

Министерство высшего и среднего специального образования
Р С Ф С Р

Горьковский ордена Трудового Красного Знамени
научно-исследовательский радиофизический институт (НИРФИ)

П р е п р и а т № 248

ОТРАЖЕНИЕ ОПТИЧЕСКОГО ИЗЛУЧЕНИЯ
ОТ НЕОДНОРОДНО ИНВЕРТИРОВАННОЙ СРЕДЫ

Б.Е. Немцов

Горький 1988

Немцов Б.Е.

ОТРАЖЕНИЕ ОПТИЧЕСКОГО ИЗЛУЧЕНИЯ ОТ НЕОДНОРОДНО ИНВЕРТИРОВАННОЙ СРЕДЫ //Препринт № 246. - Горький, НИРФИ. - 1988 - 32 с.

УДК 535.312

Рассматриваются задачи об отражении плоских монохроматических волн от неоднородно усиливающих сред. Показано, что эффект сверхотражения и возможность существования поверхностных волн обусловлены неоднородностью инверсии. Эти эффекты существуют в узкой области углов падения. Обнаружено, что в предельном случае однородно усиливающих сред формулы Френеля для коэффициента отражения терпят скачок при углах меньших угла полного внутреннего отражения. Значение угла, при котором происходит скачок коэффициента отражения, зависит от исходной модели неоднородной среды. На этом основании делается вывод, что постановка задачи об отражении плоских волн от инвертированной среды является некорректной и необходимо рассматривать отражение пучков.

В в е д е н и е

В целом ряде экспериментов по отражению света от инвертированных сред было замечено, что интенсивность отраженного поля $I_r \geq 10^3 I_i$, где I_i - интенсивность падающей волны /1-4/. Эффект наблюдается, когда угол падения близок к углу полного внутреннего отражения. Проведенный вскоре после указанных экспериментов анализ формул Френеля показал, что максимальный энергетический коэффициент отражения $|R|^2 \approx 5,83$ /5/, поэтому объяснить указанные эксперименты, исходя из анализа отражения плоской монохроматической волны от полубесконечной инвертированной среды, не удастся. В этой связи в работе /6/ предлагается рассматривать неоднородно-инвертированные среды. При этом волна, распространяясь в инвертированной среде, частично рассеивается на неоднородностях и выходит из неравновесной среды усилившейся. Имея в виду реальные условия эксперимента, разумно рассматривать плавно-неоднородные в масштабе длины волны среды. Решение такой задачи для случая экспоненциального уменьшения инверсии вглубь неравновесной среды приведено в /7/, а затем обобщалось в работах /8,9/. В работе /7/ показано, что коэффициент отражения в неоднородной среде может намного превосходить единицу в том случае, когда существует отраженная от плавных неоднородностей волна. Поскольку неоднородности плавные и достаточно малые, область углов падения, при которых наблюда-

ется эффект усиления, очень мала (несколько угловых секунд), в то время как в экспериментах эффект усиления существует в достаточно широкой области углов падения. В работе /9/ рассматривается отражение от неоднородной среды, у которой одинаково (по экспоненциальному закону) изменяются реальная и мнимая части диэлектрической проницаемости. Показано, что если неоднородности $\text{Re } \epsilon$ достаточно велики, т.е. $\text{Re } \epsilon \gg | \text{Im } \epsilon |$, и выполнены условия волнового распространения в неоднородной среде, то коэффициент отражения от такой среды может быть неограниченно большим. К сожалению, указанная система обладает тем же недостатком, что и система, рассмотренная в /7/: в /9/ область углов падения, где возможно усиление, крайне мала. В то же время развитая в работе /10/ теория отражения волновых пучков (не плоские волны) свободна от этих недостатков. В /10/ показано, что поле отраженного пучка состоит из двух частей: зеркально отраженного пучка и возбужденной падающим сигналом боковой волны. Последняя, распространяясь вдоль границы с инвертированной средой, усиливается, определяя тем самым эффект усиления отраженных волн. Область углов падения, при которых возможно усиление, зависит от ширины и формы спектра падающей волны и может изменяться в широких пределах. В работе /10/ рассматривалась задача об отражении от однородной инвертированной среды. В этих условиях, как уже говорилось, зеркально отраженная волна, определяемая формулами Френеля, усиливается слабо. Представляет определенный интерес исследование френелевских формул для неоднородных сред. В отличие от работ /5,7,10/, мы будем рассматривать неоднородные среды с ограниченной областью усиления. Такая постановка задачи позволяет нам выяснить два ключевых вопроса.

I. Какой вид имеет формула Френеля в случае, когда угол падения близок к углу полного отражения, а усиливающая среда однородна? Правильный ответ на этот вопрос в литературе отсутствует (обсуждение

см. /10/).

2. Каков диапазон углов падения, при котором наблюдается эффект сверхотражения для плоских волн?

Ответ на эти вопросы содержится в предлагаемой статье и кратко сформулирован в заключении.

I. Постановка задачи

Рассмотрим границу раздела двух сред, характеризующихся диэлектрическими проницаемостями ϵ_1 и ϵ_2 . Будем считать первую среду однородной и неинвертированной, т.е. положим, что $\text{Im } \epsilon_1 = 0$ и $\epsilon_1 = \text{const}$, а вторую среду считаем неоднородно инвертированной, т.е.

$\text{Im } \epsilon_2 \neq \text{const}$. Будем искать коэффициент отражения плоской волны от границы раздела.

Предположим, что из однородной среды ($z < 0$) падает плоская монохроматическая волна единичной амплитуды. Считаем, для определенности, что электрический вектор в волне колеблется в плоскости, перпендикулярной плоскости падения (TE-поляризация). Поле в первой среде представим в виде суммы падающих и отраженных волн:

$$E_1 = \exp(-i\omega t + ik_1 \cos\theta z + ik_1 \sin\theta x) + R \exp(-i\omega t - ik_1 \cos\theta z + ik_1 \sin\theta x), \quad (I)$$
$$k_1 = \omega \sqrt{\epsilon_1} / c.$$

Здесь ось x направлена параллельно границе раздела сред, θ - угол падения волны. Поле прошедшей волны ищем в виде

$$E_2(z > 0) = T f(z) \exp(-i\omega t + ik_1 \sin\theta x). \quad (2)$$

Используя граничные условия непрерывности тангенциальных составляющих электрического и магнитного полей, получим

$$R = \frac{ik_1 \cos \theta - \tilde{z}}{ik_1 \cos \theta + \tilde{z}}, \quad \tilde{z} = \frac{f'(0)}{f(0)}. \quad (3)$$

Для определения величины \tilde{z} необходимо решить уравнение Максвелла:

$$\frac{d^2 f}{dz^2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_1 \sin^2 \theta \right) f = 0. \quad (4)$$

Рассмотрим две модели активной среды. В первой модели считается, что мнимая часть диэлектрической проницаемости линейно уменьшается с глубиной, т.е.

$$\epsilon_2 = \epsilon_0 - i [\tau_0 - 2k\gamma(\tau_0 + \tau)z], \quad k = \omega/c, \quad \epsilon_0 = const. \quad (5)$$

Обозначения введены для удобства сравнения с результатами, следующими из другой модели. Из (5) видно, что в области $0 < z < \tau_0 / 2k\gamma(\tau_0 + \tau)$ имеет место усиление волн, а в области $z > \tau_0 / 2k\gamma(\tau_0 + \tau)$ волны поглощаются.

Вторая модель, с ограниченной областью усиления, предложена в [8]:

$$\epsilon_2 = \epsilon_0 + i [\tau - (\tau_0 + \tau) \exp(-2k\gamma z)]. \quad (6)$$

Здесь усиление осуществляется в области

$$0 < z < (2k\gamma)^{-1} \ln(1 + \tau_0/\tau), \quad (7)$$

и если

$$\tau_0 \ll \tau, \quad (8)$$

то диэлектрическая проницаемость в области усиления изменяется по линейному закону (см.(5)).

Принимая во внимание, что сверхотражение связано с инвертированной областью неоднородной среды, заключаем, что при выполнении (8) эффект усиления для линейного и экспоненциального слоев должен проявляться одинаково.

2. Отражение от линейного слоя

Используя (5), представим уравнение (4) в виде

$$f_{\xi\xi} + (a - i\tau_0 + 2i\gamma_0\xi) f = 0, \quad (9)$$

где введены обозначения $\xi = kz$, $\gamma_0 = \gamma(\tau_0 + \tau)$, $a = \epsilon_0 - \epsilon_1 \sin^2 \theta$.

Приведем (9) к стандартной форме уравнения Эйри. Для этого введем переменную $q = \xi/\beta$, тогда (9) перейдет в

$$f_{qq} + [\beta^2(a - i\tau_0) + 2i\gamma_0\beta^3q] f = 0. \quad (10)$$

Выберем

$$\beta^3 = i/2\gamma_0, \quad (11)$$

после чего (10) принимает форму уравнения Эйри, решение которого хорошо известно:

$$f(z) = \int_{\tau_0}^z \exp \left\{ \left[\frac{kz}{\beta} - \beta^2(a - i\tau_0) \right] t - \frac{t^3}{3} \right\} dt. \quad (12)$$

При получении (I2) мы перешли к исходным переменным. Контур определяет различные линейно-независимые решения уравнения (I0) и должен быть выбран так, чтобы $f(z) \rightarrow 0$ при $z \rightarrow \infty$. Это естественное физическое требование следует из того, что среда при $z \rightarrow \infty$ является поглощающей и волны в ней должны затухать. Перед тем, как определить контур Γ_0 , необходимо условиться, какой из трех корней уравнения (II) выбрать. Разумеется, для конечного результата это не имеет значения, однако для выяснения вида контура интегрирования необходимо конкретизировать β . Для определенности будем считать

$$\beta = \frac{e^{i\pi/6}}{(2\nu_0)^{1/3}}. \quad (I3)$$

При таком выборе β поле при больших z определяется интегралом

$$f = \int_{\Gamma_0} \exp(\Omega e^{-i\pi/6} t - t^3/3) dt, \quad (I4)$$

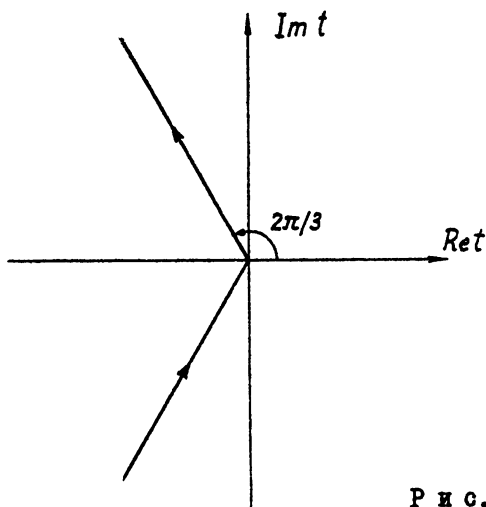
где $\Omega = (2\nu_0)^{1/3} k z$ — большой параметр.

Покажем, что если контур состоит из двух лучей $\arg t = 2\pi/3$ и $\arg t = 4\pi/3$ (см.рис.1), то $f \rightarrow 0$ при $z \rightarrow \infty$. Исследуем (I4) методом перевала. Седловые точки определяются из равенств:

$$t_{1,2} = \pm \Omega^{1/2} e^{-i\pi/12}. \quad (I5)$$

В монографии /II/ показано, что если $-2\pi/3 < \arg \Omega e^{-i\pi/6} < 0$, то вклад в интеграл по контуру Γ_0 дает только окрестность точки $t_2 =$

$= -\Omega e^{-i\pi/12}$, откуда имеем $f \sim \exp(-\frac{2}{3}\Omega^{3/2}e^{-i\pi/6}) \rightarrow 0$ при $z \rightarrow \infty$



Р и с. I

Итак, контур Γ_0 определен правильно и можно приступить к расчету

$$\mathcal{Z} = (2\nu_0)^{1/3} k e^{-i\pi/6} \int_{\Gamma_0} t \exp\left(\eta t - \frac{t^3}{3}\right) dt / \int_{\Gamma_0} \exp\left(\eta t - \frac{t^3}{3}\right) dt, \quad (I6)$$

здесь

$$\eta = \frac{\exp(-2\pi i/3)(a - i\tau_0)}{(2\nu_0)^{2/3}}. \quad (I7)$$

Вычислим вначале

$$I = \int_{\Gamma_0} \exp\left(\eta t - \frac{t^3}{3}\right) dt. \quad (I8)$$

Рассмотрим два случая: $\alpha > 0$ (угол падения $\theta < \theta_{кр}$, $\theta_{кр} = \arcsin \sqrt{\epsilon_0/\epsilon_1}$ - угол полного внутреннего отражения) и $\alpha < 0$ ($\theta > \theta_{кр}$).

I) Из (I7) видно, что $-4\pi/3 < \arg \eta < -2\pi/3$ при $\alpha > 0$. Это означает (см./II/), что вклад в интеграл (I8) дает окрестность двух седловых точек $t_{1,2} = \pm \sqrt{\eta}$. После простых вычислений будем иметь

$$I = \frac{\pi^{1/2} e^{i\pi/4}}{\eta^{1/4}} \left[\exp\left(\frac{2}{3}\eta^{3/2} - i\frac{\pi}{4}\right) + \exp\left(-\frac{2}{3}\eta^{3/2} + i\frac{\pi}{4}\right) \right]. \quad (I9)$$

Аналогично вычисляется интеграл в числителе формулы (I6). В результате для ζ получим

$$\zeta = -ik\sqrt{\alpha - i\tau_0} \frac{\exp\left(\frac{2}{3}\eta^{3/2} - i\frac{\pi}{4}\right) - \exp\left(-\frac{2}{3}\eta^{3/2} + i\frac{\pi}{4}\right)}{\exp\left(\frac{2}{3}\eta^{3/2} - i\frac{\pi}{4}\right) + \exp\left(-\frac{2}{3}\eta^{3/2} + i\frac{\pi}{4}\right)}. \quad (20)$$

Входящий в (20) $\sqrt{\alpha - i\tau_0}$ определен так, что $\operatorname{Re} \sqrt{\alpha - i\tau_0} > 0$.

Используя явный вид η (I7), нетрудно убедиться, что при $\alpha > \tau_0/\sqrt{3}$ $\operatorname{Re} \eta^{3/2} < 0$ и определяющий вклад в (20) дают слагаемые $\sim \exp(-\frac{2}{3}\eta^{3/2})$, поэтому в пределе однородной среды ($\gamma \rightarrow 0$) $\zeta = ik\sqrt{\alpha - i\tau_0}$, а значит

$$R = \frac{\sqrt{\epsilon_1} \cos \theta - \sqrt{\alpha - i\tau_0}}{\sqrt{\epsilon_1} \cos \theta + \sqrt{\alpha - i\tau_0}}. \quad (21)$$

Соотношение (21) справедливо при

$$\alpha > \tau_0/\sqrt{3}. \quad (22)$$

Формула (21) может быть получена из решения задачи об отражении от однородной инвертированной среды, если в качестве прошедшей волны выбрать волну, уходящую от границы и усиливающуюся по мере прохождения через инверсную среду. Нетривиальным и важным оказывается тот факт, что такое решение следует выбирать лишь для достаточно отдаленных от угла полного отражения углов падения волны (см. (22)).

При выполнении обратного неравенства, т.е. при $0 < a < \tau_0/\sqrt{3}$, экспоненциально большими оказываются слагаемые $\exp(\frac{2}{3}\eta^{3/2})$ и в этой области углов $Z = -ik\sqrt{a-i\tau_0}$, а коэффициент отражения

$$R = \frac{\sqrt{\epsilon_1} \cos \theta + \sqrt{a-i\tau_0}}{\sqrt{\epsilon_1} \cos \theta - \sqrt{a-i\tau_0}} \quad (23)$$

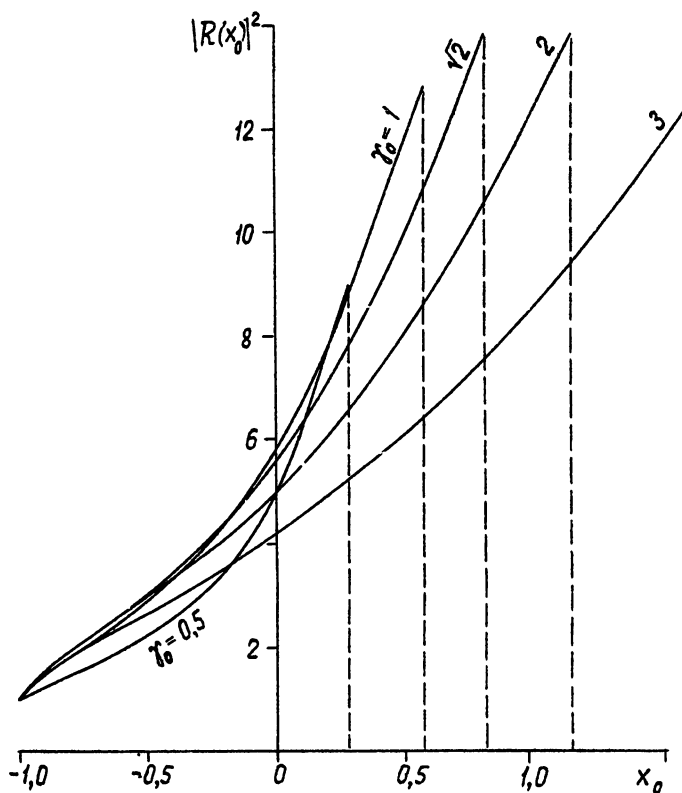
Формулу (23) также можно получить из решения задачи об отражении от однородно инвертированной среды, если выбирать спадающие вглубь среды волны. Таким образом, вопреки утверждениям, сделанным в работах /5,6,12,13/, скачок коэффициента отражения происходит не при превышении критического угла, а при угле, меньшем угла полного внутреннего отражения, т.е. когда

$$a = \tau_0 / \sqrt{3} \quad (24)$$

Справедливость (23) и при углах меньших $\theta_{кр}$ приводит к тому, что $|R|^2$ превышает единицу в области $0 < a < \tau_0/\sqrt{3}$. Это иллюстрирует рис.2, где приведена зависимость

$$|R(x_0)|^2 = \frac{x_0 + 1 + \sqrt{2(\sqrt{x_0^2 + \gamma_0^2} + x_0)(x_0 + 1) + \sqrt{x_0^2 + \gamma_0^2}}}{x_0 + 1 - \sqrt{2(\sqrt{x_0^2 + \gamma_0^2} + x_0)(x_0 + 1) + \sqrt{x_0^2 + \gamma_0^2}}} \quad (25)$$

$$x_0 \equiv a/(\epsilon_1 - \epsilon_0); \quad \gamma_0 = \tau_0/(\epsilon_1 - \epsilon_0), \quad 0 < x_0 < \gamma_0/\sqrt{3}.$$



Р и с . 2

Из рис.2 видно, что коэффициент отражения принимает максимальное значение при $x_0 \rightarrow \tau_0/\sqrt{3}$, т.е. в области углов, меньших угла полного внутреннего отражения. Строго говоря, в окрестности $a \approx \tau_0/\sqrt{3}$ необходимо учитывать вклады в (20) как от $\exp\left(\frac{2}{3}\eta^{3/2}\right)$, так и $\exp\left(-\frac{2}{3}\eta^{3/2}\right)$. Физически это означает, что в узкой области углов в окрестности $a = \tau_0/\sqrt{3}$ для отражения существенны обе волны, распространяющиеся в неоднородно инвертированной среде. Именно в этих условиях следует ожидать наибольших значений коэффициента отражения.

Оценим область углов падения, при которых возможно "гигантское" усиление отраженных волн. Для этого необходимо, чтобы $\text{Re } \Delta \eta^{3/2} \approx 1$ или с использованием (17) получим

$$\Delta \theta = \frac{\gamma(\tau + \tau_0)}{\tau_0} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{\epsilon_1 - \epsilon_0}{\tau_0} \right)^{-1/2}. \quad (26)$$

Из (26) следует, что область усиления становится достаточно широкой, если выполнено неравенство $\epsilon_1 - \epsilon_0 \lesssim \tau_0$, т.е. показатели преломления сред должны мало отличаться друг от друга. Соотношение (26) показывает, что наличие поглощения в неоднородной среде приводит к уширению области углов, где возможно резонансное усиление. Аналогичная ситуация реализуется во всех резонансных явлениях: введение поглощения уширяет резонансные кривые.

Для того, чтобы получить предельно возможную оценку области углов падения, при которых существует усиление, используем неравенство $|\eta| \gg 1$, откуда следует

$$\Delta \theta \lesssim \sqrt{\tau_0}, \quad (27)$$

причем одновременно должно быть выполнено условие $\epsilon_1 - \epsilon_0 \approx \tau_0$.

Найдем те углы падения, при которых имеет место возбуждение поверхностных волн. Для этого необходимо найти полюса коэффициента отражения R . Используя (20) и (3), для полюсов коэффициента отражения получаем

$$\sqrt{\frac{\epsilon_1 - \epsilon_0}{\tau_0} + \frac{1}{\sqrt{3}}} \left(\frac{3}{4} \right)^{1/4} \exp\left(-i\frac{\pi}{3}\right) = \text{tg} \left(g - \frac{\pi}{4} - \frac{3i\delta g}{2} \right). \quad (28)$$

Здесь $g = (4/3)^{3/4} \tau_0^{3/2} / 3\gamma(\tau + \tau_0)$ - большой параметр, δ определено соотношением $a = \tau_0(1 - 4\delta/\sqrt{3})/\sqrt{3}$. При выводе (28) считалось, что $\delta \ll 1$ или $a \approx \tau_0/\sqrt{3}$. Несложный анализ (28) показывает,

что при $|\delta q| \gg 1$ полюса отсутствуют, а корни лежат в области $|\delta q| \approx 1$. Из (28) также следует, что уравнению удовлетворяют лишь $\delta > 0$. Этот факт означает, что возбуждение поверхностных волн имеет место только при $a < \tau_0/\sqrt{3}$, т.е. в той области, где существенна отраженная от неоднородной инверсии электромагнитная волна.

Конкретный расчет полюсов коэффициента отражения требует решения трансцендентного уравнения (28). Мы не будем останавливаться на подробном исследовании этого уравнения, приведем лишь примеры. Пусть $q = \pi/2 + \pi n$ (n - натуральное число), тогда из (28) следует, что $\delta = (\operatorname{arcsinh} \sqrt{3})/3q$, $(\epsilon_1 - \epsilon_0)/\tau_0 = 1/\sqrt{3}$. Если считать, что $\epsilon_1 - \epsilon_0 \gg \tau_0$, то уравнение (28) также легко решается. После ряда преобразований имеем

$$q \approx \frac{3\pi}{4} + \pi n, \quad \delta = \frac{2^{5/2}}{3^{3/4}} \frac{\tau_0^{1/2}}{q (\epsilon_1 - \epsilon_0)^{1/2}}. \quad (29)$$

Соотношение (29) показывает, что возбуждение поверхностной волны (эффект сверхотражения) имеет место в области, очень близко примыкающей к границе $a = \tau_0/\sqrt{3}$.

2) Рассмотрим отражение волн, падающих под углом $\theta > \theta_{кр}$ ($a < 0$). В этом случае при асимптотическом анализе интеграла (18) следует иметь в виду, что $\eta = e^{i\pi/3} (|a| + i\tau_0)(2\gamma_0)^{-2/3}$ (см. (17)) и $\pi/3 < \operatorname{arg} \eta < 5\pi/6$, поэтому $\operatorname{arg} \eta$ может принимать значения большие или меньшие $2\pi/3$. Если $\operatorname{arg} \eta > 2\pi/3$, или $|a| < \tau_0/\sqrt{3}$, то вклад в интеграл (18) дают обе седловые точки:

$$I \approx \frac{\pi^{1/2}}{\eta^{1/4}} \left[-\exp\left(\frac{2}{3} \eta^{3/2}\right) + i \exp\left(-\frac{2}{3} \eta^{3/2}\right) \right]. \quad (30)$$

В случае $|\alpha| > \tau_0/\sqrt{3}$ асимптотическое значение интеграла определяется точкой $t = -\eta^{1/2}$, поэтому

$$I \approx \frac{i\pi^{1/2}}{\eta^{1/4}} \exp\left(-\frac{2}{3}\eta^{3/2}\right). \quad (31)$$

В обоих случаях слагаемые $\exp(-\frac{2}{3}\eta^{3/2})$ намного превосходят $\exp(\frac{2}{3}\eta^{3/2})$, поэтому последними с большой степенью точности можно пренебречь. В результате коэффициент отражения R будет равен

$$R = \frac{\sqrt{\epsilon_1} \cos \theta + \sqrt{\alpha - i\tau_0}}{\sqrt{\epsilon_1} \cos \theta - \sqrt{\alpha - i\tau_0}}, \quad (32)$$

т.е. имеет тот же вид, что и в области углов, меньших угла полного внутреннего отражения, когда $\alpha < \tau_0/\sqrt{3}$. Отсюда следует, что заметного усиления волн, падающих под углом $\theta > \theta_{кр}$, не существует. Этот вывод остается в силе и для экспоненциальной модели изменения инверсии в среде.

3. Отражение от экспоненциального слоя

Частное решение уравнения Максвелла (4), удовлетворяющее условию обращения в нуль при $z \rightarrow \infty$, имеет вид (см./8/)

$$f = J_\nu(\zeta_0), \quad (33)$$

где $J_\nu(\zeta_0)$ - функция Бесселя, $\nu = e^{-i\pi/2}\sqrt{\alpha+i\tau}/\gamma$, $\zeta_0 = e^{-i\pi/4}e^{-k\delta z}\sqrt{\tau_0+i\tau}/\gamma$, причем здесь и далее считается, что $\text{Re}\sqrt{\alpha+i\tau} > 0$. Используя (33), можно записать коэффициент отражения в форме

$$R = \frac{\sqrt{\epsilon_1} \cos \theta - \sqrt{a+i\tau} + \exp(i\pi/4) \sqrt{\tau_0 + \tau} J_{\nu+1}(\zeta) / J_{\nu}(\zeta)}{\sqrt{\epsilon_1} \cos \theta + \sqrt{a+i\tau} - \exp(i\pi/4) \sqrt{\tau_0 + \tau} J_{\nu+1}(\zeta) / J_{\nu}(\zeta)}, \quad \zeta = \zeta_0 (z=0). \quad (34)$$

Исследование (34) в общем виде затруднительно, поэтому рассмотрим наиболее интересный с точки зрения приложений случай, когда неоднородности инверсии плавные, т.е. $|\zeta|, |\nu| \gg 1$. При выполнении этого неравенства достаточно использовать асимптотические разложения функций Бесселя при больших комплексных индексах и аргументах. Асимптотики $J_{\nu}(\zeta)$ при комплексных ν и действительных ζ найдены Дебаем /14/. Поскольку в нашей задаче ζ комплексно, непосредственно воспользоваться выписанными в трактате Ватсона асимптотическими разложениями не представляется возможным. Игнорирование этого факта приводит к ошибкам /7,8/+).

Насколько нам известно, асимптотики $J_{\nu}(\zeta)$ при больших комплексных ν , ζ отсутствуют, поэтому для корректного решения данной задачи их необходимо получить.

При асимптотическом анализе $J_{\nu}(\zeta)$ важную роль играет отношение ν/ζ . Обозначим

$$\frac{\nu}{\zeta} = ch \alpha = e^{-i\pi/4} \frac{\sqrt{a+i\tau}}{\sqrt{\tau_0 + \tau}}, \quad (35)$$

тогда с учетом (23) получим

$$ch \alpha, \cos \alpha_2 = \frac{\sqrt{\tau + \sqrt{\tau^2 + a^2}}}{\sqrt{2(\tau + \tau_0)}}, \quad sh \alpha, \sin \alpha_2 = -\frac{\sqrt{-\tau + \sqrt{\tau^2 + a^2}}}{\sqrt{2(\tau + \tau_0)}} \operatorname{sign} a, \quad (36)$$

+) Помимо указанной ошибки, в работе /8/ содержатся и другие (неправильный переход от формулы (9) к (12)). Все это привело авторов работы /8/ к неверным выводам. В частности в пределе однородной среды из формул работы /8/ не следуют формулы Френеля.

где $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$. Системе (36) удовлетворяют неравенства

$$\alpha_1 > 0, \quad -\pi/2 < \alpha_2 < \pi/2, \quad (37)$$

причем неравенству $-\pi/2 < \alpha_2 < 0$ соответствует область углов падения $\theta < \theta_{кр}$ ($a > 0$) , а $0 < \alpha_2 < \pi/2$ удовлетворяется при $\theta > \theta_{кр}$ ($a < 0$) . Условия (37) однозначно определяют зависимость α от параметров a , τ , τ_0 . Действительно, из (35) имеем

$$e^\alpha = e^{-i\pi/4} \frac{\sqrt{a+i\tau} \pm \sqrt{a-i\tau_0}}{\sqrt{\tau+\tau_0}} . \quad (38)$$

С учетом (37) должно выполняться $|e^\alpha| > 1$. Используя эти соображения, нетрудно показать, что в случае $a > 0$ ($\theta < \theta_{кр}$) следует выбрать верхний знак в (38), а при $\theta > \theta_{кр}$ - нижний. Таким образом,

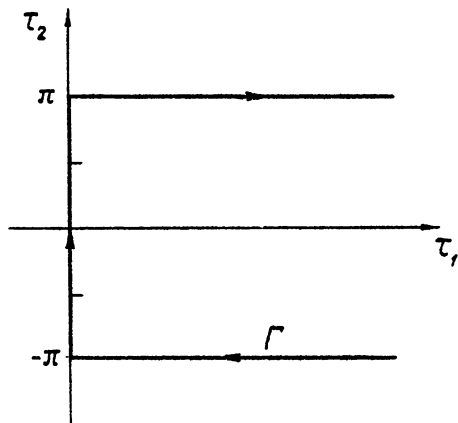
$$\alpha = \ln \left(e^{-i\pi/4} \frac{\sqrt{a+i\tau} + \sqrt{a-i\tau_0} \cdot \text{sign } a}{\sqrt{\tau+\tau_0}} \right) . \quad (39)$$

Значение логарифма в (39) выбирается из условия (37).

Перейдем непосредственно к асимптотическому анализу $J_\nu(\xi)$. Для этого удобно воспользоваться представлением функции Бесселя в виде интеграла Шлефли [14]:

$$J_\nu(\xi) = (2\pi i)^{-1} \int_\Gamma \exp\{\xi(\text{sh } \tau - \tau \text{ch } \alpha)\} d\tau . \quad (40)$$

Здесь Γ - контур интегрирования, изображенный на рис.3.



Р и с . 3

Седловые точки, которые могут дать вклад в (40), определяются из условия

$$\tau^{(1,2)} = \pm \alpha . \quad (41)$$

Какую из этих двух точек необходимо учитывать при вычислении интеграла (40)?- главный вопрос, возникающий в методе перевала. Ответ можно сформулировать так: необходимо построить контуры наискорейшего спуска, проходящие через обе седловые точки, а исходный контур интегрирования деформировать таким образом, чтобы он исключительно проходил по контурам наискорейшего спуска. Перевальные точки, попадающие на деформированный путь интегрирования, дают вклад в интеграл.

Возникает также вопрос: чем выделены контуры наискорейшего спуска? Ответ состоит в том, что на контурах наискорейшего спуска фаза подынтегрального выражения постоянна, а переменная часть функции действительна и имеет единственный острый максимум. С другой стороны,

для интегралов от "острых" функций действительного переменного легко написать асимптотические разложения /15/ и оценить остатки рядов, чего нельзя сделать, если выбрать любой другой контур интегрирования. Именно этим фактом определяется исключительная роль контуров наискорейшего спуска.

Уравнения контуров наискорейшего спуска следуют из условия

$$\operatorname{Im} \Phi(\tau) = \operatorname{Im} \Phi(\pm\alpha) \quad (\Phi = \zeta(\operatorname{sh}\tau - \tau \operatorname{ch}\alpha)) \quad \text{или в развернутом виде}$$

$$\begin{aligned} & \operatorname{ch}\tau, \operatorname{sh}\tau - \operatorname{sh}\tau, \operatorname{ch}\tau + (\tau_1 - \tau_2)\operatorname{ch}\alpha, \operatorname{cos}\alpha_2 - (\tau_1 + \tau_2)\operatorname{sh}\alpha, \operatorname{sin}\alpha_2 = \\ & = \pm [\operatorname{ch}\alpha, \operatorname{sin}\alpha_2 - \operatorname{sh}\alpha, \operatorname{cos}\alpha_2 + (\alpha_1 - \alpha_2)\operatorname{ch}\alpha, \operatorname{cos}\alpha_2 - (\alpha_1 + \alpha_2)\operatorname{sh}\alpha, \operatorname{sin}\alpha_2], \end{aligned} \quad (42)$$

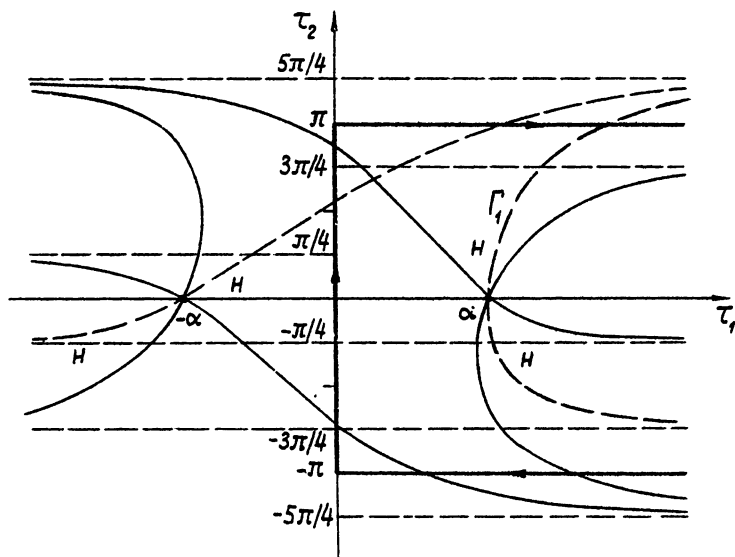
где учтено, что $\zeta \sim e^{-i\pi/4}$, $\tau = \tau_1 + i\tau_2$, $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$.

При выяснении характера асимптотического разложения важную роль играют линии уровня, т.е. линии в комплексной плоскости τ , проходящие через седловые точки, на которых $|\exp \Phi(\tau)| = |\exp \Phi(\pm\alpha)|$. Форма этих линий определяется из уравнений $\operatorname{Re} \Phi(\tau) = \operatorname{Re} \Phi(\pm\alpha)$ или

$$\begin{aligned} & \operatorname{sh}\tau, \operatorname{cos}\tau_2 + \operatorname{ch}\tau, \operatorname{sin}\tau_2 - (\tau_1 + \tau_2)\operatorname{ch}\alpha, \operatorname{cos}\alpha_2 + (\tau_2 - \tau_1)\operatorname{sh}\alpha, \operatorname{sin}\alpha_2 = \\ & = \pm [\operatorname{sh}\alpha, \operatorname{cos}\alpha_2 + \operatorname{ch}\alpha, \operatorname{sin}\alpha_2 - (\alpha_1 + \alpha_2)\operatorname{ch}\alpha, \operatorname{cos}\alpha_2 + (\alpha_2 - \alpha_1)\operatorname{sh}\alpha, \operatorname{sin}\alpha_2]. \end{aligned} \quad (43)$$

Линии уровня (43) делят комплексную плоскость τ на "холмы" и "низины". В холмах $|\exp \Phi(\tau)| > |\exp \Phi(\pm\alpha)|$, в низинах $|\exp \Phi(\tau)| < |\exp \Phi(\pm\alpha)|$. Линии наискорейшего спуска проходят по низинам.

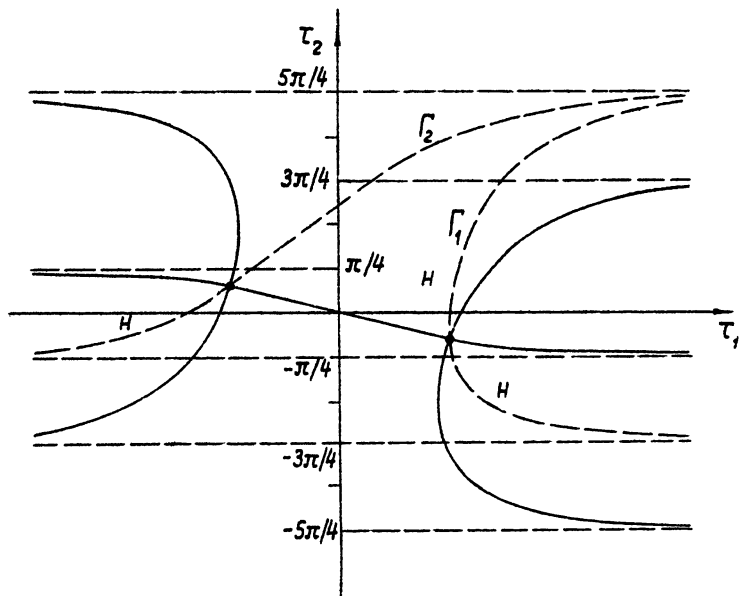
Исследование картины линий уровня и контуров наискорейшего спуска начнем с простого случая действительных α . На рис. 4а сплошными линиями изображены линии уровня, а пунктиром - линии наискорейшего



Р и с . 4 а

го спуска. В этом случае вклад в интеграл (40) определяется только окрестностью седловой точки $\tau^{(1)} = \alpha$, т.к. исходный контур Γ можно, непрерывно деформируя, привести к контуру наискорейшего спуска Γ_1 . Пусть $\text{Im } \alpha < 0$. При этом перевальные точки смещаются в комплексную плоскость τ , но пока α_2 достаточно мало, картина линий уровня и линий наискорейшего спуска топологически остается такой же, как на рис.4а. При дальнейшем увеличении $|\alpha_2|$ происходит перезамыкание линий уровня (см.рис.4б). Такое перезамыкание происходит, когда выполнено равенство $\text{Re } \Phi(\alpha) = 0$ или

$$\text{th } \alpha_1 + \text{tg } \alpha_2 - (\alpha_1 + \alpha_2) + (\alpha_2 - \alpha_1) \text{th } \alpha_1 \text{tg } \alpha_2 = 0. \quad (44)$$

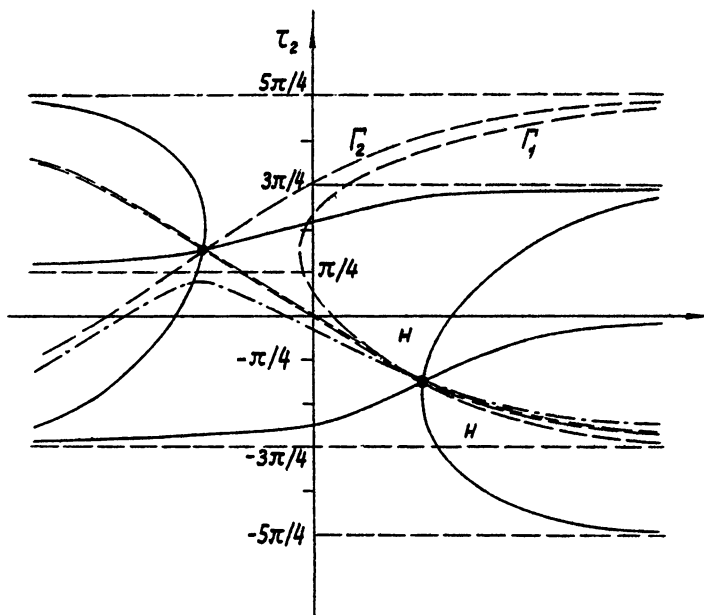


Р и с . 4 б

Несмотря на то, что при выполнении условия (44) линии уровня перезакрываются, вклад в (40) по-прежнему определяется точкой $\tau^{(1)} = \alpha$, поскольку исходный контур деформируется в контур Γ_1 . При дальнейшем увеличении $|\alpha_2|$ возникает картина, представленная на рис. 4в.

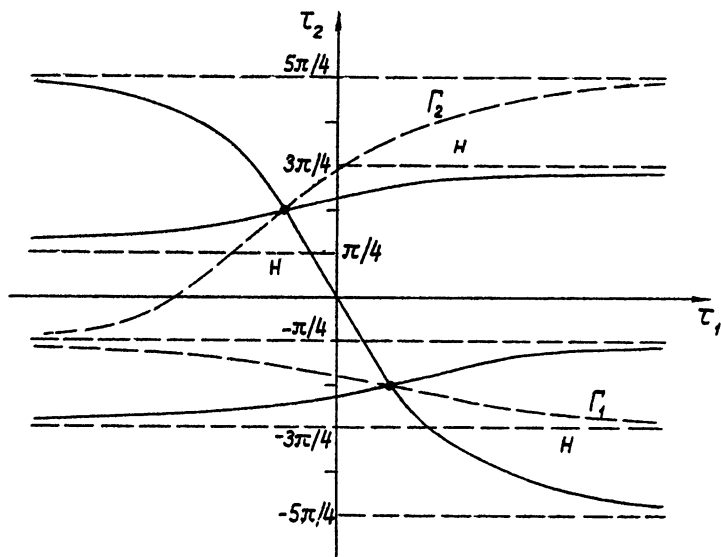
Контур Γ_1 приближается ко второй седловой точке $\tau^{(2)} = -\alpha$ и при $\text{Im } \Phi(\alpha) = 0$ или

$$\text{tg } \alpha_2 - \text{th } \alpha_1 + (\alpha_1 - \alpha_2) - (\alpha_1 + \alpha_2) \text{th } \alpha_1 \text{tg } \alpha_2 = 0 \quad (45)$$



Р и с . 4 в

контур наискорейшего спуска Γ_1 , совпадает с контуром наискорейшего подъема, проходящим через точку $\tau^{(2)} = -\infty$ (двойная штрихованная линия на рис.4в). При дальнейшем возрастании $|\alpha_2|$ контур Γ_1 начинается на $-3\pi i/4 + \infty$ и заканчивается на $-\infty - i\pi/4$ (штрихпунктир на рис.4в). В этом случае в процессе непрерывной деформации контура Γ к контурам наискорейшего спуска уже нельзя ограничиться вкладом только от точки $\tau^{(1)}$. Теперь исходный контур интегрирования деформируется в два контура наискорейшего спуска Γ_1



Р и с . 4 г

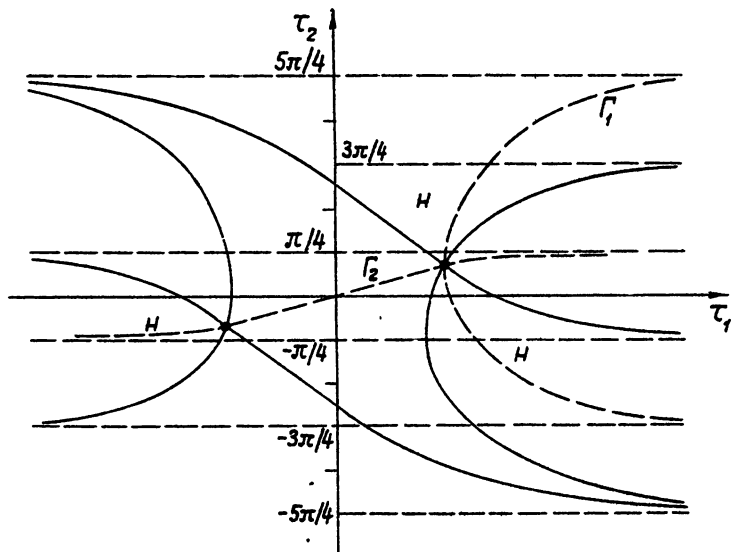
и Γ_2 . Итак, при пересечении линии (45) на плоскости α происходит скачок асимптотики $J_\nu(\zeta)$. Нетрудно видеть, что этот скачок возникает при пересечении линии Стокса^{+) :}

$$\text{Im } \Phi(\alpha) = 0. \quad (46)$$

^{+) В методе фазовых интегралов /16/ широко используется тот факт, что скачок асимптотик функций происходит на линиях Стокса (46). Отсюда следует, что приведенные в данной работе рассуждения являются обоснованием метода фазовых интегралов. В частности, если геометрико-оптические решения исходных уравнений имеют вид $\exp \psi_{1,2}(\alpha)$, то, исходя из приведенного выше рассмотрения следует, что линии Стокса определяются из условия $\text{Im } \psi_1(\alpha) = \text{Im } \psi_2(\alpha)$. В частном случае, когда $\psi_1 = -\psi_2$, это условие переходит в хорошо известное равенство Стокса.}

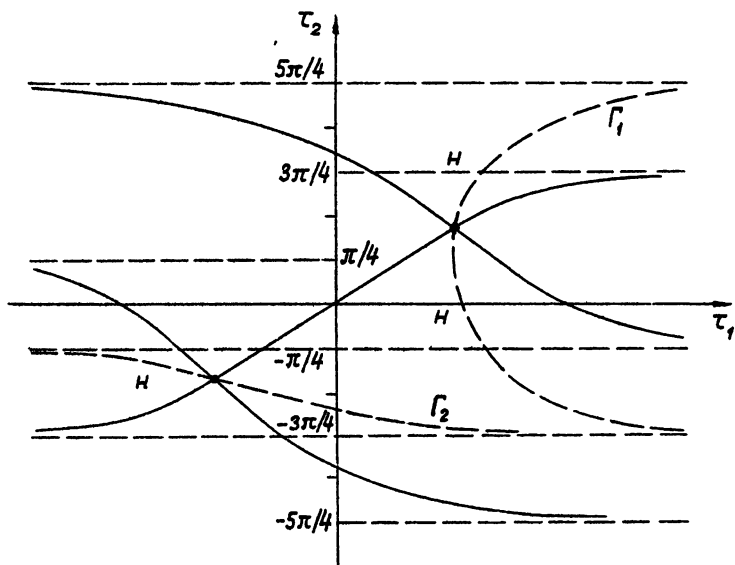
Если далее увеличивать $|\alpha_2|$, то произойдет перезамыкание линий уровня (см (44) и рис.4г), но по-прежнему вклад в интеграл дают обе седловые точки. При дальнейшем увеличении $|\alpha_2|$ асимптотика также определяется двумя седловыми точками.

Кратко исследуем поведение линий уровня и контуров наискорейшего спуска при $\alpha_2 > 0$. При малых α_2 картина топологически такая же, как на рис.4а. При выполнении равенства (45) линия наискорейшего спуска, выходящая из точки $\tau^{(2)} = -\alpha$, совпадает с линией наискорейшего подъема точки $\tau^{(1)} = \alpha$. Эта картина изображена на

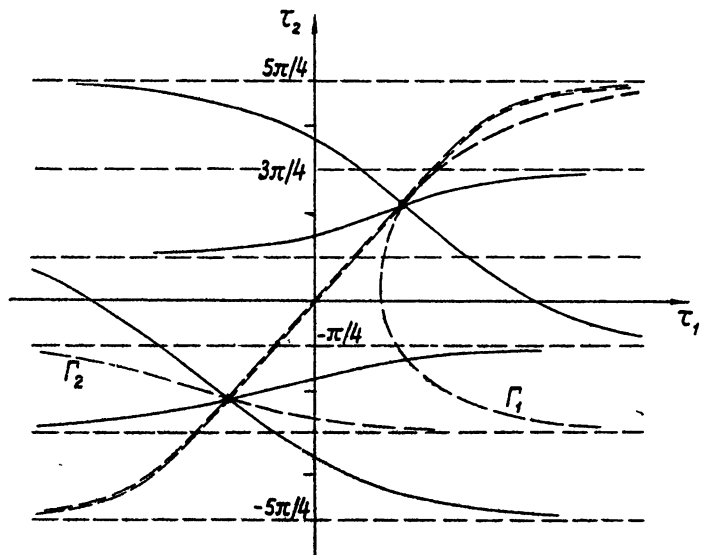


Р и с. 5а

рис.5а. При этом, разумеется, вклад в интеграл определяется окрестностью седловой точки $\tau^{(1)} = \alpha$. Картина линий уровня остается такой же, как на рис.5а, до тех пор пока не будет выполнено (44). При выполнении (44) линии уровня перезамыкаются (рис.5б). Но вклад в интеграл



Р и с. 5 б

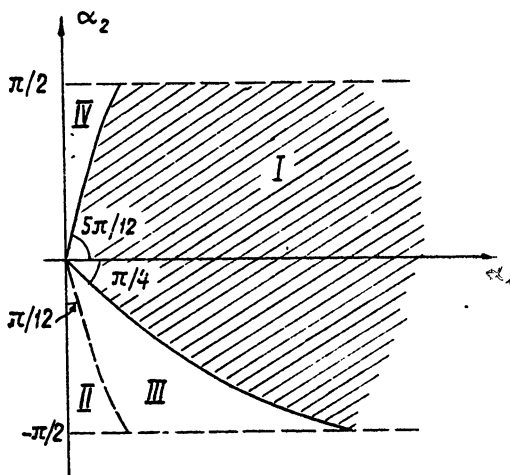


Р и с. 5 в

дается точкой $\tau^{(1)} = \alpha$. При дальнейшем увеличении α_2 возникает картина, представленная на рис.5в. При этом в момент, когда α_2 возросло настолько, что выполнено условие (45), возникает перезамыкание линий наискорейшего спуска (двойной пунктир) и при дальнейшем возрастании α_2 необходим учет вкладов от двух седловых точек.

Подведем итоги. Линии (45) на плоскости α_1, α_2 определяют области, где необходим учет одной или двух седловых точек (см.рис.6). В заштрихованном секторе I вклад в интеграл дает одна седловая точка

$\tau^{(1)} = \alpha$. В незаштрихованных областях необходимо учитывать вклад обеих седловых точек. Пунктирная линия построена на основании (44) и делит сектор на две части: в секторе II больший вклад в интеграл дает точка $\tau^{(2)} = -\alpha$, в секторе III определяющий вклад дает $\tau^{(1)} = \alpha$. В секторе IV основной вклад дает окрестность точки $\tau = \alpha$.



Р и с. 6

После проведенного анализа легко написать асимптотические формулы для $J_\nu(\xi)$. В секторе I имеем

$$J_\nu(\xi) = (2\pi\xi \operatorname{sh}\alpha)^{-1/2} \exp\{\nu(th\alpha - \alpha)\}. \quad (47)$$

В секторах II, III

$$J_\nu(\xi) = (2\pi\xi \operatorname{sh}\alpha)^{-1/2} [\exp\{\nu(th\alpha - \alpha)\} - i \exp\{-\nu(th\alpha - \alpha)\}]. \quad (48)$$

В секторе IV

$$J_\nu(\xi) = (2\pi\xi \operatorname{sh}\alpha)^{-1/2} [\exp\{\nu(th\alpha - \alpha)\} + i \exp\{-\nu(th\alpha - \alpha)\}]. \quad (49)$$

Совершенно такие же формулы получаются для $J_{\nu+1}(\xi)$, с той лишь разницей, что ν заменится на $\nu+1$, α на $\alpha + (\xi \operatorname{sh}\alpha)^{-1}$. В результате для отношения $J_{\nu+1}(\xi)/J_\nu(\xi)$ получим

$$\frac{J_{\nu+1}(\xi)}{J_\nu(\xi)} = \begin{cases} \exp(-\alpha) & \text{в секторе I} \\ \frac{\exp(-\alpha) - i \exp\{-2\nu(th\alpha - \alpha) + \alpha\}}{1 - i \exp\{-2\nu(th\alpha - \alpha)\}} & \text{в секторах II, III} \\ \frac{\exp(-\alpha) + i \exp\{-2\nu(th\alpha - \alpha) + \alpha\}}{1 + i \exp\{-2\nu(th\alpha - \alpha)\}} & \text{в секторе IV} \end{cases} \quad (50)$$

В пределе однородной среды ($\nu \rightarrow \infty$) из (50), (38) и (34) следует, что

$$R = \frac{\sqrt{\varepsilon_1} \cos \theta - \sqrt{\alpha - i\tau_0}}{\sqrt{\varepsilon_1} \cos \theta + \sqrt{\alpha - i\tau_0}}$$

в области α , ограниченной осью абсцисс и линией, разделяющей сек-

тора II и III (см.рис.6). В областях II, III и части области I, лежащей выше оси абсцисс,

$$R = \frac{\sqrt{\epsilon_1} \cos \theta + \sqrt{\alpha - i\tau_0}}{\sqrt{\epsilon_1} \cos \theta - \sqrt{\alpha - i\tau_0}}$$

Приведенный расчет показывает, что, как и в случае линейного профиля, смена знака $\sqrt{\alpha - i\tau_0}$ (а значит и выбор поля в прошедшей волне) происходит при углах $\theta < \theta_{кр}$ (поскольку областям $\alpha_2 < 0$ соответствуют $\alpha > 0$ (36)). Существенно, однако, что конкретное значение θ , при котором происходит скачок коэффициента отражения R , зависит от исходной модели инвертированной среды. Так, если $\tau_0 \ll \tau$, то из (36), (44) следует, что скачок происходит при $\alpha = \tau_0/\sqrt{3}$, т.е. при том же значении угла падения, что и в линейном слое. Если же $\tau_0 \gg \tau$, то совместное решение уравнений (36), (44) показывает, что скачок происходит при $\alpha \approx 0,254\tau_0$. Отсюда следует важный вывод: нельзя указать универсальный рецепт для определения углов падения, при которых происходит скачок коэффициента отражения R .

В связи с этим возникает естественный вопрос: имеет ли смысл рассматривать задачи об отражении волн от однородно инвертированной среды? Исследование, проведенное выше, показывает, что если речь идет об отражении плоской волны, то решение задачи однозначно зависит от способа предельного перехода к однородной среде, и поэтому в такой постановке решать задачу смысла не имеет (см.с./5,6,12,13/ и цитированную там литературу). В то же время, если рассматриваются задачи об отражении пучка от однородной инвертированной среды /10/, то скачок коэффициента отражения при различных θ не имеет значения, поскольку решение определяется как однородными (действительные θ), так и неоднородными (комплексные θ) плоскими волнами, а указанная суперпозиция

волн инвариантна по отношению к значению θ_0 , при котором имеется скачок R (подробнее см./10/).

Если считать неоднородность инверсии плавной, но не равной нулю ($\gamma \neq 0, \nu \neq \infty$), то в узкой области углов вблизи линии, разделяющей секторы II и III (см.рис.6), необходимо учитывать вклад в асимптотику $J_\nu(\xi)$ от обеих точек пересечения, или, другими словами, в узкой области углов с шириной, определяемой формулой (26), необходимо учитывать уходящие и приходящие к границе раздела волны, распространяющиеся в инверсной среде. По существу, именно здесь возможен эффект сверхотражения и существование поверхностных волн. Заметим в этой связи, что область углов, где возможны указанные эффекты, весьма узка (см.(26)).

З а к л ю ч е н и е

Решение задач об отражении плоской монохроматической волны от неоднородно усиливающих сред показывает следующее.

1. При переходе к однородной усиливающей среде коэффициент отражения Френеля изменяется скачком при углах, меньших угла полного внутреннего отражения, а сам этот угол определен неоднозначно и зависит от исходной модели неоднородной среды. Отсюда следует, что постановка задачи об отражении плоской волны от однородной усиливающей среды является некорректной и необходимо решать задачу об отражении пучка /10/.

2. Наличие неоднородной инверсии приводит к эффекту сверхотражения и возможности существования поверхностных волн. Ширина области углов падения, где это возможно, крайне мала (26).

Рассмотрение отражения монохроматических сигналов имеет смысл, когда активная среда конвективно-неустойчива. В противном случае необходимо решать начальную задачу /17,18/.

Автор признателен О.А.Зориной за проведение численных расчетов.

Л и т е р а т у р а

1. Koester Ch.J. Laser action by enhanced total internal reflection. //IEEE.-1966. - VQE2, N 4. - P.LXIII.
2. Коган Б.Я., Волков В.М., Лебедев С.А. Сверхлюминесценция и генерация стимулированного излучения в условиях внутреннего отражения. //Письма в ЖЭТФ. - 1972. - Т.16, в.3. - С.144-147.
3. Лебедев С.А., Кизель В.А., Коган Б.Я. Характеристики стимулированного излучения раствора родамина 6 G в условиях внутреннего отражения. //Квантовая электроника. - 1976. - Т.3, № II. - С.2446-2447.
4. Subulski R.F., Silkerman M. Enhanced internal reflection from an exponential amplifying region. //Opt.Lett. - 1983. - V.8, N 3. - P.142 - 144.
5. Лебедев С.А., Волков В.М., Коган Б.Я. О величине коэффициента усиления света при внутреннем отражении от среды с инверсной заселенностью. //Оптика и спектроскопия. - 1973. - Т.35, в.5. - С. 976-977.
6. Вайнштейн Л.А. Распространение импульсов. //УФН. - 1976. - Т.118. - № 2. - С.339-367.

7. Cubulski R.F., Carniglia C.K. Internal reflection from an exponential amplifying region. //JOSA. - 1977. - V.67, N 12. - P.1620 - 1627.
8. Биба Т.С., Петров Н.С., Джиландари И.З. Отражение света от неоднородно-инверсной среды с ограниченной областью усиления.// ЖПС. - 1980. - Т.32, в.2. - С.266-271.
9. Петров Н.С. Отражение света от экспоненциально-неоднородной инверсной среды.//Вестник АН БССР, сер.физ.-мат.наук. - 1983. -№ 3. - С.62-71.
10. Немцов Б.Е., Эйрман В.Я. Теория эффекта усиления при полном внутреннем отражении волновых пучков от инвертированных сред.//ЖЭТФ. - 1987. - Т.93, в.3(9). - С.845-855.
11. Джеффрис Г., Свирлс Б. Методы математической физики. Выпуск 3. - М.: Мир, - 1970. - 343 С.
12. Бойко Б.В., Петров Н.С., Джиландари И.З. Усиление электромагнитных волн при отражении от сред с отрицательным потенциалом. В кн. Квантовая электроника и лазерная спектроскопия. - Минск: Наука и техника. - 1974. - 449 С.
13. Коган Б.Я., Молевич Н.Е. Отражение звука от границы равновесного и неравновесного колебательно-возбужденного газа.//Акустический журнал. - 1987. - Т.33, в.2. - С.252-254.
14. Ватсон Г.Н. Теория бесселевых функций. Часть I. М.: ИИЛ. - 1949, - 793 С.
15. Федорюк М.В. Метод перевода. - М.: Наука. - 1977. - 367 С.
16. Хединг Дж. Введение в метод фазовых интегралов (метод ВКБ). - М.: Мир. - 1965. - 120 С.

17. Немцов Б.Е. Конфигурационная неустойчивость при отражении цилиндрического импульса от тангенциального разрыва.//Препринт № 211.
- Горький: НИРФИ. - 1986. - 33 С.
18. Немцов Б.Е., Цимринг Л.Ш. Эволюция начальных возмущений на границе раздела двух несмешивающихся потоков.//Препринт № 156. -
- Горький: ИФФ АН СССР. - 1986. - 29 С.

Дата поступления статьи
28 октября 1987 г.

Борис Ефимович Немцов

ОТРАЖЕНИЕ ОПТИЧЕСКОГО ИЗЛУЧЕНИЯ
ОТ НЕОДНОРОДНО ИНВЕРТИРОВАННОЙ СРЕДЫ

Подписано в печать 22.03.88 г. МП 00758. Формат 60 x 84 1/16.
Бумага писчая. Печать офсетная. Объем 1,98 усл. печ. л. Тираж 120
Заказ 4656. Бесплатно

Отпечатано на ротационной машине НИРФИ