 \Psi}{\partial t^4} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\Delta - k_i^2) \Psi - \omega_g^2 \Delta_{\perp} \Psi = \exp(k, z) \left( \omega_g^2 + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \frac{\partial Q}{\partial t}. \quad (2)$$

Здесь  $c = \sqrt{\gamma g H}$  - скорость звука,  $\omega_g = \sqrt{\gamma - 1} g c^{-1}$  - частота Бранта-Вяйсяля,  $\gamma = c_p/c_v$ ,  $g$  - ускорение силы тяжести,  $\Delta$  и  $\Delta_{\perp}$  - полный и поперечный операторы Лапласа,  $k_1 = (2H)^{-1}$ ,  $H$  - высота однородной атмосферы; используется декартова система координат с осью  $z$ , направленной вертикально вверх.

Уравнение (2) следует дополнить граничными условиями на поверхности Земли ( $z = 0$ ), которую мы считаем твердой:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial z} + \frac{2-\gamma}{\gamma} k_1 \Psi = 0. \quad (3)$$

Это условие соответствует нулевым значениям вертикальной скорости среды на границе.

Точечный источник массы, движущийся по вертикали со скоростью  $v$ , запишется в виде:

$$Q = Q_0 \exp(-k_1 z) \delta(x) \delta(y) \delta(z - vt) h(t), \quad (4)$$

где  $\delta(x)$  - дельта-функция Дирака,  $h(t)$  - единичная функция Хевисайда.

Ниже мы рассмотрим упрощенную постановку задачи, в которой источник массы представляет собой бесконечную нить, вытянутую по оси  $y$ , при движении которой генерируются поля, не зависящие от  $y$ . Кроме того, положим  $\gamma = 1$ , что соответствует изотермичности низкочастотных звуковых возмущений или газу с  $c_p/c_v = 1$ . При этом  $\omega_g = 0$  и дисперсионные свойства среды существенно упрощаются.

Для этого случая можно получить точное представление функции Грина уравнения (2). Для правой части вида

$$Q = Q_0 \delta(x) \delta(z - z_0) \delta(t) \quad (5)$$

решение уравнения (2) можно представить в виде суммы трех членов

$$G = G_1 + G_2 + G_3, \quad (6)$$

где  $G_{1,2}$  описывают поля прямого и отраженного от границы раздела

(с коэффициентом отражения  $V = 1$ ) импульсов

$$G_{1,2} = \frac{B}{\omega_A} h\left(t - \frac{R_{1,2}}{c}\right) \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\cos k_1 r_{1,2}}{r_{1,2}} \right), \quad (7)$$

и  $G_3$  - поле импульса, формирование которого связано с наличием поверхностной волны Ламба

$$G_3 = \frac{2Bct}{c^2 t^2 - x^2} \left[ \sin \sqrt{\omega_A^2 t^2 - k_1^2 R_2^2} + \frac{(z+z_0) \cos \sqrt{\omega_A^2 t^2 - k_1^2 R_2^2}}{\sqrt{c^2 t^2 - R_2^2}} \right] h\left(t - \frac{R_2}{c}\right). \quad (8)$$

В формулах (7), (8) введены обозначения:

$$B = \frac{\omega_A c}{2\pi} Q_0, \quad r_{1,2}^2 = c^2 t^2 - [x^2 + (z \mp z_0)^2] = c^2 t^2 - R_{1,2}^2.$$

Используя приведенные выше функции Грина, можно теперь записать поле линейного источника массы, движущегося с постоянной скоростью  $v$  вертикально вверх (вдоль оси  $Z$ ) от жесткой границы  $Z = 0$ . Такой источник (см. (4)) генерирует объемное возмущение, состоящее из прямого и отраженных от границы  $Z = 0$  сигналов, в соответствии с принятым разделением функции Грина. Так, объемное возмущение, соответствующее  $G_1$ , будет равно

$$\psi_1 = \begin{cases} \frac{B}{\omega_A} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{t^2} \frac{\cos k_1 s_+(t')}{s_+(t')} dt', & t \geq \frac{R}{c} \\ 0, & t < \frac{R}{c}, \quad R = \sqrt{x^2 + z^2} \end{cases}, \quad (9)$$

где

$$s_{\pm}^2 = c^2(t-t')^2 - x^2 - (z \mp vt')^2. \quad (10)$$

Область интегрирования определяется условием  $c(t-t') > \sqrt{x^2 + (z \mp vt')^2}$ , тогда  $t_2$  - один из корней уравнения  $s_+(t') = 0$ :

$$t_{1,2} = \frac{c^2 t - vz \pm \sqrt{(c^2 t - vz)^2 + (R^2 - c^2 t^2)(c^2 - v^2)}}{c^2 - v^2}. \quad (11)$$

После некоторых преобразований интеграл, входящий в (9), можно представить в виде:

$$I = \frac{1}{\sqrt{c^2 - v^2}} \int_{\beta}^{\alpha} \frac{\cos(k, \sqrt{c^2 - v^2} \sqrt{u^2 - \beta^2})}{\sqrt{u^2 - \beta^2}} du, \quad (12)$$

$$\alpha = (t_1 + t_2)/2, \quad \beta = (t_1 - t_2)/2.$$

Сразу же можно выделить стационарное поле движущегося источника в безграничной среде, представляя (12) суммой

$$\begin{aligned} \psi_1 = & \frac{B}{\omega_A \sqrt{c^2 - v^2}} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \int_{\beta}^{\infty} \frac{\cos(k, \sqrt{c^2 - v^2} \sqrt{u^2 - \beta^2})}{\sqrt{u^2 - \beta^2}} du + \right. \\ & \left. + \int_{-\infty}^{\alpha} \frac{\cos(k, \sqrt{c^2 - v^2} \sqrt{u^2 - \beta^2})}{\sqrt{u^2 - \beta^2}} du \right], \quad (13) \end{aligned}$$

в которой первый интеграл представляет функцию Макдональда

$K_0(k, \beta \sqrt{c^2 - v^2})$ . Легко показать, что эта часть решения зависит от  $z$  и  $t$  через комбинацию  $z - vt$ . Вторая часть решения (13) описывает, следовательно, переходный процесс установления стационарного поля движущегося источника.

Аналогичное решение, соответствующее функции Грина  $G_2$ , может быть получено из (12) или (13) заменой  $v$  на  $-v$ . Это решение описывает поле движущегося источника-"изображения". По этой причине мы остановимся лишь на исследовании поля  $\psi_1(\vec{R}, t)$ .

Заменой переменной интеграл (12) сводится к виду:

$$I = \int_0^{\omega_A \sqrt{t^2 - R^2/c^2}} \frac{\cos u \, du}{\sqrt{u^2 + \omega_A^2 \beta^2 (1 - M^2)}}, \quad (14)$$

$$M = v/c, \quad t > R/c,$$

удобному для численных расчетов и анализа структуры возмущения вблизи фронта  $t = R/c$ . При  $\omega_A \sqrt{t^2 - R^2/c^2} \ll 1$  имеем:

$$I \sim \frac{\sqrt{1-M^2}}{R-zM} \sqrt{t^2 - \frac{R^2}{c^2}}. \quad (15)$$

Суммируя решение (12) с аналогичным ему решением для источника-"изображения", найдем структуру фронта объемного возмущения:

$$\psi_1 + \psi_2 = \frac{2B}{\omega_A} \frac{R}{R^2 - z^2 M^2} \frac{\partial}{\partial t} \sqrt{t^2 - \frac{R^2}{c^2}}, \quad t \gg \frac{R}{c}. \quad (16)$$

Далеко за фронтом сигнала ( $d = \omega_A \sqrt{t^2 - R^2/c^2} \gg 1$ ) решение (13) может быть представлено суммой стационарного поля движущегося источника и поля переходного излучения

$$\psi_1 \approx \frac{B}{\omega_A \sqrt{1-M^2} c} \frac{\partial}{\partial t} \left[ K_0(\omega_A \beta \sqrt{1-M^2} d) + \frac{\sin d}{\sqrt{d^2 + \omega_A^2 \beta^2 (1-M^2)}} \right], \quad (17)$$

где

$$\beta = \frac{\sqrt{(z-vt)^2 + x^2(1-M^2)}}{c(1-M^2)} \quad (18)$$

и отброшены слагаемые, убывающие быстрее чем  $t^{-1}$ . Вторая часть решения, соответствующая стартующему источнику-"изображению", получается из (17) заменой  $v$  на  $-v$ . Таким образом, приближенное представление переходного излучения далеко за фронтом выражается удвоенным значением второго слагаемого в формуле (17).

Приведенные выше формулы достаточно полно описывают структуру простейшего типа возмущения, создаваемого движущимся источником. Перейдем теперь к основной части поставленной задачи, то есть к анализу возмущений типа поверхностных волн.

Функция Грина таких возмущений определяется формулой (8), с помощью которой легко найти соответствующее поле  $\psi_3$ , создаваемое движущимся источником (4):

$$\psi_3 = 2B \int_0^{t_2} \frac{c(t-t')}{c^2(t-t')^2 - x^2} \left( \sin k_1 s_- + \frac{z+vt'}{s_-} \cos k_1 s_- \right) dt', \quad (19)$$

где  $S_-$  определяется формулой (10),  $t_2^-$  - один из корней уравнения  $S_-(t') = 0$ , получающийся из  $t_2$  в (II) заменой знака у скорости  $v$ .

Полученное представление  $\Psi_3$  дает возможность установить структуру фронта аналогично тому, как это было сделано при анализе функций  $\Psi_{1,2}$ . Простые расчеты при малых  $d = \omega_A \sqrt{t^2 - R^2/c^2}$ , то есть вблизи фронта сигнала, приводят к следующему результату:

$$\Psi_3 \approx \frac{2Bt\sqrt{t^2 - R^2/c^2}}{(t^2 - x^2/c^2)(R + Mz)} \left[ \frac{z}{c} + \frac{\omega_A}{3} \left( 1 + \frac{k_1 z}{2} \right) \left( t^2 - \frac{R^2}{c^2} \right) \right]. \quad (20)$$

В отличие от объемного возмущения (16), имеющего разрыв на фронте сигнала, функция  $\Psi_3$  начинается с нулевых значений, что приводит, в частности, к конечному значению потерь на излучение поверхностных волн (см. ниже).

Можно получить сравнительно простое представление поля  $\Psi_3$  для малых скоростей движения источника ( $M \rightarrow 0$ ). Главная часть этого возмущения описывается формулой (19) при  $v = 0$ :

$$\Psi_{30} = \frac{2B}{c} \int_0^d \frac{q dq}{q^2 + k_1^2 z^2} \left( \sin q + \frac{k_1 z}{q} \cos q \right) = \frac{B}{ic} \int_{-d}^d \frac{\exp(iq)}{q - ik_1 z} dq, \quad (21)$$

$$q = k_1 s_-$$

и может быть выражена через известную табулированную функцию:

$$\Psi_{30} = \frac{2B}{c} \exp(-k_1 z) \left[ \pi + \text{Im} E_1(-k_1 z + id) \right], \quad t \geq \frac{R}{c}, \quad (22)$$

где  $E_1$  - интегральная показательная функция:

$$E_1(\zeta) = \int_{\zeta}^{\infty} t^{-1} \exp(-t) dt.$$

Асимптотическое представление  $E_1(\zeta)$  при больших значениях аргумента дает возможность представить поле  $\Psi_3$  далеко за фронтом  $t = R/c$  в виде:

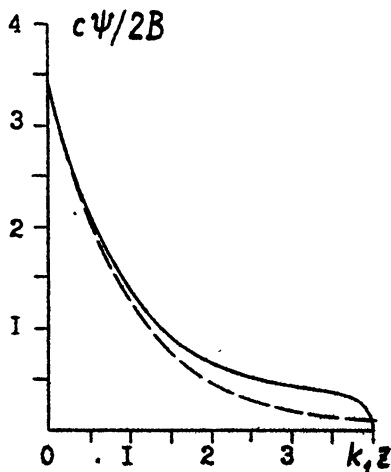


$$\psi_3 = \frac{2B}{c} \left( \pi \exp(-k_1 z) + \frac{k_1 z \sin d - d \cos d}{\omega_A^2 t^2 - k_1^2 x^2} \right). \quad (23)$$

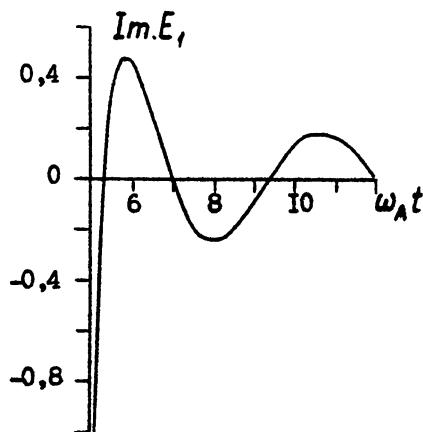
Как показывает анализ полученных формул, поле  $\psi_{30}$ , создаваемое источником массы, лежащим на границе раздела ( $z = 0$ ) и включившимся в момент времени  $t = 0$ , внутри цилиндра радиуса  $R = ct$ , имеет структуру близкую к структуре поверхностной волны - резкое убывание при удалении от границы и осцилляции по оси  $x$ .

Для иллюстрации на рис.1 приведено нормированное распределение поля  $\psi_{30}$  по высоте  $z$  при фиксированных значениях  $x$  ( $k_1 x = 3$ ) и времени ( $\omega_A t = 5$ ). Для сравнения пунктиром построена экспоненциальная структура поверхностной волны  $\psi_{30}(0) \exp(-k_1 z)$ . Рис.2 показывает временную структуру возмущения (второе слагаемое в квадратных скобках в (22)) при фиксированных  $x$  ( $k_1 x = 5$ ) и  $z$  ( $k_1 z = 0,5$ ). Как видно из формулы (22), зависимость от времени передает горизонтальную структуру возмущений.

Остановимся теперь на расчетах потерь энергии  $E$  (обусловленных наличием в системе поверхностных волн). Эта энергия может быть



Р и с . 1



Р и с . 2

вычислена по известной формуле:

$$E = \iint_{-\infty}^{+\infty} dt dx \int_0^{\infty} \frac{P_3(\vec{r}, t)}{\rho_0(z)} Q(\vec{r}, t) dz, \quad (24)$$

где давление  $p_3 = \Psi_3 \exp(-k_1 z)$ ,  $\rho_0(z)$  - равновесная плотность атмосферы. Используя точное выражение для функции  $\Psi_3$  (I9), получим после интегрирования по  $x$  и  $z$ :

$$E = \frac{2BQ_0}{c\rho_s} \int_0^{\infty} \int_0^{t_0} \frac{dt dt'}{i-t'} \left[ \sin A_1 + \frac{\omega_A M(t+t')}{A_1} \cos A_1 \right],$$

$$A_1 = \omega_A \sqrt{(t-t')^2 - M(t+t')^2}, \quad t_0 = \frac{1-M}{1+M} t.$$

В новых переменных  $\xi = \omega_A(t-t')/2$ ,  $\eta = \omega_A(t+t')/2$  этот результат запишется в виде:

$$E = \frac{2BQ_0}{c\omega_A\rho_s} \int_0^{\infty} \frac{d\xi}{\xi} \int_0^{\xi/M} d\eta \left( \sin 2\sqrt{\xi^2 - M^2\eta^2} + M\eta \frac{\cos 2\sqrt{\xi^2 - M^2\eta^2}}{\sqrt{\xi^2 - M^2\eta^2}} \right)$$

и после вычисления двойного интеграла получим для экспоненциальной атмосферы ( $\rho_0(z) = \rho_s \exp(-2k_1 z)$ ):

$$E = \frac{Q_0^2}{2M\rho_s}. \quad (25)$$

Этот результат аналогичен тому, который был получен в [II] для потерь энергии на генерацию поверхностных волн электрическим зарядом, пересекающим границу раздела двух сред. Рост потерь при  $M \rightarrow 0$  в [II] объясняется тем, что при малых скоростях источника увеличивается время его пребывания в зоне формирования переходного излучения. Вместе с тем, в рассматриваемом здесь акустическом случае, учитывая, что полный расход массы

$$Q_n = \int Q(\vec{r}, t) dx dz dt = \frac{Q_0}{\omega_A M}$$

неограниченно растет при  $M \rightarrow 0$ , целесообразно рассмотреть источники с одинаковым полным расходом массы, при различных скоростях движения. При этом имеем  $Q_0 = \omega_A M Q_n$  и полные потери будут равны

$$E = \frac{\omega_A^2 Q_n^2}{2\rho_s} M, \quad (26)$$

то есть уменьшаются с уменьшением скорости.

Существует другой, традиционно используемый, метод нахождения возмущений типа поверхностных волн, основанный на приближенном решении задачи. При этом в интегральном представлении решения уравнения (2) с источником (4)

$$\psi_3 = \frac{ik_1 Q_0}{4\pi^2 v} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-i\infty+\alpha}^{i\infty+\alpha} \frac{s \exp(i\Gamma z + ikx + st)}{\Gamma(\Gamma - ik_1)(s/v - i\Gamma)} dk ds, \quad (27)$$

$$\Gamma^2 = -(s^2/c^2 + k^2 + k_1^2),$$

в интеграле по  $s$  выделяется вычет подынтегральной функции в полюсе коэффициента отражения  $s = -ikc$ . После интегрирования по  $k$  это дает

$$\psi_3 \approx \omega_A Q_0 \exp[-k_1 z - k_1 M(ct - x)] h(ct - x). \quad (28)$$

Полученное таким способом решение, справедливое при любых  $M$ , отличается от более строгого (19). Оно экспоненциально спадает от границы с ростом высоты и имеет характер распространяющегося вдоль оси  $X$  импульса. Использование этого приближенного представления поля поверхностной волны в соотношении (24) дает величину полных потерь энергии  $E = Q_0^2 / 2M\rho_s$ , совпадающую с результатом точного расчета (25). Такой же результат получается путем подсчета полного потока энергии, переносимого поверхностной волной (28).

Как видно, приближенное решение (28) задачи о переходном излучении движущегося источника массы хотя и не удовлетворяет принципу причинности, но дает правильный результат при подсчете энергетических потерь.

Таким образом, на примере рассмотренной выше системы, обладающей дисперсией, дана достаточно полная картина объемных и поверхностных акустико-гравитационных волн в экспоненциальной атмосфере, генерируемых движущимся источником массы. Получены простые формулы, описывающие структуру поля этих возмущений, что позволило, в частности, оценить качество известных ранее приближенных решений.

## Л и т е р а т у р а

1. Григорьев Г.И., Докучаев В.П. Механизмы генерации акустико-гравитационных волн в атмосфере Земли. - Изв.вузов - Радиофизика, 1978, т.21, № 7, с.945-950.
2. Григорьев Г.И., Савина О.Н., Сомсиков В.М., Троицкий Б.В. О механизмах генерации акустико-гравитационных волн. - В сб.: Волновые возмущения в атмосфере. Алма-Ата: Наука КазССР, 1980, с.5-15.
3. Liu C.H., Yeh K.C. Excitation of acoustic-gravity waves in an isothermal atmosphere. - Tellus, 1970, 23, N 2, p.150-163.
4. Григорьев Г.И., Денисов Н.Г., Савина О.Н. Излучение акустико-гравитационных волн и поверхностной волны Ламба в изотермической атмосфере. - Изв.вузов - Радиофизика, 1987, т.30, № 2.
5. Cole J.D., Greifinger C. Acoustic-gravity waves from an energy source at the ground in an isothermal atmosphere. - JGR, 1969, 74, N 14, p.3693-3703.
6. Dickinson K.E. Propagators of atmospheric motions. - Rev. Geophys., 1969, 7, N 3, p.483-538.
7. Keller J.B., Levy D.M., Ahluwalia D.S. Internal and surface wave production in a stratified fluid. - Wave Motion, 1981, 3, p.215-229.
8. Григорьев Г.И., Савина О.Н. Переходное излучение акустико-гравитационных волн. - Изв.вузов - Радиофизика, 1983, т.26, № 2, с.135-141.

9. Дзангирян Р.Г., Костянян Ф.А. Переходное излучение внутренних волн на границе экспоненциально стратифицированных сред. - Изв. АрмССР, Физика, 1984, т.19, № 5, с.245-248
10. Немцов Б.Е., Разин А.В. Излучение звука источником массы, пересекающим границу раздела сред. - Препринт НИРФИ № 221, 1986, 37 с.
11. Эйдман В.Я. Излучение поверхностной волны зарядом, проходящим границу раздела двух сред. - Изв.вузов - Радиофизика, 1965, т.8, № 2, с.188-190.

Дата поступления статьи  
12 марта 1987 г.

Геннадий Иванович Григорьев  
Николай Григорьевич Денисов  
Ольга Николаевна Савина

О ПЕРЕХОДНОМ ИЗЛУЧЕНИИ АКУСТИКО-ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН  
ИСТОЧНИКАМИ, ДВИЖУЩИМИСЯ В АТМОСФЕРЕ  
НАД ПОВЕРХНОСТЬЮ ЗЕМЛИ

---

Подписано к печати 18.03.87 г. МЦ 00303. Формат 60x84/16.

Бумага множительная. Печать офсетная. Объем 0,87 усл. печ. л.

Заказ 4554, Тираж 120. Бесплатно.

---

Отпечатано на ротатристе НИРФИ