Министерство высшего и среднего специального образования
Р С Ф С Р
Горьковский ордена Трудового Красного Знамени
научно-исследовательский радиофизический институт (НИРФИ)

Препринт № 254

К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ ЛЭМБА
ДЛЯ ОДНОРОДНОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

А.В. Разин

Горький 1988

Р а з и н А.В.

К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ ЛЭМБА ДЛЯ ОДНОРОДНОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА// Препринт № 254. - Горький: НИРФИ. - 1988. - 34 с.

УДК 534.232

Рассмотрена генерация упругих волн в однородном полупространстве поверхностным точечным импульсным источником силы, действующей нормально к границе. Двойные интегралы Фурье, описывающие скалярный и векторный потенциалы, а также смещения, преобразованы к однократным контурным интегралам, что позволяет подробно проанализировать поля вблизи фронтов продольной, поперечной и конической волн. Описана процедура получения выражений для смещений в виде легко вычисляемых на ЭВМ однократных интегралов от действительных гладких функций в конечных пределах. Получены точные аналитические выражения для вертикальных смещений на границе полупространства и на вертикали под источником.

I. Введение

В теории упругих волн одной из фундаментальных проблем является задача Лэмба, впервые поставленная в 1904 г. В работе /1/ Г. Лэмб, в частности, рассмотрел смещение поверхности однородного полупространства под воздействием импульсного поверхностного источника, который записывался в виде вертикальных напряжений, заданных на некотором конечном участке границы. В настоящее время под термином "задача Лэмба" понимается возбуждение упругих волн в твердом полупространстве самыми разнообразными как поверхностными, так и заглубленными источниками /2/, причем обычно рассматриваются два типа источников: поверхностные силовые нагрузки, распределенные по области в виде бесконечно длинной полосы (или тонкой нити) и круга конечного или бесконечно малого радиуса (точечный источник) / 2-7 /. Наибольший интерес для приложений, в частности, для проблем вибрационного просвечивания Земли, представляет исследование источников второго типа.

Для выяснения физических процессов, происходящих при генерации упругих волн в полупространстве поверхностными источниками, наиболее целесообразным является рассмотрение точечной нормальной к границе нагрузки, зависимость которой от времени описывается дельта-функцией Дирака. Решение задачи Лэмба для точечного импульсного источника позволяет подробно проанализировать вклад в поле смещений различных типов волн, которые разделяются по временам прихода.

Решение осесимметричной нестационарной задачи Лэмба нетрудно записать в виде двойных интегралов Фурье, для вычисления которых разработан ряд методов, основанных на теории функций комплексной переменной и контурном интегрировании /2, 8/. При использовании метода Каньяра-де Хупа путь интегрирования, первоначально проходящий по действительной оси, преобразуется к кривой сложного вида, проходящей в комплексной плоскости и определяемой свойствами среды и взаимным расположением источника и приемника /2/. В этом случае отыскание пути интегрирования, например, для слоистых сред оказывается довольно сложным. Аналогичные трудности возникают и при использовании методов контурного интегрирования, описанных в монографии /8/. Указанные затруднения снимаются при использовании развитого в /9/ метода вычисления двойных интегралов Фурье, описывающих импульсные акустические поля. Применяемый в /9/ подход удобен тем, что он позволяет свести двойные интегралы с бесконечными пределами к однократному контурному интегралу, причем контур интегрирования имеет универсальный вид для сред как с одной, так и со многими плоскими границами раздела. Представление импульсных волновых полей в виде однократного интеграла по замкнутому контуру является весьма удобным для их аналитических оценок вблизи фронтов волн. При произвольном расположении источника и точек наблюдения поле может быть записано в виде суммы некоторого алгебраического выражения, содержащего только элементарные функции, и однократного интеграла от гладкой действительной функции в конечных пределах, вычисление которого с помощью ЭВМ не представляет труда.

Метод контурного интегрирования /9/ использовался для рассмотрения отражения акустических импульсов от границы раздела двух газообразных сред, а также переходного излучения в акустике /10,11/. Представляет интерес применение этого метода для исследования процессов генерации сейсмических колебаний.

В настоящей работе решена задача о возбуждении упругих волн в однородном полупространстве поверхностным точечным импульсным воздействием, перпендикулярным границе. Проведено подробное исследование выражений для скалярного и векторного потенциалов смещений вблизи фронтов продольной и поперечной сферических волн, а также вблизи переднего и заднего фронтов конической волны. Описана процедура сведения двойных интегралов Фурье, определяющих сейсмические поля к легко вычисляемым на ЭВМ однократным интегралам от действительных функций в конечных пределах. Для практически важных частных случаев - для точек наблюдения, расположенных на поверхности полупространства и на вертикали под источником, получены точные аналитические выражения для вертикальных смещений в элементарных функциях.

2. Постановка задачи и интегральные выражения для потенциалов

Итак, пусть плоскость xOy декартовой системы координат совпадает с поверхностью однородного изотропного твердого тела, занимающего полупространство $z > 0$ и характеризуемого плотностью ρ и скоростями продольной и поперечной волн соответственно c_l и c_t. На границе твердого тела $z = 0$ заданы условия

$$\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0, \quad \sigma_{zz} = -p, \tag{I}$$

где σ_{ik} - тензор напряжений, а величина p, имеющая размерность давления, характеризует нормальное к границе воздействие. Будем рассматривать точечный импульсный источник

$$p = F\,\delta(x)\,\delta(y)\,\delta(t), \tag{2}$$

где t - время и $\delta(\xi)$ - дельта-функция Дирака.

Введем скалярный φ и векторный $\vec{A}$ потенциалы смещений $\vec{u}$ так, что

$$\vec{u} = \operatorname{grad}\varphi + \operatorname{rot}\vec{A}, \quad \operatorname{div}\vec{A} = 0.$$

Для потенциалов смещений справедливы уравнения

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c_l^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0,$$

$$\Delta\vec{A} - \frac{1}{c_t^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = 0,$$

решения которых совместно с граничными условиями (I), (2) нетрудно представить в следующем интегральном виде:

$$\varphi = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_0^{\infty} T_l(\omega,k)\, e^{-i\omega t + i\varkappa_l z} J_0(kr)\, k\, dk, \tag{3}$$

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_0^{\infty} T_t(\omega,k)\, e^{-i\omega t + i\varkappa_t z} J_1(kr)\, k\, dk, \tag{4}$$

причем при выводе последнего соотношения учтено, что вследствие цилиндрической симметрии задачи вектор $\vec{A}$ может иметь только одну компоненту в направлении единичного орта азимутального угла $\vec{e}_\varphi$: $\vec{A} = A\vec{e}_\varphi$. В выражениях (3), (4)

$$T_l(\omega,k) = \frac{F(k_t^2 - 2k^2)}{4\pi^2 \rho c_t^2 R_0(\omega,k)}, \quad T_t(\omega,k) = \frac{F\, i k æ_l}{2\pi^2 \rho c_t^2 R_0(\omega,k)},$$

$$R_0(\omega,k) = (k_t^2 - 2k^2)^2 + 4k^2 æ_l æ_t,$$

$$æ_{l,t} = \sqrt{k_{l,t}^2 - k^2},$$

$k_{l,t} = \omega/c_{l,t}$ – волновые числа продольной и поперечной волн для циклической частоты ω , $r = \sqrt{x^2+y^2}$ – горизонтальное расстояние от источника до точки наблюдения, J_0 и J_1 – функции Бесселя соответственно нулевого и первого порядка. Из условия отсутствия возмущений в среде при $t < 0$ следует, что контур интегрирования по ω в (3), (4) должен проходить выше точек ветвления $\omega = \pm c_{l,t}\, k$, т.е. $\mathrm{Im}\,\omega > 0$. Из условия ограниченности подынтегральных выражений в (3), (4) при $z \to \infty$ следует считать, что

$$\sqrt{\omega^2/c_{l,t}^2 - k^2} = i\left|\sqrt{k^2 - \omega^2/c_{l,t}^2}\right| \text{ при } k > \frac{|\omega|}{c_{l,t}}.$$

3. Исследование скалярного потенциала

Рассмотрим вначале скалярный потенциал, определяющий поле смещений в продольной волне. В интеграле (3) сделаем замену переменной интегрирования /9/

$$\omega = c_l k' x, \quad k = k'. \tag{5}$$

При этом

$$\psi = \int_{L_x} T_l(x)\, I_l(x)\, dx,$$

где

$$T_l(x) = \frac{Fc_l(a^2x^2-2)}{4\pi^2\rho c_t^2\left[(a^2x^2-2)^2+4\sqrt{x^2-1}\sqrt{a^2x^2-1}\right]},$$

$$a^2 = c_l^2/c_t^2,$$

$$I_l(x)=\int\limits_0^\infty \exp\left[-ik'(c_ltx-z\sqrt{x^2-1})\right]J_0(k'r)\,dk'. \qquad (6)$$

Поскольку контур интегрирования по ω в (3) проходит выше действительной оси, $\operatorname{Im}\omega > 0$, то в соответствии с (5) контур L_x также проходит в области $\operatorname{Im}x > 0$. Однако при некоторых значениях $\operatorname{Im}x$ интеграл (6) может стать расходящимся. Следовательно, контур L_x не может проходить произвольно в области $\operatorname{Im}x > 0$, и на величину $\operatorname{Im}x$ необходимо наложить ограничение. Это удобно сделать путем введения в подынтегральное выражение (6) регуляризирующего множителя $\exp(-\lambda k')$, $\lambda \to +0$ /9/:

$$I_l(x) = \int\limits_0^\infty \exp\left[-ik'(c_ltx-z\sqrt{x^2-1}-i\lambda)\right]J_0(k'r)\,dk'. \qquad (6')$$

Величина $\operatorname{Im}x$ на пути интегрирования L_x будет при этом определяться значением λ. Обоснование замены (5) и исследование сходимости интеграла (6) содержится в /9/. Здесь лишь отметим, что введение регуляризирующего множителя соответствует переходу от точечного источника к распределенному,

$$\delta(x)\,\delta(y) \to \frac{\lambda}{2\pi(\lambda^2+r^2)^{3/2}}.$$

Все дальнейшие вычисления будут выполнены при $\lambda \neq 0$, результаты для точечного источника можно получить путем предельного перехода $\lambda \to +0$.

Вычисляя интеграл (6′), выражение для скалярного потенциала запишем в виде:

$$\psi = \frac{Fc_l}{4\pi^2\rho c_t^2}\int\limits_{L_x}\frac{(a^2x^2-2)\,dx}{\left[(a^2x^2-2)^2+4\sqrt{x^2-1}\sqrt{a^2x^2-1}\right]F_l(x)}, \qquad (7)$$

где $F_l(x)=\sqrt{r^2-(c_ltx-z\sqrt{x^2-1}-i\lambda)^2}$. Входящие под интеграл (7) аналитические функции $\sqrt{x^2-1}$, $\sqrt{a^2x^2-1}$, $F_l(x)$ опреде -

лены на комплексной плоскости X следующим образом:

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2-1} = x, \tag{8}$$

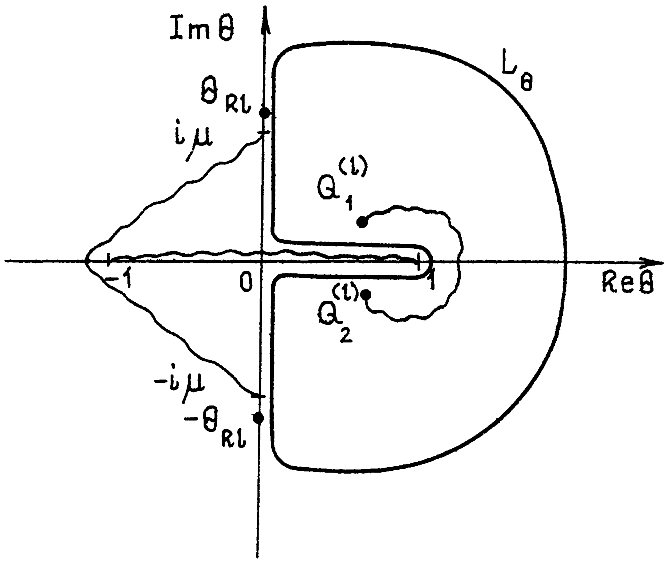
$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{a^2x^2-1} = ax,$$

$$\lim_{x\to 0} F_1(x) = \sqrt{r^2+z^2} = R > 0 .$$

В интеграле (7) сделаем еще одну замену /9/:

$$x = \frac{1}{\sqrt{1-\theta^2}}, \qquad \theta = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} . \tag{9}$$

При этом контур интегрирования L_x переходит в замкнутый контур L_θ (рис.I). Для совместного выполнения (8), (9) необходимо считать, что $\lim_{\theta\to\infty}\sqrt{1-\theta^2} = -i\theta$.



Р и с. 1. Контур интегрирования и особые точки подынтегрального выражения (12). Разрезы показаны волнистыми линиями.

Это соотношение определяет аналитическую функцию $\sqrt{1-\theta^2}$ на комплексной плоскости θ. Поскольку функция $F_l(x)$ определена при $x \to 0$ как положительное число, то в результате замены (9) получим

$$F_l(x) = -\frac{iR}{\sqrt{1-\theta^2}} E_l(\theta),$$

где корень

$$E_l(\theta) = \sqrt{(\theta - q_1^{(l)})(\theta - q_2^{(l)}) - \frac{2i\lambda}{R^2}\sqrt{1-\theta^2}(c_l t - \theta z)} \tag{10}$$

определен как положительное число при $\theta \to \infty$ и введено обозначение

$$q_{1,2}^{(l)} = \frac{1}{R^2}\left(c_l t z \pm r\sqrt{R^2 - c_l^2 t^2}\right). \tag{11}$$

Таким образом, выражение для скалярного потенциала смещений принимает вид интеграла по замкнутому контуру:

$$\psi(r,z,t) = \frac{iFc_l}{4\pi^2 \rho c_t^2 R} \oint\limits_{L_\theta} \frac{(2\theta^2 - 2 + a^2)\,\theta\, d\theta}{R_l(\theta)\, E_l(\theta)}, \tag{12}$$

где

$$R_l(\theta) = (2\theta^2 - 2 + a^2)^2 + 4\theta(1-\theta^2)\sqrt{\theta^2 + \mu^2},$$

$$\mu^2 = \frac{c_l^2}{c_t^2} - 1, \quad \lim_{\theta \to i\infty} \sqrt{\theta^2 + \mu^2} = i\,|\theta|. \tag{13}$$

Особыми точками подынтегрального выражения (12) внутри контура интегрирования L_θ являются точки ветвления функции $E_l(\theta)$. Особые точки функции $R_l(\theta)$ (13) (точки ветвления $\theta = \pm i\mu$ аналитической функции $\sqrt{\theta^2 + \mu^2}$ и определяемые из уравнения $R_l(\theta) = 0$ полюса $\theta_{Rl} = \pm i\sqrt{c_l^2 / c_R^2 - 1}$, где c_R -скорость поверхностной волны Рэлея) лежит вне контура L_θ (рис.1). Анализ, аналогичный проведенному в /9/, показывает, что при $z > c_l t$ функция $E_l(\theta)$ не имеет точек ветвления на выбранном месте римановой поверхности и скалярный потенциал равен нулю. Если $z < c_l t$, то внутри контура L_θ имеются точки ветвления функции $E_l(\theta)$ /9/:

$$Q^{(l)}_{1,2} = q^{(l)}_1 \pm i\,\frac{\lambda \sin^2(\delta - \delta_l)}{R \sin \delta_l},$$

где $\delta = \arccos(z/R)$, $\delta_l = \arccos(c_l t/R)$. Выражение для скалярного потенциала дается интегралом по берегам разреза, соединяющего точки ветвления $Q^{(l)}_1$ и $Q^{(l)}_2$. При вычислении этого интеграла необходимо учесть наличие у подкоренного выражения (I0) точек ветвления $\theta = \pm 1$ и рассмотреть две возможности: $R > c_l t$ и $R < c_l t$.

Неравенство $R > c_l t$ означает, что продольная волна еще не пришла в рассматриваемую область пространства. В этом случае (I2) можно переписать в виде:

$$\psi = \frac{iFc_l}{2\pi^2 \rho c_t^2 R}\left[\int\limits_{\substack{1\\ 0<\mathrm{Im}\,\theta\to 0}}^{Q^{(l)}_1} \frac{(2\theta^2 - 2 + a^2)\theta\, d\theta}{R_l(\theta) E_l(\theta)} + \int\limits_{\substack{Q^{(l)}_2\\ 0>\mathrm{Im}\,\theta\to 0}}^{1} \frac{(2\theta^2 - 2 + a^2)\theta\, d\theta}{R_l(\theta) E_l(\theta)}\right].$$

В предельном случае $\lambda \to 0$ точки ветвления $Q^{(l)}_1$ и $Q^{(l)}_2$ лежат сколь угодно близко к действительной оси, причем $\mathrm{Re}\,Q^{(l)}_1 = \mathrm{Re}\,Q^{(l)}_2$, так что $\psi = O(\lambda)$.

В случае $R < c_l t$ (продольная волна пришла в рассматриваемую область пространства) в интеграле (I2) можно сразу перейти к пределу $\lambda \to 0$, поскольку величины $q^{(l)}_1$ и $q^{(l)}_2$ имеют собственные отличные от нуля мнимые части при $\lambda = 0$. Таким образом, скалярный потенциал для точечного источника можно записать в виде:

$$\psi(r,z,t) = \frac{iFc_l H(t - R/c_l)}{4\pi^2 \rho c_t^2 R} \oint\limits_{L(q^{(l)}_1, q^{(l)}_2)} \frac{(2\theta^2 - 2 + a^2)\theta\, d\theta}{R_l(\theta)\,\varepsilon_l(\theta)}, \qquad \text{(I4)}$$

где контур интегрирования $L(q^{(l)}_1, q^{(l)}_2)$ охватывает разрез, соединяющий точки ветвления $q^{(l)}_{1,2}$,

$$H\left(t - \frac{R}{c_l}\right) = \begin{cases} 1, & t > R/c_l \\ 0, & t < R/c_l \end{cases}$$ – ступенчатая функция Хевисайда,

$$\varepsilon_l(\theta) = \sqrt{(\theta - q_1^{(l)})(\theta - q_2^{(l)})}\,.$$

Вычислить интеграл (I4) аналитически при произвольных координатах точки наблюдения не представляется возможным, однако он может быть легко оценен численно. Для этого необходимо растянуть контур интегрирования $L(q_1^{(l)}, q_2^{(l)})$ на бесконечность и перейти в подынтегральной функции к пределу $\theta \to \infty$. Интеграл по окружности бесконечно большого радиуса и вычеты в затрагиваемых при деформации контура полюсах вычисляются аналитически. Поскольку при $\lambda = 0$ разрез, соединяющий точки ветвления $\theta \pm I$, исчезает; численный расчет необходим лишь для интеграла по берегам проходящего по оси $\operatorname{Im}\theta$ разреза, соединяющего точки ветвления $\theta = \pm i\mu$. Замена $\theta = i\tau$ делает пределы интегрирования и подынтегральную функцию действительными. Таким образом, скалярный потенциал в произвольной точке наблюдения может быть записан в виде суммы некоторого алгебраического выражения, содержащего только элементарные функции, и однократного интеграла от гладкой действительной функции в конечных пределах.

Аналитически интеграл (I4) можно вычислить вблизи фронта продольной волны, $R \lessapprox c_l t$. При этом условии в выражении (II) для $q_{1,2}^{(l)}$, $c_l t z \gg |r\sqrt{R^2 - c_l^2 t^2}|$, так что $q_1^{(l)} \approx q_2^{(l)} \approx z/R$, $E_l(\theta) \approx \theta - z/R$ и скалярный потенциал пропорционален вычету в полюсе $\theta = z/R$:

$$\psi \approx -\frac{F c_l z (2z^2/R^2 - 2 + a^2) H(t - R/c_l)}{2\pi\rho_2 c_t^2 R^2 \left[(2z^2/R^2 - 2 + a^2)^2 + 4(z/R)(1 - z^2/R^2)\sqrt{z^2/R^2 + \mu^2}\right]} \quad (I5)$$

На вертикали прямо под источником, т.е. при $r = 0$, интеграл (I4) вычисляется точно. Действительно, в этом случае $q_1^{(l)} = q_2^{(l)} = c_l t/z$, $E_l(\theta) = \theta - c_l t/z$, и значение интеграла пропорционально вычету в полюсе $\theta = c_l t/z$:

$$\psi = -\frac{F c_l^2 t (2c_l^2 t^2/z^2 - 2 + a^2) H(t - z/c_l)}{2\pi\rho c_t^2 z^2 \left[(2c_l^2 t^2/z^2 - 2 + a^2)^2 + 4(c_l t/z)(1 - c_l^2 t^2/z^2)\sqrt{c_l^2 t^2/z^2 + \mu^2}\right]} \quad (I6)$$

Дифференцируя (I6) по координате z, можно получить точное аналитическое выражение для z - компоненты смещений в продольной волне при $r = 0$:

$$U_z\Big|_{r=0} = \frac{F}{2\pi\rho c_l^2 z}\,\delta\left(t-\frac{z}{c_l}\right) + \left\{\left[2c_l^2t^2+(a^2-2)z^2\right]^2 + 4c_l t(z^2-c_l^2t^2)\sqrt{c_l^2t^2+\mu^2z^2}\right\}^{-2} \times$$

$$\times\left\{2z(a^2-2)\left[2c_l^2t^2+(a^2-2)z^2\right]^2 + 8c_l^3t^3a^2z\sqrt{z^2\mu^2+c_l^2t^2} -\right.$$

$$\left. - \frac{4c_l t\mu^2 z(c_l^2t^2-z^2)\left[2c_l^2t^2+(a^2-2)z^2\right]}{\sqrt{\mu^2z^2+c_l^2t^2}}\right\}\frac{Fta^2H(t-z/c_l)}{2\pi\rho}.$$

Вблизи фронта продольной волны, $z \leq c_l t$, (I6) переходит в выражение (I5), в котором следует положить $z = R$

4. Исследование векторного потенциала

Перейдем к рассмотрению векторного потенциала, определяющего поле смещений в поперечной волне. Делая в (4) замену $\omega = c_t k' x$, $k = k'$, а затем замену (9), представим векторный потенциал в виде однократного интеграла по замкнутому контуру L_θ (рис.2):

$$A = \frac{iFr}{2\pi^2\rho c_t R}\oint\limits_{L_\theta}\frac{(1-\theta^2)\sqrt{\theta^2-\alpha^2}\,\theta\,d\theta}{E_t(\theta)\,R_t(\theta)\,D(\theta)}, \qquad (I7)$$

где

$$E_t(\theta) = \sqrt{(\theta-q_1^{(t)})(\theta-q_2^{(t)}) - \frac{2i\lambda}{R^2}\sqrt{1-\theta^2}(c_t t-\theta z)}$$

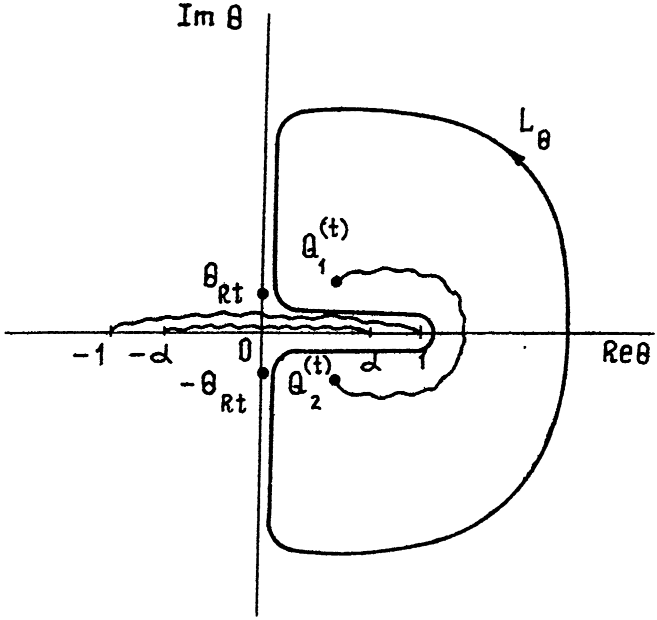
$$q_{1,2}^{(t)} = \frac{1}{R^2}\left(c_t t z \pm r\sqrt{R^2-c_t^2t^2}\right),$$

$$R_t(\theta) = (1-2\theta^2)^2 + 4\theta(1-\theta^2)\sqrt{\theta^2-\alpha^2},$$

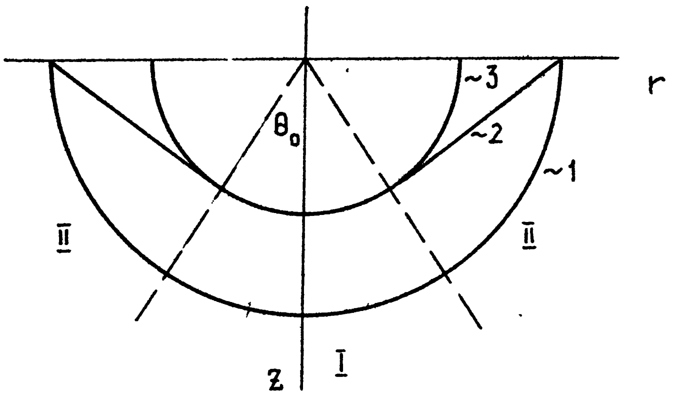
$$D(\theta) = c_t t - z\theta - RE_t(\theta) - i\lambda\sqrt{1-\theta^2},$$

$$\alpha^2 = 1-n^2 > 0, \qquad n = c_t/c_l,$$

$$\lim_{\theta\to\infty}\sqrt{\theta^2-\alpha^2} = \theta.$$



Р и с. 2. Контур интегрирования и особые точки подынтегрального выражения (17).



Р и с. 3. Картина фронтов упругих волн. Арабскими цифрами обозначены: 1 – фронт продольной сферической волны, 2 – фронт конической волны, 3 – фронт поперечной сферической волны. Коническая волна существует в области П

Особыми точками подынтегрального выражения в (I7), лежащими внутри контура L_θ, являются точки ветвления функции $E_t(\theta)$, возникающие при $z < C_t t$:

$$Q_{1,2}^{(t)} = q_1^{(t)} \pm i \frac{\lambda \sin(\delta - \delta_t)}{R \sin \delta_t}, \tag{I8}$$

где $\delta_t = \arccos(C_t t / R)$. Отметим, что при $\theta = I$ обращается в нуль (с точностью до членов, пропорциональных λ в степени не выше первой) функция $D(\theta)$, стоящая в знаменателе подынтегрального выражения в (I7), однако при этом числитель также обращается в нуль.

При вычислении интеграла по берегам разреза, соединяющего точки ветвления $Q_1^{(t)}$ и $Q_2^{(t)}$ необходимо учесть наличие у подынтегральной функции (I7) точек ветвления $\theta = \pm \alpha$ и рассмотреть две возможности: $\mathrm{Re}\, Q_1^{(t)} > \alpha$ и $\mathrm{Re}\, Q_1^{(t)} < \alpha$.

Условие $\mathrm{Re}\, Q_1^{(t)} = \alpha$, пользуясь (I8), можно переписать в виде:

$$t_{\text{кон}} = \frac{r}{C_l} + \frac{z}{C_t} \sqrt{1 - \frac{C_t^2}{C_l^2}},$$

где $t_{\text{кон}}$ есть время прихода в точку с координатами (r, z) конической волны (рис.3). Коническую волну можно интерпретировать как излучение Вавилова-Черенкова, которое генерируется в среде с фазовой скоростью волн C_t источником, движущимся со скоростью C_l и представляющим собой возмущения поверхности полупространства при прохождении фронта продольной волны. Очевидно, что коническая волна существует в интервале углов, больших $\theta_0 = \arcsin n$ (область П на рис.3).

В области I, т.е. при $\delta < \theta_0$ (или $\mathrm{Re}\, Q_1^{(t)} > \alpha$), рассмотрение, аналогичное проведенному выше для скалярного потенциала, приводит к следующему выражению для A ($\lambda = 0$):

$$A = \frac{i F r H(t - R/C_t)}{2\pi^2 \rho C_t R} \oint\limits_{L(q_1^{(t)}, q_2^{(t)})} \frac{(1-\theta^2)\sqrt{\theta^2 - \alpha^2}\, \theta\, d\theta}{\varepsilon_t(\theta) R_t(\theta)\, d(\theta)}, \tag{I9}$$

где

$$\varepsilon_t(\theta) = \sqrt{(\theta - q_1^{(t)})(\theta - q_2^{(t)})}, \quad d(\theta) = c_t t - z\theta - R\varepsilon_t(\theta)$$

и контур $L(q_{\nu_1}^{(t)}, q_{\nu_2}^{(t)})$ охватывает разрез, проведенный между точками ветвления $q_{\nu_1}^{(t)}$ и $q_{\nu_2}^{(t)}$.

Перейдем к рассмотрению векторного потенциала в области углов $\delta > \theta_0$, или при $\operatorname{Re} Q_1^{(t)} < \alpha$. В этом случае уже при $R > c_t t$ интеграл по берегам разреза, соединяющего точки ветвления $\theta = Q_{1,2}$, оказываются отличными от нуля в пределе $\lambda \to 0$. Это связано с тем, что входящий под интеграл (I7) корень $\sqrt{\theta^2 - \alpha^2}$ имеет разные знаки на верхнем и нижнем берегах разреза $(-\alpha, \alpha)$. Таким образом, при $t_{\text{кон}} < t < R/c_t$ векторный потенциал описывает поле конической волны и представляется в виде ($\lambda \to 0$)

$$A_{\text{кон}} = -\frac{2FrH(\alpha - q_{\nu_1}^{(t)})H(R/c_t - t)}{\pi^2 \rho c_t R} \int_{\alpha}^{q_{\nu_1}^{(t)}} \frac{(1-\theta^2)(1-2\theta^2)^2 \sqrt{\alpha^2-\theta^2}\, \theta\, d\theta}{\varepsilon_t(\theta)\, d(\theta)\, W_t(\theta)}, \tag{20}$$

где

$$W_t(\theta) = (1-2\theta^2)^4 - 16\theta^2(1-\theta^2)^2(\theta^2 - \alpha^2) =$$

$$= 16\alpha^2\theta^6 + 8(1-4\alpha^2)\theta^4 + 8(2\alpha^2 - 1)\theta^2 + 1.$$

Если $R < c_t t$ (в точку наблюдения пришла сферическая поперечная волна), то под интегралом (I7) можно перейти к пределу $\lambda \to 0$. Поскольку наличие разреза $(-\alpha, \alpha)$ не существенно для тех слагаемых, которые не содержат корень $\sqrt{\theta^2 - \alpha^2}$, векторный потенциал можно представить в виде суммы $A = A_1 + A_2$, где

$$A_1 = \frac{2iFr\, H(t - R/c_t)}{\pi^2 \rho c_t R} \oint_{L(q_{\nu_1}^{(t)}, q_{\nu_2}^{(t)})} \frac{(1-\theta^2)^2(\alpha^2-\theta^2)\theta^2\, d\theta}{\varepsilon_t(\theta)\, d(\theta)\, W_t(\theta)}, \tag{2I}$$

$$A_2 = -\frac{Fr\, H(\alpha - \operatorname{Re} q_{\nu_1}^{(t)})H(t - R/c_t)}{\pi^2 \rho c_t R} \int_{\alpha}^{q_{\nu_1}^{(t)}} \frac{(1-\theta^2)(1-2\theta^2)^2\sqrt{\alpha^2-\theta^2}\,\theta\, d\theta}{\varepsilon_t(\theta)\, d(\theta)\, W_t(\theta)} + \text{к.с.} \tag{22}$$

Рассмотрим асимптотики векторного потенциала вблизи фронтов сферической и конической волн.

Асимптотические выражения для потенциалов поперечной сферической волны вблизи ее фронта получим, полагая в (I9) и (2I) $c_t t z \gg |r\sqrt{R^2-c_t^2t^2}|$, так что $q_1^{(t)} \approx q_2^{(t)} \approx \frac{z}{R}$, $\varepsilon_t(\theta) \approx \theta - \frac{z}{R}$. Для областей I ($\delta < \theta_0$) и II ($\delta > \theta_0$) на рис.3 соответственно имеем

$$A \approx \frac{Frz(1-z^2/R^2)\sqrt{z^2/R^2-\alpha^2}\, H(t-R/c_t)}{\pi\rho c_t R^2(z^2/R-c_t t)\left[(1-2z^2/R^2)^2+4(z/R)(1-z^2/R^2)\sqrt{z^2/R^2-\alpha^2}\right]}, \quad (23)$$

$$A_1 \approx \frac{4Frz^2(1-z^2/R^2)^2(\alpha^2-z^2/R^2)H(t-R/c_t)}{\pi\rho c_t R^3(z^2/R-c_t t)\left[(1-2z^2/R^2)^4+16(z^2/R^2)(1-z^2/R^2)^2(\alpha^2-z^2/R^2)\right]}. \quad (24)$$

При рассмотрении асимптотики потенциала A_2 вблизи фронта поперечной сферической волны следует отметить, что основной вклад в интеграл (22) при $R \lessapprox c_t t$ дает область $\theta \approx q_1^{(t)} \approx \frac{z}{R}$ и его приближенно можно переписать в виде

$$A_2 \approx -\frac{2Frz\left(1-\frac{z^2}{R^2}\right)\left(1-\frac{2z^2}{R^2}\right)^2\sqrt{\alpha^2-\frac{z^2}{R^2}}\, H\left(\alpha-\frac{z}{R}\right)H\left(t-\frac{R}{c_t}\right)}{\pi^2\rho c_t R^2 d(z/R)\, W_t(z/R)}\int_{\alpha}^{z/R}\frac{d\theta}{\sqrt{\left(\theta-\frac{z}{R}\right)^2+\nu^2}}, \quad (25)$$

где $\nu^2 = \frac{r^2}{R^2}\left(\frac{c_t^2t^2}{R^2}-1\right)$. Вычисляя входящий в (25) интеграл, получаем асимптотику потенциала A_2 вблизи фронта поперечной сферической волны:

$$A_2 \approx \frac{-2Frz\left(1-\frac{z^2}{R^2}\right)\left(1-\frac{2z^2}{R^2}\right)^2\sqrt{\alpha^2-\frac{z^2}{R^2}}\, H\left(\alpha-\frac{z}{R}\right)H\left(t-\frac{R}{c_t}\right)}{\pi^2\rho c_t R^2\left(c_t t-\frac{z^2}{R}\right)\left[\left(1-\frac{2z^2}{R^2}\right)^4+16\frac{z^2}{R^2}\left(1-\frac{z^2}{R^2}\right)^2\left(\alpha^2-\frac{z^2}{R^2}\right)\right]}\ln\left(\frac{r}{R}\sqrt{\frac{c_t^2t^2}{R^2}-1}\right) \quad (26)$$

Аналогично может быть вычислена асимптотика потенциала конической волны вблизи ее заднего фронта, т.е. при $R \gtrsim c_t t$:

$$A_{\text{кон}} \approx \frac{-2Frz\left(1-\frac{z^2}{R^2}\right)\left(1-\frac{2z^2}{R^2}\right)^2\sqrt{\alpha^2-\frac{z^2}{R^2}}\; H\left(\alpha-\frac{z}{R}\right) H\left(\frac{R}{c_t}-t\right)}{\pi^2\rho c_t R^2\left(c_t t-\frac{z^2}{R}\right)\left[\left(1-\frac{2z^2}{R^2}\right)^4+16\frac{z^2}{R^2}\left(1-\frac{z^2}{R^2}\right)\left(\alpha^2-\frac{z^2}{R^2}\right)\right]} \ln\left(\frac{r}{R}\sqrt{1-\frac{c_t^2t^2}{R^2}}\right). \qquad (27)$$

Рассмотрим теперь потенциал конической волны вблизи ее переднего фронта, когда $\alpha \approx q_1^{(t)}$. В этом случае интеграл (20) можно приближенно записать в виде

$$A_{\text{кон}} \approx \frac{2Frn^2\alpha\sqrt{2\alpha}\; H(\alpha-q_1^{(t)})H\left(\frac{R}{c_t}-1\right)}{\pi^2\rho c_t R(z\alpha-c_t t)(1-2\alpha^2)^2\sqrt{q_1^{(t)}-q_2^{(t)}}}\int_{\alpha}^{q_1^{(t)}}\frac{\sqrt{\alpha-\theta}}{\sqrt{\theta-q_1^{(t)}}}\,d\theta . \qquad (28)$$

Входящий в (28) интеграл, согласно /II/, равен $(\pi/2)(q_1^{(t)}-\alpha)$, так что окончательное выражение для асимптотики потенциала конической волны вблизи ее переднего фронта имеет вид

$$A_{\text{кон}} \approx \frac{Frn^2\alpha^{3/2}(q_1^{(t)}-\alpha)H(\alpha-q_1^{(t)})H(R/c_t-t)}{\pi\rho c_t R(z\alpha-c_t t)(1-2\alpha^2)^2\sqrt{\frac{r}{R}}\sqrt{1-\frac{c_t^2t^2}{R^2}}} . \qquad (29)$$

Асимптотические выражения (I5), (23), (24), (26), (27), (29) для потенциалов позволяют проанализировать поле смещений вблизи фронтов продольной и поперечной волн, а также переднего и заднего фронтов конической волны. Для произвольных координат точек наблюдения выражения для скалярного и векторного потенциалов могут быть сведены к однократным интегралам от действительных гладких функций в конечных пределах.

5. Представление вертикальных смещений контурными интегралами

Вертикальную компоненту смещений частиц среды представим в виде суммы $u_z = u_z^{(l)} + u_z^{(t)}$, где

$$u_z^{(l)} = \frac{\partial\varphi}{\partial z}, \qquad u_z^{(t)} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA). \qquad (30)$$

Рассмотрим величину $u_z^{(l)}$, определяемую скалярным потенциалом. Ее можно записать в следующем интегральном виде:

$$u_z^{(l)} = \frac{iFc_l}{4\pi^2 \rho c_t^2 R^3} \oint\limits_{L_\theta} \frac{(2\theta^2 - 2 + a^2)(c_l t - z\theta - i\lambda\sqrt{1-\theta^2})\theta^2 d\theta}{R_l(\theta) E_l^3(\theta)} . \tag{31}$$

При $R > c_l t$ контур L_θ можно стянуть к разрезу, соединяющему точки ветвления $Q_1^{(l)}$ и $Q_2^{(l)}$, так что

$$u_z^{(l)} = \frac{iFc_l}{2\pi^2 \rho c_t^2 R^3} \left\{ \int\limits_1^{Q_1^{(l)}} \frac{(2\theta^2 - 2 + a^2)(c_l t - z\theta - i\lambda\sqrt{1-\theta^2})\,\theta^2 d\theta}{R_l(\theta)\left[\left(\theta - \frac{c_l t z}{R^2}\right)^2 - \frac{r^2}{R^2}\left(1 - \frac{c_l^2 t^2}{R^2}\right) - 2i\frac{\lambda}{R^2}\sqrt{1-\theta^2}(c_l t - \theta z)\right]^{3/2}} + \right. \tag{32}$$

$$\left. + \int\limits_{Q_2^{(l)}}^{1} \frac{(2\theta^2 - 2 + a^2)(c_l t - z\theta + i\lambda\sqrt{1-\theta^2})\,\theta^2 d\theta}{R_l(\theta)\left[\left(\theta - \frac{c_l t z}{R^2}\right)^2 - \frac{r^2}{R^2}\left(1 - \frac{c_l^2 t^2}{R^2}\right) + 2i\frac{\lambda}{R^2}\sqrt{1-\theta^2}(c_l t - \theta z)\right]^{3/2}} \right\} .$$

Если величины R и $c_l t$ отличаются значительно, то в (32) знаменатели всегда отличны от нуля и $u_z^{(l)} \sim O(\lambda)$. При $R \approx c_l t$ подынтегральные выражения имеют острый максимум в области $\theta \approx z/R$. Эта область дает основной вклад в интегралы (32), поэтому выражение для $u_z^{(l)}$ вблизи фронта продольной волны можно приближенно записать в виде ($R - c_l t \to +0$)

$$u_z^{(l)} = \frac{iFc_l(2z^2/R^2 - 2 + a^2)}{2\pi^2 \rho c_t^2 R^3 R_l(z/R)} \left\{ \left(c_l t - \frac{z^2}{R} - i\lambda\sqrt{1 - \frac{z^2}{R^2}}\right) \int\limits_1^{Q_1^{(l)}} \left[\left(\theta - \frac{c_l t z}{R^2}\right)^2 - \right.\right.$$

$$\left. - \frac{r^2}{R^2}\left(1 - \frac{c_l^2 t^2}{R^2}\right) - 2i\frac{\lambda}{R^2}\sqrt{1 - \frac{z^2}{R^2}}\left(c_l t - \frac{z^2}{R}\right)\right]^{-3/2} d\theta - \left(c_l t - \frac{z^2}{R} + i\lambda\sqrt{1 - \frac{z^2}{R^2}}\right) \times \tag{33}$$

$$\left. \times \int\limits_1^{Q_2^{(l)}} \left[\left(\theta - \frac{c_l t z}{R^2}\right)^2 - \frac{r^2}{R^2}\left(1 - \frac{c_l^2 t^2}{R^2}\right) + 2i\frac{\lambda}{R^2}\sqrt{1 - \frac{z^2}{R^2}}\left(c_l t - \frac{z^2}{R}\right)\right]^{-3/2} d\theta \right\} .$$

Вычисляя иниегралы в (33) и полагая $R - c_l t \to +0$ (при этом существенным является вклад от подстановки нижних пределов интегрирования), а затем $\lambda \to 0$, получаем следующее выражение для особенности поля вертикальных смещений вблизи фронта продольной волны:

$$U_{z\delta}^{(l)} = \frac{F z^2 (a^2 - 2r^2/R^2)\,\delta(t - R/c_l)}{2\pi\rho c_t^2 R^3 \left[(a^2 - 2r^2/R^2)^2 + 4(z r^2/R^3)\sqrt{z^2/R^2 + \mu^2}\right]} . \tag{34}$$

Если $R < c_l t$, то при $R \to c_l t - 0$ существует особенность поля вида (34). Кроме того, при $R < c_l t$ точки ветвления $Q_{1,2}^{(l)}$ имеют отличные от нуля мнимые части в пределе $\lambda \to 0$, так что интеграл по контуру $L\,(Q_1^{(l)}, Q_2^{(l)})$ отличен от нуля. Таким образом, выражение для определяемых скалярным потенциалом вертикальных смещений имеет вид

$$U_z^{(l)} = \frac{iFc_l H(t - R/c_l)}{4\pi^2 \rho c_t^2 R^3} \oint\limits_{L(q_1^{(l)}, q_2^{(l)})} \frac{(2\theta^2 - 2 + a^2)(c_l t - z\theta)\theta^2 d\theta}{R_l(\theta)\,\varepsilon_l^3(\theta)} + \tag{35}$$

$$+ \frac{F z^2 (a^2 - 2r^2/R^2)\,\delta(t - R/c_l)}{2\pi\rho c_t^2 R^3 \left[(a^2 - 2r^2/R^2)^2 + 4(z r^2/R^3)\sqrt{z^2/R^2 + \mu^2}\right]} .$$

Перейдем к рассмотрению вертикальных смещений, соответствующих векторному потенциалу. Выражение для них имеет вид

$$U_z^{(t)} = \frac{iF}{2\pi^2 \rho c_t R^3} \oint\limits_{L_\theta} \frac{\sqrt{\theta^2 - \alpha^2}\,(1 - \theta^2)(c_t t - z\theta - i\lambda\sqrt{1 - \theta^2})\theta d\theta}{R_t(\theta) E_t^3(\theta)} . \tag{36}$$

Исследование, аналогичное проведенному выше для $U_z^{(l)}$, показывает, что в области углов $\delta < \theta_0$ ($\alpha < z/R$), где коническая волна отсутствует, вертикальные смещения в поперечной волне описываются формулой:

$$U_z^{(t)} = \frac{iFH(t - R/c_t)}{2\pi^2 \rho c_t R^3} \oint\limits_{L(q_1^{(t)}, q_2^{(t)})} \frac{\sqrt{\theta^2 - \alpha^2}\,(1 - \theta^2)(c_t t - z\theta)\theta\, d\theta}{R'_t(\theta)\,\varepsilon_t^3(\theta)} + \tag{37}$$

$$+\frac{F z r^2 \sqrt{z^2/R^2-\alpha^2}\ \delta(t-R/c_t)}{\pi\rho c_t^2 R^4\left[(1-2z^2/R^2)^2+4(zr^2/R^3)\sqrt{z^2/R^2-\alpha^2}\right]}.$$

В области углов $\delta>\theta_0$ ($\alpha > z/R$), где существует коническая волна, в моменты времени, предшествующие приходу сферической поперечной волны, $R>c_t t$, смещения $U_z^{(t)}$ можно представить в виде

$$U_z^{(t)}=\frac{4iF}{\pi^2\rho c_t R^3}\left\{\int_1^{Q_1^{(t)}}\frac{(\alpha^2-\theta^2)(1-\theta^2)^2(c_t t-z\theta-i\lambda\sqrt{1-\theta^2})\theta^2 d\theta}{W_t(\theta)\,E_t^3(\theta)}-\right.$$

$$\left.-\int_1^{Q_2^{(t)}}\frac{(\alpha^2-\theta^2)(1-\theta^2)^2(c_t t-z\theta+i\lambda\sqrt{1-\theta^2})\,\theta^2\,d\theta}{W_t(\theta)\,E_t^{*3}(\theta)}\right\}+$$

$$+\frac{iF}{\pi^2\rho c_t R^3}\left\{\int_1^{\alpha+i0}\frac{\sqrt{\theta^2-\alpha^2}\,(1-\theta^2)(1-2\theta^2)^2(c_t t-z\theta-i\lambda\sqrt{1-\theta^2})\theta d\theta}{W_t(\theta)\,E_t^3(\theta)}-\right.$$

$$\left.-\int_1^{\alpha-i0}\frac{\sqrt{\theta^2-\alpha^2}(1-\theta^2)(1-2\theta^2)^2(c_t t-z\theta+i\lambda\sqrt{1-\theta^2})\,\theta\,d\theta}{W_t(\theta)\,E_t^{*3}(\theta)}\right\}-$$

$$-\frac{F}{\pi^2\rho c_t R^3}\left\{\int_{\alpha+i0}^{Q_1^{(t)}}\frac{\sqrt{\alpha^2-\theta^2}(1-\theta^2)(1-2\theta^2)^2(c_t t-z\theta-i\lambda\sqrt{1-\theta^2})\theta d\theta}{W_t(\theta)\,E_t^3(\theta)}+\right.$$

$$\left.+\int_{\alpha-i0}^{Q_2^{(t)}}\frac{\sqrt{\alpha^2-\theta^2}(1-\theta^2)(1-2\theta^2)^2(c_t t-z\theta+i\lambda\sqrt{1-\theta^2})\,\theta\,d\theta}{W_t(\theta)\,E_t^{*3}(\theta)}\right\}, \qquad (38)$$

где

$$E_t^*(\theta)=\left[\left(\theta-\frac{c_t t z}{R^2}\right)^2-\frac{r^2}{R^2}\left(1-\frac{c_t^2t^2}{R^2}\right)+2i\frac{\lambda}{R^2}\sqrt{1-\theta^2}\,(c_t t-\theta z)\right].$$

Можно показать, что разность интегралов в первых фигурных скобках в (38) дает вблизи фронта поперечной сферической волны особенность поля смещений в виде дельта-функции:

$$U_{z\delta}^{(t)} = \frac{4Fz^2r^4(d^2-z^2/R^2)}{\pi\rho c_t^2 R^7 W_t^{\cdot}(z/R)}\,\delta(t-R/c_t). \qquad (39)$$

При исследовании интегралов, стоящих во второй фигурной скобке в (38), следует учесть, что область $\theta \approx \frac{z}{R}$, где подынтегральные выражения имеют острый максимум при $R \approx c_t t$, лежит вне интервала интегрирования. Поэтому в пределе точечного источника, $\lambda \to 0$, рассматриваемая группа членов обращается в нуль.

Рассмотрим теперь члены в третьей фигурной скобке в (38). Вблизи фронта поперечной сферической волны основной вклад в интегралы даст область $\theta \approx z/R$, поэтому соответствующую часть смещений (будем называть ее распределенным возмущением) можно приближенно записать в виде

$$U_{zp} = -\frac{F\sqrt{d^2-z^2/R^2}\,(1-z^2/R^2)(1-2z^2/R^2)^2 z}{\pi^2\rho c_t R^4\, W_t(z/R)}\left\{\left(c_t t-\frac{z^2}{R}-i\lambda\sqrt{1-\frac{z^2}{R^2}}\right)\times\right.$$

$$\times\int\limits_{d+i0}^{Q_1^{(t)}}\left[\left(\theta-\frac{c_t t z}{R^2}\right)^2-\frac{r^2}{R^2}\left(1-\frac{c_t^2t^2}{R^2}\right)-2i\frac{\lambda}{R^2}\sqrt{1-\frac{z^2}{R^2}}\left(c_t t-\frac{z^2}{R}\right)\right]^{-3/2}d\theta+$$

$$+\left(c_t t-\frac{z^2}{R}+i\lambda\sqrt{1-\frac{z^2}{R^2}}\right)\times$$

$$\left.\times\int\limits_{d-i0}^{Q_2^{(t)}}\left[\left(\theta-\frac{c_t t z}{R^2}\right)^2-\frac{r^2}{R^2}\left(1-\frac{c_t^2t^2}{R^2}\right)+2i\frac{\lambda}{R^2}\sqrt{1-\frac{z^2}{R^2}}\left(c_t t-\frac{z^2}{R}\right)\right]^{-3/2}d\theta\right\}. \qquad (40)$$

Выполняя в (40) интегрирование (при этом существенный вклад дает подстановка нижних пределов интегрирования) для распределенного возмущения получаем

$$U_{zp} = \frac{F z r^2 (1-2z^2/R^2)^2 \sqrt{\alpha^2 - z^2/R^2}}{\pi^2 \rho c_t^2 R^4 W_t(z/R)} \cdot \frac{t - R/C_t}{(t-R/C_t)^2 + (\lambda r/C_t R)^2} \quad (4I)$$

В предельном случае точечного источника

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{t - R/C_t}{(t-R/C_t)^2 + (\lambda r/C_t R)^2} = \frac{P}{t - R/C_t},$$

где P есть символ главного значение.

Если R и $C_t t$ отличаются значительно, то можно в (38) положить $\lambda = 0$. Это приводит к выражению для вертикальных смещений в конической волне.

$$U_{z\,кон} = -\frac{2FH(\alpha - q_1^{(t)}) H(R - C_t t)}{\pi^2 \rho c_t R^3} \int_{\alpha}^{q_1^{(t)}} \frac{\sqrt{\alpha^2 - \theta^2}(1-\theta^2)(1-2\theta^2)^2 (C_t t - z\theta)\theta d\theta}{W_t(\theta)\, \varepsilon_t^3(\theta)} . \quad (42)$$

Если $R < C_t t$, то при $R \to C_t t - 0$ существуют особенности поля вида (39) и (4I). Далее, поскольку при $R < C_t t$ величины $q_1^{(t)}$ и $q_2^{(t)}$ имеют отличные от нуля мнимые части, то можно сразу перейти в(36) к пределу $\lambda \to 0$, что приводит к следующему выражению для вертикальных смещений в сферической поперечной волне:

$$U_{z\,сф}^{(t)} = \frac{iFH(t-R/C_t)}{2\pi^2 \rho c_t R^3} \oint_{L_\theta} \frac{\sqrt{\theta^2 - \alpha^2}(1-\theta^2)(C_t t - z\theta)\,\theta\, d\theta}{R_t(\theta)\, \varepsilon_t^3(\theta)} . \quad (43)$$

Для тех членов под интегралом (43), которые не содержат корня $\sqrt{\alpha^2 - \theta^2}$, наличие разреза $(-\alpha, \alpha)$ не существенно, и для них контур интегрирования L_θ может быть стянут к разрезу, соединяющему точки ветвления $q_1^{(t)}$ и $q_2^{(t)}$ функции $\varepsilon_t(\theta)$. Для членов, содержащих функцию $\sqrt{\alpha^2 - \theta^2}$, необходимо учитывать разрез $(-\alpha, \alpha)$. Таким образом, выражение для $U_z^{(t)}$ при $R < C_t t$ имеет вид

$$U_z^{(t)} = \frac{2iFH(t-R/C_t)}{\pi^2 \rho c_t R^3} \oint_{L(q_1^{(t)}, q_2^{(t)})} \frac{(\alpha^2 - \theta^2)(1-\theta^2)^2 (C_t t - z\theta)\,\theta^2\, d\theta}{W_t(\theta)\, \varepsilon_t^3(\theta)} -$$

$$-\left[\frac{FH(\alpha-\mathrm{Re}\,q_1^{(t)})H(t-R/c_t)}{\pi^2 \rho c_t R^3}\int_{\alpha}^{q_1^{(t)}}\frac{\sqrt{\alpha^2-\theta^2}(1-\theta^2)(1-2\theta^2)^2(c_t t-z\theta)\theta\, d\theta}{W_t(\theta)\,\varepsilon_t^3(\theta)}+\text{к.с.}\right]+$$

$$+\frac{4Fz^2r^4(\alpha^2-z^2/R^2)\delta(t-R/c_t)}{\pi\rho c_t^2 R^7\left[16\alpha^2(z/R)^6+8(1-4\alpha^2)(z/R)^4+8(2\alpha^2-1)(z/R)^2+1\right]}+$$

$$+\frac{Fzr^2(1-2z^2/R^2)^2\sqrt{\alpha^2-z^2/R^2}\;H(\alpha-\mathrm{Re}\,q_1^{(t)})}{\pi^2\rho c_t^2 R^4\left[16\alpha^2(z/R)^6+8(1-4\alpha^2)(z/R)^4+8(2\alpha^2-1)(z/R)^2+1\right]}\cdot\frac{P}{t-\dfrac{R}{c_t}} \quad (44)$$

Контурные интегралы в (35) и (43) могут быть сведены к однократным интегралам от действительных функций в конечных пределах. Для этого нужно растянуть контур интегрирования L_θ на бесконечность. Интегралы по окружности бесконечно большого радиуса, как нетрудно показать, равны нулю. Вычеты в полюсах $\theta = \pm\,\theta_{Rl}$ и $\theta = \pm\,\theta_{Rt}$ вычисляются аналитически. Таким образом, необходимо вычислить только интегралы по берегам разрезов, проведенных между парами точек $\theta = \pm\, i\mu$ в интеграле (35) и $\theta = \pm\,\alpha$ в интеграле (43), причем в (35) необходимо рассмотреть случаи $|\mathrm{Im}\, q_1^{(l)}|<\mu$, $\mu<|\mathrm{Im}\, q_1^{(l)}|<|\theta_{Rl}|$ и $|\mathrm{Im}\, q_1^{(l)}|>|\theta_{Rl}|$, а в (43) – случаи $|\mathrm{Im}\, q_1^{(t)}|<|\theta_{Rt}|$ и $|\mathrm{Im}\, q_1^{(t)}|>|\theta_{Rt}|$.

Рассмотрение горизонтальных смещений частиц среды в упругих волнах может быть проведено аналогично.

6. Вычисление вертикальных смещений поверхности полупространства

При экспериментальных исследованиях сейсмических волн обычно измеряются вертикальные смещения земной поверхности. Поэтому ниже будут вычислены z -компоненты смещений границы полупространства.

Из (35) следует, что при $z = 0$ вертикальные смещения в продольной волне можно переписать в виде

$$u_z^{(l)}(0) = \frac{iFa^2t}{4\pi^2\rho r^3} H(c_l t - r)(I_1 - 4I_2), \qquad (45)$$

где

$$I_1 = \oint_{L_\theta} \frac{(2\theta^2-2+a^2)^3\,\theta^2\,d\theta}{W_l(\theta)\,(\theta^2+\gamma^2)^{3/2}}, \qquad (46)$$

$$I_2 = \oint_{L_\theta} \frac{(2\theta^2-2+a^2)(1-\theta^2)\sqrt{\theta^2+\mu^2}\,\theta^3 d\theta}{W_l(\theta)\,(\theta^2+\gamma^2)^{3/2}}, \qquad (47)$$

$$W_l(\theta) = (2\theta^2-2+a^2)^4 - 16\theta^2(1-\theta^2)^2(\theta^2+\mu^2) =$$

$$= 16\mu^2\theta^6 + 8(3\mu^4-2\mu^2+1)\theta^4 + 8(\mu^6-3\mu^4+\mu^2-1)\theta^2 + (\mu^2-1)^4,$$

$$\gamma^2 = \frac{c_l^2 t^2}{r^2} - 1 > 0, \qquad \lim_{\theta\to i\infty} \sqrt{\theta^2+\gamma^2} = i|\theta|.$$

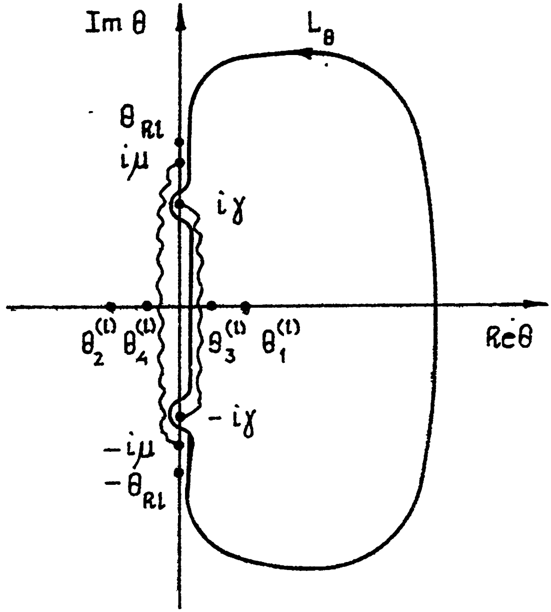
Особыми точками подынтегральных выражений в (46), (47) являются полюса $\theta = \pm i\gamma$ и совпадающие с ними точки ветвления аналитической функции $\sqrt{\theta^2+\gamma^2}$, точки ветвления $\theta = \pm i\mu$ функции $\sqrt{\theta^2+\mu^2}$ и шесть полюсов, даваемых решением уравнения $W_l(\theta) = 0$. Для определенности рассмотрим среду, в которой $c_l^2/c_t^2 = a^2 = 3$. Тогда для полюсов имеем:

$$\theta_{1,2}^{(l)^2} = 1 - \frac{a^2}{S_1} > 0, \qquad \theta_{3,4}^{(l)^2} = 1 - \frac{a^2}{S_2} > 0, \qquad \theta_{5,6}^{(l)^2} = \theta_{Rl}^2 = 1 - \frac{a^2}{S_3} < 0,$$

где

$$S_1 = 4, \quad S_2 = 2 + \frac{2}{\sqrt{3}} \approx 3{,}1547, \quad S_3 = 2 - \frac{2}{\sqrt{3}} \approx 0{,}8453 \ /3/.$$

Внутри контура интегрирования L_0 лежит разрез, соединяющий точки ветвления $\theta = \pm i\gamma$, а также полюса $\theta = \pm i\gamma$, $\theta = \theta_1^{(l)}$ и $\theta = \theta_3^{(l)}$ (рис.4).



Р и с. 4. Контур интегрирования L_θ и особые точки подынтегральных выражений (46), (47) для случая $C_t t < r < C_l t$

Для вычисления интеграла I_1 растянем контур интегрирования L_θ на бесконечность. При деформации контура затрагиваются полюса $\theta = \theta_2^{(l)}$, $\theta = \theta_4^{(l)}$ и $\theta = \pm\theta_{Rl}$. Если $\gamma < |\theta_{Rl}|$, т.е. $C_R t < r^2 < C_l t$, то вклад вычетов в полюсах $\theta = \pm\theta_{Rl}$ отличен от нуля, поскольку знаки корня $\sqrt{\theta^2+\gamma^2}$ при $\theta = \theta_{Rl}$ и $\theta = -\theta_{Rl}$ различны. При $\gamma > |\theta_{Rl}|$ (или $r < C_R t$) вычеты в полюсах $\theta = \pm\theta_{Rl}$ равны по модулю, но противоположны по знаку. Таким образом, для I_1 имеем:

$$I_1 = 2\pi i \left[\frac{1}{2\mu^2} - f_1(\theta_2^{(l)}) \frac{\theta_2^{(l)}}{\sqrt{\theta_2^{(l)} + \gamma^2}} - f_1(\theta_4^{(l)}) \frac{\theta_4^{(l)}}{\sqrt{\theta_4^{(l)} + \gamma^2}} - \right.$$

$$- 2f_1(\theta_{Rl}) \frac{|\theta_{Rl}|}{\left|\sqrt{\theta_{Rl}^2 + \gamma^2}\right|} H(r - c_R t) \Bigg] \tag{48}$$

где

$$f_1(\theta) = \frac{(2\theta^2 - 2 + a^2)^3}{[96\mu^2\theta^4 + 32(3\mu^4 - 2\mu^2 + 1)\theta^2 + 16(\mu^6 - 3\mu^4 + \mu^2 - 1)](\theta^2 + \gamma^2)} .$$

Необходимо учесть, что в полюсах $\theta_2^{(l)}$ и $\theta_4^{(l)}$ корень $\sqrt{\theta^2 + \gamma^2}$ определен как отрицательное число.

При вычислении интеграла I_2 следует рассмотреть три случая: $\gamma < \mu$, $\mu < \gamma < |\theta_{Rl}|$, $\gamma > |\theta_{Rl}|$ или, соответственно $c_t t < r < c_l t$, $c_R t < r < c_t t$, $r < c_R t$. Если $\gamma < \mu$, то интеграл по контуру, охватывающему разрез ($-i\gamma$, $i\gamma$), равен нулю вследствие нечетности подынтегральной функции и симметричности пределов интегрирования, так что значение I_2 определяется вычетами в полюсах $\theta_1^{(l)}$ и $\theta_3^{(l)}$. При выполнении условия $\gamma > \mu$ контур интегрирования L_θ следует растянуть на бесконечность. Учитывая, что возникающий при деформации контура интеграл по берегам разреза ($-i\mu$, $i\mu$) равен нулю, получаем следующее значение интеграла I_2 :

$$I_2 = 2\pi i \left\{ \left[f_2(\theta_1^{(l)}) \frac{\sqrt{\theta_1^{(l)2} + \mu_2}}{\sqrt{\theta_1^{(l)2} + \gamma^2}} + f_2(\theta_3^{(l)}) \frac{\sqrt{\theta_3^{(l)2} + \mu^2}}{\sqrt{\theta_3^{(l)2} + \gamma^2}} \right] \times \right.$$

$$\times H(c_l t - r) H(r - c_t t) - \left[\frac{1}{8\mu^2} + f_2(\theta_2^{(l)}) \frac{\sqrt{\theta_2^{(l)2} + \mu^2}}{\sqrt{\theta_2^{(l)2} + \gamma^2}} + \right.$$

$$\left. \left. + f_2(\theta_4^{(l)}) \frac{\sqrt{\theta_4^{(l)2} + \mu^2}}{\sqrt{\theta_4^{(l)2} + \gamma^2}} + 2H(r - c_R t) f_2(\theta_{Rl}) \frac{\left|\sqrt{\theta_{Rl}^2 + \mu^2}\right|}{\left|\sqrt{\theta_{Rl}^2 + \gamma^2}\right|} \right] H(c_t t - r) \right\}, \tag{49}$$

где

$$f_2(\theta)=\frac{(2\theta^2-2+a^2)(1-\theta^2)\theta^2}{\left[96\mu^2\theta^4+32(3\mu^4-2\mu^2+1)\theta^2+16\mu(\mu^6-3\mu^4+\mu^2-1)\right](\theta^2+\gamma^2)}.$$

Подстановка (48) и (49) в формулу (45) приводит к выражению для части вертикальных смещений поверхности полупространства, определяемой скалярным потенциалом.

Перейдем к рассмотрению вертикальных смещений, соответствующих векторному потенциалу. Для расстояний из интервала $c_t t < r < c_l t$ z--компонента смещений поверхности полупространства определяется суммой смещений $U_z^{(1)}(0)$ и смещений $U_{z\,кон}(0)$ в конической волне. Из (42) следует, что

$$U_{z\,кон}(0)=-\frac{2Ft}{\pi^2\rho r^3}H(c_l t-r)H(r-c_t t)I_3\,, \qquad (50)$$

где

$$I_3=\int_{\alpha}^{\xi}\frac{(1-2\theta^2)^2(1-\theta^2)\sqrt{\alpha^2-\theta^2}\;\theta\,d\theta}{W_t(\theta)(\theta^2-\xi^2)^{3/2}}\,,$$

$$\xi^2=1-c_t^2t^2/r^2>0, \qquad \lim_{\theta\to\infty}\sqrt{\theta^2-\xi^2}=\theta.$$

Вычислим интеграл I_3. Можно показать /II/, что справедливо соотношение

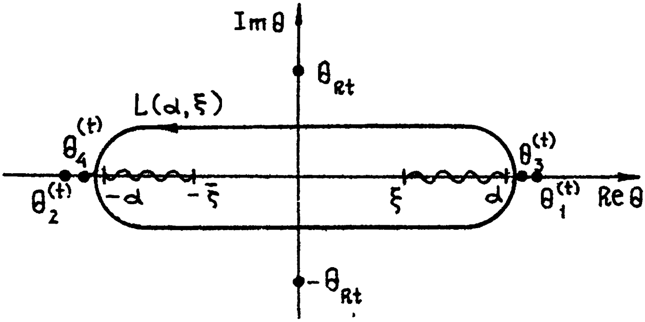
$$I_3=-\frac{i}{4}\Omega\,, \qquad (51)$$

где

$$\Omega=\oint\limits_{L(\alpha,\xi)}\frac{(1-2\theta^2)^2(1-\theta^2)\sqrt{\theta^2-\alpha^2}\;\theta\,d\theta}{W_t(\theta)(\theta^2-\xi^2)^{3/2}}\,. \qquad (52)$$

Интегрирование в (52) проводится по замкнутому контуру, охватывающему разрезы, проведенные по оси $\mathrm{Re}\,\theta$ между парами точек $(-\alpha, -\xi)$,

(ξ , α) (рис.5).



Р и с. 5. Контур интегрирования $L(\alpha,\xi)$
Разрезы показаны волнистыми линиями

Интеграл Ω можно вычислить, растягивая контур интегрирования L (α , ξ) на бесконечность. При этом необходимо учесть наличие шести полюсов, даваемых решениями уравнения $W_t(\theta) = 0$. Полагая, как и выше, $c_l^2/c_t^2 = 3$ ($\alpha = \sqrt{2/3} \approx 0{,}816$), для полюсов $\theta_t^2 = 1 - 1/s_{1,2,3}$ имеем

$$\theta_{1,2}^{(t)} \approx \pm 0{,}866, \quad \theta_{3,4}^{(t)} \approx \pm 0{,}826, \quad \pm\theta_{Rt} = 0{,}428\,i .$$

Вычисляя интеграл по окружности бесконечно большого радиуса и вычеты в перечисленных полюсах, получаем

$$\Omega = -2\pi i\left[\frac{1}{4\alpha^2} + 2f_3(\theta_1^{(t)})\frac{\sqrt{\theta_1^{(t)2}-\alpha^2}}{\sqrt{\theta_1^{(t)2}-\xi^2}} + 2f_3(\theta_3^{(t)})\frac{\sqrt{\theta_3^{(t)2}-\alpha^2}}{\sqrt{\theta_3^{(t)2}-\xi^2}} + 2f_3(\theta_{Rt})\frac{\sqrt{\alpha^2-\theta_{Rt}^2}}{\sqrt{\xi^2-\theta_{Rt}^2}}\right] \qquad (53)$$

где

$$f_3(\theta) = \frac{(1-2\theta^2)^2(1-\theta^2)}{\left[96\alpha^2\theta^4 + 32(1-4\alpha^2)\theta^2 + 16(2\alpha^2-1)\right](\theta^2-\xi^2)} .$$

Подстановка (53), (51) в (50) приводит к следующему выражению для вертикальных смещений поверхности полупространства в конической волне:

$$U_z^{кон}(0)=\frac{Ft}{\pi\rho r^3}\left[\frac{1}{4\alpha^2}+2f_3(\theta_1^{(t)})\frac{\sqrt{\theta_1^{(t)2}-\alpha^2}}{\sqrt{\theta_1^{(t)2}-\xi^2}}+2f_3(\theta_3^{(t)})\frac{\sqrt{\theta_3^{(t)2}-\alpha^2}}{\sqrt{\theta_3^{(t)2}-\xi^2}}-\right.$$

$$\left.+2f_3(\theta_{Rt})\frac{\sqrt{\alpha^2-\theta_{Rt}^2}}{\sqrt{\xi^2-\theta_{Rt}^2}}\right]H(c_l t-r)H(r-c_t t). \qquad (54)$$

Как следует из (43), выражение для вертикальных смещений поверхности полупространства в сферической поперечной волне можно записать в виде

$$U_{z\,сф}^{(t)}(0)=\frac{iFt}{2\pi^2\rho r^3}(I_4-4I_5)H(c_t t-r), \qquad (55)$$

где

$$I_4=\oint\limits_{L_\theta}\frac{(1-2\theta^2)^2(1-\theta^2)\sqrt{\theta^2-\alpha^2}\;\theta\,d\theta}{W_t(\theta)\,(\theta^2+\nu_0^2)^{3/2}},$$

$$I_5=\oint\limits_{L_\theta}\frac{(\theta^2-\alpha^2)(1-\theta^2)^2\;\theta^2 d\theta}{W_t(\theta)(\theta^2+\nu_0^2)^{3/2}},$$

$$\nu_0^2=c_t^2t^2/r^2-1>0,\qquad \lim_{\theta\to i\infty}\sqrt{\theta^2+\nu_0^2}=i\,|\theta|.$$

Интегралы I_4, I_5 легко вычислить, растягивая контур интегрирования L_θ на бесконечность. При этом следует учесть, что возникающий при деформации контура в I_4 интеграл по берегам разреза ($-\alpha$, α) равен нулю, поскольку подынтегральная функция нечетна, а пределы интегрирования симметричны. После проведения необходимых выкладок для I_4 и I_5 получаем

$$I_4=-2\pi i\left[\frac{1}{4\alpha^2}+f_4(\theta_2^{(t)})\frac{\sqrt{\theta_2^{(t)2}-\alpha^2}}{\sqrt{\theta_2^{(t)2}+\nu_0^2}}+f_4(\theta_4^{(t)})\frac{\sqrt{\theta_4^{(t)2}-\alpha^2}}{\sqrt{\theta_4^{(t)2}+\nu_0^2}}+\right.$$

$$+ 2f_4(\theta_{Rt})\frac{|\sqrt{\theta_{Rt}^2 - \alpha^2}|}{|\sqrt{\theta_{Rt}^2 + \nu_0^2}|} H(r - c_R t)\Bigg], \tag{56}$$

$$f_4(\theta) = \frac{(1-2\theta^2)^2(1-\theta^2)}{\left[96\alpha^2\theta^4 + 32(1-4\alpha^2)\theta^2 + 16(2\alpha^2-1)\right](\theta^2+\nu_0^2)},$$

$$I_5 = 2\pi i\left[\frac{1}{16\alpha^2} - f_5(\theta_2^{(t)})\frac{\theta_2^{(t)}}{\sqrt{\theta_2^{(t)^2}+\nu_0^2}} - f_5(\theta_4^{(t)})\frac{\theta_4^{(t)}}{\sqrt{\theta_4^{(t)^2}+\nu_0^2}} -\right.$$

$$\left. - 2f_5(\theta_{Rt})\frac{|\theta_{Rt}|}{|\sqrt{\theta_{Rt}^2+\nu_0^2}|} H(r - c_R t)\right], \tag{57}$$

$$f_5(\theta) = \frac{(\theta^2-\alpha^2)(1-\theta^2)^2}{\left[96\alpha^2\theta^4 + 32(1-4\alpha^2)\theta^2 + 16(2\alpha^2-1)\right](\theta^2+\nu_0^2)}.$$

Подстановка (56), (57) в (55) приводит к выражению для $U_{z\,сф}^{(t)}(0)$, причем необходимо учитывать, что корни $\sqrt{\theta^2-\alpha^2}$, $\sqrt{\theta^2-\nu_0^2}$ определены в полюсах $\theta_2^{(t)}$ и $\theta_4^{(t)}$ как отрицательные числа.

После вычисления величин $U_z^{(l)}(0)$, $U_{z\,кон}(0)$ и $U_{z\,сф}^{(t)}(0)$ выражение для z - компоненты смещений поверхности полупространства может быть представлено в виде

$$U_z(0) = \frac{Ft}{\pi\rho r^3}\left[U_1 H(c_l t - r)H(r - c_t t) + \right.$$

$$\left. + U_2 H(c_t t - r)H(r - c_R t)\right], \tag{58}$$

где

$$U_1 = a^2\left[f_1(\theta_1^{(l)})\frac{\theta_1^{(l)}}{\sqrt{\theta_1^{(l)^2}+\gamma^2}} + f_1(\theta_3^{(l)})\frac{\theta_3^{(l)}}{\sqrt{\theta_3^{(l)^2}+\gamma^2}} + \right.$$

$$\left. + f_1(\theta_{Rl})\frac{|\theta_{Rl}|}{|\sqrt{\theta_{Rl}^2+\gamma^2}|}\right] + 2\left[f_3(\theta_1^{(t)})\frac{\sqrt{\theta_1^{(t)^2}-\alpha^2}}{\sqrt{\theta_1^{(t)^2}-\xi^2}} + \right.$$

$$+f_3(\theta_3^{(t)})\,\frac{\sqrt{\theta_3^{(t)^2}-\alpha^2}}{\sqrt{\theta_3^{(t)^2}-\xi^2}}+f_3(\theta_{Rt})\,\frac{\sqrt{\alpha^2-\theta_{Rt}^2}}{\sqrt{\xi^2-\theta_{Rt}^2}}\Bigg], \qquad (59)$$

$$U_2=2\left[a^2 f_1(\theta_{Rl})\frac{|\theta_{Rl}|}{\left|\sqrt{\theta_{Rl}^2+\gamma^2}\right|}+2f_4(\theta_{Rt})\frac{\left|\sqrt{\theta_{Rt}^2-\alpha^2}\right|}{\left|\sqrt{\theta_{Rt}^2+\gamma_0^2}\right|}\right] \qquad (60)$$

Учитывая явный вид всех входящих в (59), (60) величин, выражение (58) можно записать в следующей форме:

$$u_z(0)=\frac{Fta\,H(r-c_tt)H(c_lt-r)}{16\pi\rho}\left\{\frac{s_1(s_1-2)^2\sqrt{s_1-a^2}}{(s_1c_t^2t^2-r^2)^{3/2}\left[a^2(s_1^2-6s_1+6)+2(2s_1-3)\right]}+\right.$$

$$+\frac{s_2(s_2-2)^2\sqrt{s_2-a^2}}{(s_2c_t^2t^2-r^2)^{3/2}\left[a^2(s_2^2-6s_2+6)+2(2s_2-3)\right]}-$$

$$\left.-\frac{s_3(s_3-2)^2\sqrt{a^2-s_3}}{(r^2-c_R^2t^2)^{3/2}\left[a^2(s_3^2-6s_3+6)+2(2s_3-3)\right]}\right\}-$$

$$-\frac{Fta\,s_3(s_3-2)^2\sqrt{a^2-s_3}\,H(c_tt-r)H(r-c_Rt)}{8\pi\rho(r^2-c_R^2t^2)^{3/2}\left[a^2(s_3^2-6s_3+6)+2(2s_3-3)\right]}. \qquad (61)$$

Таким образом, метод контурного интегрирования /9/позволяет получить точное аналитическое выражение в элементарных функциях для вертикальных смещений границы упругого полупространства при воздействии на нее нормальной точечной нагрузки, зависимость которой от времени описывает дельта-функция Дирака. Для произвольно меняющейся по времени нагрузки $p(t)$ смещения u_p могут быть вычислены по формуле Дюамеля (/7/, стр.209):

$$u_p(t)=\int_0^t p(t-\tau)\,u_\delta(\tau)\,d\tau,$$

где $U_\delta(\tau)$ - отклик среды на воздействие в форме дельта-импульса.

Из (61) следует, что на расстоянии r от источника вертикальная компонента смещений поверхности полупространства отлична от нуля в моменты времени $r/c_l < t < r/c_R$. Короткоимпульсный источник вертикальной силы генерирует на поверхности полупространства распределенное возмущение, длительность которого определяется дистанцией до точки наблюдения и скоростями упругих волн.

При рассмотрении возбуждения упругих волн в полупространстве гармоническими источниками принято отождествлять поле рэлеевской волны с вычетом в полюсе $K = K_R$, даваемом решением уравнения /2, 3/

$$(K_t^2 - 2K_R^2)^2 + 4K_R^2 \sqrt{K_l^2 - K_R^2}\sqrt{K_t^2 - K_R^2} = 0 .$$

Представляет интерес выяснить, насколько подобная операция правомерна для импульсных источников.

Вертикальные смещения поверхности полупространства можно записать в следующем виде

$$U_z(0) = \frac{iF}{4\pi^2 \rho c_t^4}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega \int\limits_0^{\infty} \frac{\omega^2\sqrt{\omega^2/c_l^2 - k^2}\; e^{-i\omega t}}{\left(\frac{\omega^2}{c_t^2} - 2k^2\right)^2 + 4k^2\sqrt{\frac{\omega^2}{c_l^2} - k^2}\sqrt{\frac{\omega^2}{c_t^2} - k^2}} J_0(kr)\, k\, dk. \tag{62}$$

В интеграле по ω в (62) замкнем контур интегрирования полуокружностью бесконечно большого радиуса в нижней полуплоскости и примем во внимание только вклад вычетов в полюсах $\omega = \pm c_R K$. Оставшийся интеграл по K является табличным (/12/, стр.183, № 2.12.8.4). В результате интегрирования получаем:

$$U_{zR}(0) = -\frac{F t a S_3 (S_3 - 2)^2 \sqrt{a^2 - S_3}\; H(r - c_R t)}{8\pi\rho (r^2 - c_R^2 t^2)^{3/2}\left[a^2(S_3^2 - 6S_3 + 6) + 2(2S_3 - 3)\right]} . \tag{63}$$

Сравнивая (63) с точной формулой (61) видим, что сумма вычетов в рэлеевских полюсах правильно описывает вертикальные смещения поверхности полупространства при возбуждении ее точечным импульсным источником во временном интервале $r/c_t < t < r/c_R$.

Автор выражает глубокую благодарность Б.Е.Немцову за плодотворные дискуссии и ряд ценных замечаний.

Литература

1. Lamb H. On the propagation of tremors overs the surface of an elastic solid.//Philos.Trans.Roy.Soc.London. - 1904. - V. A203. - P.1-42.

2. Аки К., Ричардс П. Количественная сейсмология./Пер.с англ. под ред. А.Л.Левшина. Т.I. - М.: Мир. - 1983. - 520 с.

3. Ewing W.M., Jardetsky W.S., Press F. Elastic waves in layered media.//New York, McGraw-Hill Book Co., Inc. - 1957. - 380 p.

4. Новацкий В. Теория упругости. - М.: Мир. - 1975. - 872 с.

5. Петрашень Г.И. Основы математической теории распространения упругих волн. В кн. : Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн. Вып.18. - Л.: Наука (ленинград . отделение). - 1978. - С.1-248.

6. Чичинин И.С. Вибрационное излучение сейсмических волн. -М.: Недра. - 1984. - 224 с.

7. Сагомонян А.Я. Волны напряжения в сплошных средах. - М.:Изд-во МГУ. - 1985. - 416 с.

8. Петрашень Г.И., Молотков Л.А., Крауклис П.В. Волны в слоисто-однородных изотропных упругих средах (метод контурных интегралов в нестационарных задачах динамики). - Л.: Наука(ленинград.отделение). - 1982. - 288 с.

9. Курин В.В., Немцов Б.Е., Эйдман В.Я. Предвестник и боковые волны при отражении импульсов от границы раздела двух сред //УФН. - 1985. - Т.147, Вып.I. - С.157-180.

I0. Немцов Б.Е., Эйдман В.Я. Переходное излучение в акустике. Точные решения//Акуст.ж. - I987. - Т.33, № 2. - С.362-363.

II. Немцов Б.Е., Разин А.В. Излучение звука источником массы, пересекающим границу раздела сред.//Препринт № 22I. - Горький: НИРФИ. - I986. - 37 с.

I2. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Специальные функции. - М.: Наука. - I983. - 752 с.

Дата поступления статьи
26 февраля I988 г.

Андрей Владимирович Разин

К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ ЛЭМБА
ДЛЯ ОДНОРОДНОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

Подписано к печати 19.04.88 г. МЦ 00779. Формат 60х84/16
Бумага писчая. Печать офсетная. Объем 2,03 усл. п. л.
Заказ 4687. Тираж 120. Бесплатно

Отпечатано на ротапринте в НИРФИ