Министерство высшего и среднего специального образования
Р С Ф С Р

Горьковский ордена Трудового Красного Знамени
научно-исследовательский радиофизический институт (НИРФИ)

Препринт № 238

МЕТОД СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ И ВЕКТОРОВ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СПЕКТРАЛЬНЫХ ЛИНИЙ ПОГЛОЩЕНИЯ И ИЗЛУЧЕНИЯ

Кнафель А.И.

Горький 1987

К н а ф е л ь А. И.

МЕТОД СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ И ВЕКТОРОВ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СПЕКТРАЛЬНЫХ ЛИНИЙ ПОГЛОЩЕНИЯ И ИЗЛУЧЕНИЯ. Г о р ь к и й, Препринт № 238 / НИРФИ, 1987. - II с.

УДК 543.42

Рассматривается метод определения положения линий поглощения и излучения по измеренным значениям корреляционной последовательности. Метот основывается на анализе собственных векторов и собственных чисел. Рассмотрено влияние шумов и показана высокая разрешающая способность метода.

Для решения практически часто встречающейся задачи нахождения спектральной плотности мощности по известным на ограниченном интервале задержек значениям корреляционной функции (т.н. корреляционной последовательности) в последнее время все чаще используются нелинейные методы типа метода максимальной энтропии, метода Писаренко и пр. /I/, часто позволяющие более эффективно идентифицировать особенности спектра (например, разделять спектральные линии) по сравнению с классическими методами анализа временных рядов /2/. В ряде случаев приходится сталкиваться с ситуацией, когда в реконструируемом спектре могут содержаться как линии излучения, так и линии поглощения ; поскольку интегральная мощность часто определяется с точностью до константы (или , что то же самое, не определяется значение корреляционной функции при нулевой задержке), при наличии линий поглощения реконструируемый спектр может оказаться неположительным; тем самым упомянутые выше нелинейные методы оказываются непригодными, т.к в них существенно используется информация о положительной определенности корреляционной последовательности. Ниже предлагается эффективный алгоритм реконструкции спектральной плотности мощности, содержащий как линии излучения, так и линии поглощения.

Будем дополнительно предполагать, что линии спектра достаточ- узкие, так что их шириной можно пренебречь (т.е. форма отдельной линии описывается δ -функцией Дирака). Тогда реконструируемый спектр $S(x)$ может быть представлен в виде

$$S(x) = B + \sum_{k=1}^{M} P_k \delta(x-\beta_k) - \sum_{n=1}^{L} A_n \delta(x-\alpha_n), \qquad (I)$$

$x \in [-\pi, \pi]$ - безразмерная частота, пропорциональная отношению частоты к ширине полосы анализа, L - число линий поглощения, M - излучения, B - постоянный уровень, P_k и β_k - интенсивность и положение в спектре линий излучения, A_n и α_n - интенсивность и положение линий поглощения.

Задача заключается в определении параметров B, P_k, β_k, M, A_k, α_k, L по известной корреляционной последовательности

$$\Phi_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S(x) e^{-ixn} dx. \qquad (2)$$

Построим корреляционную матрицу Φ. Она будет эрмитова и теплицева:

$$\Phi = \| \Phi_{n-m} \|; \; n = 0, \dots, N; \; m = 0, \dots, N; \; \Phi_{-n} = \Phi_n^*,$$

$*$ - знак комплексного сопряжения. Вычислим все собственные числа λ_k и соответствующие собственные вектора V_k; $k = 0, 1, \dots, N$ собственные числа расположим в порядке невозрастания

$$\lambda_0 \geq \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_N.$$

Теорема I. Собственные числа корреляционной матрицы, соответствующей спектру (I), разделятся на три группы:

$N+1-M-L$ - равных чисел (т.е. одно собственное число $\lambda^{кр}$ будет иметь кратность вырождения, равную $N+1-M-L$); $\lambda^{кр} = B$;

L - чисел $\lambda_{N-L+1}, \dots, \lambda_N$ меньших $\lambda^{кр}$ и, в общем случае, различных; эти числа отвечают линиям поглощения;

M — чисел $\lambda_0, \dots, \lambda_{M-1}$ больших $\lambda^{кр}$, также в общем случае различных, соответствующих линиям излучения.

Доказательство теоремы приведено в приложении А.

На основе известных теорем /3/ несложно показать, что при $N+1 > 2(L+M)$ собственное число с наибольшей кратностью вырождения определяет параметр B : $\lambda^{кр} = B$, количество собственных чисел, меньших B, определяет L, а количество собственных чисел, больших B, определяет M. Для отыскания положений линий в спектре рассмотрим комплексный полином G_K степени N, коэффициентами которого будут компоненты собственного вектора V_K :

$$G_K = \sum_{n=0}^{N} V_K^n z^n, \tag{3}$$

где V_K^n — n-ая компонента K-ого собственного вектора. Тогда можно показать, что

$$\begin{gathered} G_K(e^{i\alpha_m}) = 0, \quad m = 1,2,\dots,L, \\ G_K(e^{i\beta_n}) = 0, \quad n = 1,2,\dots,M, \\ K = M, M+1, \dots, N-L, \end{gathered} \tag{4}$$

то есть всем линиям в спектре соответствуют нули полиномов, отвечающих вырожденному собственному значению, расположенные на единичной окружности в комплексной плоскости. При этом положения линий в спектре определяется фазами этих нулей. Зная положение линий, их интенсивности можно найти, решая систему линейных уравнений.

Коротко рассмотрим случай слабых шумов при измерениях корреляционной последовательности. Пусть результатом измерения значения корреляционной функции является $\tilde{\Phi}_n$:

$$\tilde{\Phi}_n = \Phi_n + \xi_n , \quad \tilde{\Phi}_{-n} = \tilde{\Phi}^*_n ; \quad n = 0,1,\ldots,N , \qquad (5)$$

где ξ_n - независимые, нормально распределенные случайные величины

$$\langle \xi_n \rangle = 0, \ \langle \xi_n \xi_m \rangle = 0 ; \ \langle \xi_n \xi^*_m \rangle = \sigma^2_\xi \delta_{n,m} . \qquad (6)$$

Определим возмущенные собственные числа $\tilde{\lambda}_K$ и вектора $\tilde{V}_K$ матрицы $\tilde{\Phi}$. Из-за наличия шума в эксперементальных данных вырождение собственного числа λ^{KP} снимается и мы получим $N+1-L-M$ близких собственных чисел. Для оценки их разброса представим матрицу Φ в виде (AI) и будем считать, что $B=0$. Определим собственные значения $\tilde{\lambda}_i$ возмущенной матрицы $\tilde{\Phi}$, где $\tilde{\Phi}_n$ определена в (5). Рассмотрим возмущение первого порядка нулевого собственного значения $\tilde{\lambda}_i$, $i = M, M+1, \ldots, N-L$ в соответствии с /3/. В этом случае $\tilde{\lambda}_i$ будут ненулевыми собственными значениями матрицы D : $D = Z_{\parallel} \xi Z_{\parallel}$, где $\xi = \| \xi_{n-m} \|$;

$$Z_{\parallel} = \sum_{K=M}^{N-L} V_K V^*_K = I - \sum_{K=0}^{M-1} V_K V^*_K - \sum_{K=N-L+1}^{N} V_K V^*_K .$$

Тогда можно показать, что

$$\frac{1}{N+1-M-L} \left\langle \sum_{i=M}^{N-L} \tilde{\lambda}_i \right\rangle = \frac{1}{N+1-M-L} \left\langle \sum_{n=0}^{N} D_{nn} \right\rangle = 0 ,$$

$$\frac{1}{N+1-M-L} \left\langle \sum_{i=M}^{N-L} \tilde{\lambda}^2_i \right\rangle = \frac{1}{N+1-M-L} \left\langle \sum_{n=0}^{N} (Z_{\parallel} \xi Z_{\parallel} \xi Z_{\parallel})_{nn} \right\rangle =$$

$$= \frac{1}{N+1-M-L} \left\langle \sum_{n=0}^{N} \left[(Z_{\parallel} \xi \xi Z_{\parallel})_{nn} - \left(Z_{\parallel} \xi \left(\sum_{K=0}^{M-1} V_K V^*_K + \sum_{K=N-L+1}^{N} V_K V^*_K \right) \xi Z_{\parallel} \right)_{nn} \right] \right\rangle \geq$$

$$\geq \frac{1}{N+1-M-L} \left\langle \sum_{n=0}^{N} (Z_{\parallel} \xi \xi Z_{\parallel})_{nn} \right\rangle = \sigma^2_\xi (N+1) .$$

Таким образом получаем, что разброс возмущенных собственных чисел $\tilde{\lambda}_i$; $i = M, M+1, \ldots, N-L$ оценивается следующим образом:

$$\left\langle \frac{1}{N+1-M-L} \sum_{i=M}^{N-L} (\tilde{\lambda}_i) \right\rangle = \lambda^{KP} = B ,$$

$$\sigma_\lambda^2 = \left\langle \frac{1}{N+1-M-L} \sum_{i=M}^{N-L} (\tilde{\lambda}_i - B)^2 \right\rangle \leq \sigma_\xi^2 (N+1). \tag{7}$$

Таким образом, в случае слабых шумов собственные числа опять разделятся на три группы, но вырождение λ^{KP} снимается и вместо одинаковых значений мы получим $N+1-M-L$ собственных значений, лежащих в интервале шириной $\approx 2a\sigma_\xi^2(N+1)$, где $a \sim 2 \div 5$.

Определим B как среднее этих значений, а L и M — также, как это делалось выше при отсутствии шумов.

Для определения положений линий рассмотрим влияние шумов на собственные вектора $V_0, \ldots, V_N$. Заметим, что при отсутствии шумов $V_M, V_{M+1}, \ldots, V_{N-L}$ были определены неоднозначно, т.к. соответствовали вырожденному собственному значению (но равенства (4) выполнялись для любого набора векторов); теперь мы получаем однозначно определенную систему векторов, что говорит о достаточно сильной зависимости их от шумов. Как показано в /4/, наиболее устойчивыми к шумам являются вектора, отвечающие хорошо отделенным собственным значениям. В рассматриваемой задаче такими числами могут быть $\lambda_0, \ldots, \lambda_{M-1}, \lambda_{N-L-1}, \ldots, \lambda_N$. Нетрудно показать выполнение следующего тождества:

$$\sum_{K=0}^{N} V_K^{0*} V_K = e_0, \quad e_0 = \{1, 0, \ldots, 0\}^{\tau}. \tag{8}$$

Поэтому можно предположить, что наиболее устойчивой к шумам будет линейная комбинация $V_M, V_{M+1}, \ldots, V_{N-M}$, определяемая невырожденными собственными числами; например, по аналогии с методом максимальной энтропии

$$R = \sum_{K=M}^{N-L} V_K^{0*} V_K \equiv e_0 - \left(\sum_{K=0}^{M-1} V_K^{0*} V_K + \sum_{K=N-L+1}^{N} V_K^{0*} V_K \right). \tag{9}$$

Тогда в качестве полинома для определения положения линий в спектре можно выбрать полином G :

$$G(z) = \sum_{k=M}^{N-L} V_k^{0*} G_k(z), \tag{10}$$

где $G_k(z)$ определено согласно (3).

Можно предположить, что корни полинома G, лежащие вблизи единичной окружности, будут соответствовать линиям в спектре; тогда в качестве оценки положения линий в спектре можно принять положения максимумов функции

$$P(x) = \frac{1}{|G(e^{ix})|^2} . \tag{11}$$

Зная положение линий, интенсивности их можно найти из системы линейных уравнений, как и в случае отсутствия шума.

Результаты данной работы были подтверждены машинным моделированием, показавшим высокую разрешающую способность данного метода.

Рассматривалась следующая модельная задача: две одинаковых линии излучения с шумами:

$$\Phi_n = -e^{-i\cdot 0{,}15\cdot n} + e^{-i\cdot 0{,}35\cdot n} + \xi_n,$$

$$n = 0, 1, \dots, 7; \qquad \sigma_\xi = 0{,}1.$$

Из (7) получили $\sigma_\lambda = 0{,}28$.

Одна из реализаций дает следующие собственные числа (минимальное собственное число считается равным 0):

$\lambda_0 = 0;$ $\lambda_1 = 3{,}5;$ $\lambda_2 = 3{,}65;$ $\lambda_3 = 3{,}82;$ $\lambda_4 = 3{,}89;$
$\lambda_5 = 3{,}97;$ $\lambda_6 = 4{,}22;$ $\lambda_7 = 7{,}27.$

В интервал $3\sigma_\lambda = 0{,}84$ попадают $\lambda_1, \dots, \lambda_6$. То есть достоверно мы получаем два источника. Если считать, что λ_0 – отвечает линии поглощения, λ_7 – линии излучения, то из (11) при $L = 1$, $M = 1$ мы получим два максимума, правильно отражающие положение линий.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Корреляционную матрицу, соответствующую (I), можно представить в следующем виде:

$$\Phi = \sum_{k=1}^{M+L} R_k t_k t_k^* + BI , \qquad (AI)$$

где

$$R_k = \frac{1}{2\pi} \begin{cases} P_k , & k = 1,2,\dots,M \\ -A_{k-M} , & k = M+1,\dots,M+L \end{cases} ,$$

I – единичная матрица, t_k – вектор столбец;

$$t_k^* = \{1, e^{i\gamma_k}, \dots, e^{iN\gamma_k}\} ,$$

$(*)$ – означает транспонирование и комплексное сопряжение;

$$\gamma_k = \begin{cases} \beta_k , & k = 1,2,\dots,M \\ \alpha_{k-M} , & k = M+1,\dots,M+L \end{cases} .$$

Кроме того, будем считать, что $B = 0$, так как при $B \neq 0$ собственные вектора не меняются, а все собственные числа меняются на B.

Для доказательства теоремы I предварительно докажем следующую лемму:

Лемма: Матрица Φ, определенная в (AI), при $B = 0$ имеет ранг $M+L$.

Рассмотрим собственный вектор θ, отвечающий нулевому собственному числу

$$\Phi\theta = \sum_{k=1}^{M+L} R_k (t_k^* \theta) t_k = 0 .$$

Так как вектора t_k линейно независимы и $R_k \neq 0$, то $t_k^* \theta = 0$, $k = 1,2,\dots, M+L$.

Существует ровно $N+1-M-L$ линейно-независимых векторов, удовлетворяющих этим условиям. Значит /3/, кратность вырождения нулевого собственного значения равна $N+1-M-L$ и ранг матрицы Φ. равен $M+L$.

Докажем теперь теорему I.

Доказательство будем проводить по индукции по L – количеству линий поглощения. Пусть L = I. Представим Φ в следующем виде:

$$\begin{aligned} &\Phi = \Phi_1 + \mu R_{M+1} t_{M+1} t^*_{M+1}, \\ &\Phi_1 = \sum_{k=1}^{M} R_k t_k t^*_k ; \\ &R_k > 0, \quad k = 1,2,\ldots,M ; \quad R_{M+1} < 0, \end{aligned} \qquad (A2)$$

μ – некоторое положительное число. Расположим собственные числа $\tilde{\lambda}_i$ матрицы Φ_1 в порядке невозрастания. Тогда /5/:

$$\tilde{\lambda}_0 \geq \tilde{\lambda}_1 \geq \ldots \geq \tilde{\lambda}_{M-1} > \tilde{\lambda}_M = \ldots = \tilde{\lambda}_N = 0 .$$

Собственные числа $\lambda_i(\mu)$ матрицы Φ как функции μ, можно представить в следующем виде /4, с.I00/

$$\lambda_i = \tilde{\lambda}_i + \rho_i \mu R_{\mu+1}(N+1), \qquad (A3)$$

где $0 \leq \rho_i \leq 1$, $i = 0,1,\ldots,N$.

Если взять $\mu \leq \mu_0 = \frac{1}{2}\lambda_{M-1} / |R_{M+1}|(N+1)$, тогда из леммы и (A3) получим

$$\lambda_0(\mu) \geq \lambda_1(\mu) \geq \ldots \geq \lambda_{M-1}(\mu) > \lambda_M(\mu) = \ldots = \lambda_{N-1}(\mu) = 0 > \lambda_N(\mu) \qquad (A4)$$
$$0 < \mu \leq \mu_0$$

Таким образом, при L = I теорема доказана для $\mu \leq \mu_0$.

Необходимо даказать выполнение неравенств (A4) для μ = I. Будем увеличивать μ от μ_0 до I. Предположим, что существует значение $\mu = \mu_1$, при котором (A4) не выполняется. Как следует из /3/, $\lambda_i(\mu)$, $i = 0,1,\ldots,N$ являются аналитическими функциями μ. Рассмотрим окрестность точки μ_1. При $\mu < \mu_1$ мы имеем:

$$\begin{aligned} &\lambda_i(\mu) > 0, \qquad i = 0,1,\ldots,M-1, \\ &\lambda_i(\mu) = 0, \qquad i = M, M+1,\ldots,N-1, \\ &\lambda_N(\mu) < 0 . \end{aligned}$$

Из аналитичности функций получим

$$\lambda_i(\mu_1) \geq 0, \qquad i = 0,1,\ldots,M-1,$$
$$\lambda_i(\mu_1) = 0, \qquad i = M, M+1,\ldots,N-1,$$
$$\lambda_N(\mu_1) \leq 0.$$

Но, учитывая утверждение леммы, получим строгие неравенства

$$\lambda_N(\mu_1) < 0; \quad \lambda_i(\mu_1) > 0, \quad i = 0,1,\ldots, M-1,$$

откуда немедленно следует, что в некоторой области справа от точки μ_1, $\mu > \mu_1$; $\lambda_N(\mu) < 0$; $\lambda_i(\mu) > 0$, $i = 0,1,\ldots,M-1$ и, значит, в этой области неравенства (А4) выполняются.

Мы пришли к противоречию, предположив, что существует точка μ_1, в которой нарушаются неравенства (А4).

Таким образом, утверждение теоремы I для $L = I$ доказано.

Второй шаг индукции доказывается аналогично.

Литература

I. Спектральное оценивание. Тематический выпуск // ТИИЭР. - 1982. - Т.70, № 9. - 307 с.

2. Биллинджер Д. Временные ряды. Обработка данных и теория. - М. : Мир, 1980. - 536 с.

3. Ланкастер П. Теория матриц. - М.: Наука, 1982. - 280 с.

4. Уилкинсон Дж. Х. Алгебраическая проблема собственных значений. - М.: Наука, 1970. - 564 с.

5. Крейн М., Ахиезер Н. О некоторых вопросах теории моментов. - Харьков: ДНТВУ, 1938. - 255 с.

Дата поступления статьи
18 мая 1987 г.

Александр Ильич Кнафель

МЕТОД СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ И ВЕКТОРОВ
ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ
СПЕКТРАЛЬНЫХ ЛИНИЙ ПОГЛОЩЕНИЯ И ИЗЛУЧЕНИЯ

Подписано в печать 03.06.87 г. МЦ 00947. формат 60x84/16.
Бумага множительная. Печать офсетная. Объем 0,98 усл. печ.л.

Заказ 4588. Тираж 120. Бесплатно

Отпечатано на ротапринте НИРФИ