Министерство высшего и среднего специального образования
Р С Ф С Р

Горьковский ордена Трудового Красного Знамени
научно-исследовательский радиофизический институт (НИРФИ)

Препринт № 255

ОБ АБСОЛЮТНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ

В.А. Брусин

В.А. Угриновский

Горький 1988

Б р у с и н В.А., У г р и н о в с к и й В.А.

ОБ АБСОЛЮТНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ // Препринт № 255. - Горький, НИРФИ. - 1988. - 25 с.

УДК 517.9 + 519.9

Результаты конечномерной теории абсолютной стохастической устойчивости обобщаются для класса эволюционных уравнений в функциональных пространствах.

В последнее время широко обсуждается применение метода функций Ляпунова к исследованию динамики распределенных стохастических систем. Такие уравнения возникают в статистической гидромеханике, популяционной биологии, теории автоматического регулирования и т.д. Цель данной работы - показать, что может быть развита теория абсолютной устойчивости, охватывающая широкий класс стохастических дифференциальных уравнений в функциональных пространствах и аналогичная подобной теории для обыкновенных уравнений Ито.

I. Управляемое стохастическое эволюционное уравнение

Наиболее общие результаты по теории эволюционных стохастических уравнений с неограниченными операторами - коэффициентами получены в работе /I/.

Пусть W; H - сепарабельные гильбертовы пространства, которые отождествляются со своими сопряженными. Пусть Q - ядерный симметричный неотрицательно определенный оператор $W \to W$, $w(t)$ - винеровский процесс со значениями в W и ковариационным оператором Q над полным вероятностным пространством $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathcal{P})$, $\{\mathfrak{F}_t, t \geq 0\}$ - поток σ-алгебр, полных относительно меры $\mathcal{P}$, порожденный процессом $w(t)$ /I/. По оператору Q в /I/ определено пространство линейных операторов $L_Q(W,H)$: оператор B принадлежит пространству $L_Q(W,H)$, если он определен на $Q^{1/2}W$, переводит это множество в H, причем $BQ^{1/2}$ - оператор Гильберта-Шмидта из W в H. $L_c(W,H)$ - сепарабельное гильбертово пространство со скалярным произведением $\langle B_1, B_2 \rangle_Q = tr\{B_1 Q^{1/2} (B_2 Q^{1/2})^*\}$ и нормой $|B|_Q = \| B Q^{1/2} \|$, tr - след оператора, $\| \cdot \|$ - норма в пространства операторов Гильберта-Шмидта.

Пусть U, V и V^* – сопряженное к V – сепарабельные гильбертовы пространства, $V \subset H \subset V^*$, вложение V в H плотно и непрерывно /2/. Ниже рассматриваются также гильбертовы пространства:

$L_2(S, Z)$ – пространство квадратично интегрируемых по мере $\mathcal{P}$ $\mathcal{F}_s$ – измеримых случайных функций со значениями в пространстве Z; скалярное произведение в нем $(\cdot, \cdot)_{S,Z} = E(\cdot, \cdot)_Z$, E-оператор математического ожидания, $(\cdot, \cdot)_Z$ – скалярное произведение в гильбертовом пространстве Z;

$L_2(\mathcal{T}_{S,T}, Z)$ ($\mathcal{T}_{S,T}$ – цилиндр $[S,T] \times \Omega$) – гильбертово пространство квадратично интегрируемых по мере $\mathcal{L} \times \mathcal{P}$, $\mathcal{L}$ – – мера Лебега на R^1, согласованных с потоком $\{\mathcal{F}_t, t \in [S,T]\}$ случайных процессов со значениями в Z; скалярное произведение в этом пространстве $(\cdot, \cdot)_{[S,T],Z} = \int_S^T E(\cdot, \cdot)_Z \, dt$. Цилиндр $[S,+\infty] \times \Omega$ обозначим $\mathcal{T}_S$, соответствующее L_2 – пространство обозначим $L_2(\mathcal{T}_S, Z)$. Предполагается, что элементы $L_2(\mathcal{T}_S, Z)$ доопределены нулем при $t < S$; в этом случае при $T \le +\infty$, $S_1 \le S_2$ справедливо вложение пространств $L_2(\mathcal{T}_{S_1,T}, Z) \supseteq L_2(\mathcal{T}_{S_2,T}, Z)$.

Значение функционала $y \in V^*$ на элементе $x \in V$ (обозначение $\langle x, y \rangle$) определяется обычным образом /2/, тогда произведение между элементами $L_2(\mathcal{T}_{S,T}, V)$ и $L_2(\mathcal{T}_{S,t}, V^*)$

$$[x,y] = \int_S^T E\langle x(t), y(t) \rangle \, dt .$$

Пусть на $V \times V$, $V \times U$ заданы билинейные непрерывные формы $\tilde{a}(x,y)$, $\tilde{b}(x,y)$, каждая из которых порождает линейный непрерывный оператор $A : V \to V^*$, $B : U \to V^*$ /2/ соответственно: $\tilde{a}(x,y) = \langle y, Ax \rangle$, $\tilde{b}(x,u) = \langle x, bu \rangle$.

Пусть определены линейные непрерывные операторы $C : V \to L_Q(W,H)$, $D : U \to L_Q(W,H)$. Если $u \in L_2(\mathcal{T}_s, U)$, $x \in L_2(\mathcal{T}_s, H)$, то определены стохастические интегралы $\int_s^t Du(\tau)dw(\tau)$, $\int_s^t Cx(\tau)\,dw(\tau)$ со значениями в пространстве H, которые являются сильно непрерывными по t квадратично интегрируемыми мартингалами относительно потока $\{ \mathcal{F}_t, \ t \geq s \}$.

Рассмотрим линейное управляемое стохастическое эволюционное уравнение

$$x(t) = h + \int_s^t (A x(\tau) + b u(\tau)) d\tau + \int_s^t (C x(\tau) + D u(\tau)) d\omega(\tau), \qquad h \in L_2(s, H). \tag{I.I}$$

Решением уравнения (I.I.) является функция $x(t, \omega)$, $(t, \omega) \in \mathcal{T}_{s,T}$, со значениями в H, сильно непрерывная в H по t, согласованная с потоком $\{ \mathcal{F}_t, \ t \in [s, T] \}$ и такая, что

I. $x \in V$, (t, ω) – почти всюду,

$$E \int_S^T (|x(t)|_V^2 + |x(t)|_H^2) dt < +\infty ;$$

2. существует множество $\Omega' \subset \Omega$ полной вероятности, на котором при всех $t \in [0, T]$ (I.I) выполняется как равенство элементов V^*.

Теорема существования и единственности решения уравнения (I.I) является следствием соответствующего общего результата /I/. Заметим, только, что по терминологии /I/ мы рассматриваем H-решение, т.е. H-непрерывную модификацию решения со значениями в V – V-решения.

<u>Теорема I.</u> Пусть $u \in L_2(\mathcal{T}_S, U)$ и при любом $x \in V$

$$2 \langle x, Ax \rangle + \alpha |x|_V^2 + |Cx|_Q^2 \leq \lambda |x|_H^2 , \tag{I.2}$$

при некоторых $\alpha > 0$, λ. Тогда существует единственное решение уравнения (I.I) с произвольным $h \in L_2(S, H)$ на любом отрезке $[S, T]$, причем

$$E \sup_{t \leq T} |x(t)|_H^2 + |x(\cdot)|^2_{[s,T],H} \leq$$

$$\leq c\left(|h|^2_{s,H} + |u(\cdot)|^2_{[s,T],U} \right), \tag{I.3}$$

где c зависит только от λ, T, α и β - константы, с которой норма $|\cdot|_V$ мажорирует норму $|\cdot|_H$.

Замечание. При $u = 0$ неравенство (I.3) является свойством равномерной корректности задачи Коши для уравнения (I.I)' /3/.

В дальнейшем будет рассматриваться ω - параметрическое семейство задач, $\omega \in \Omega'$,

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -A^* p + g(t), \quad g \in L_2(\mathcal{T}_{s,T}, V^*), \tag{I.4}$$

$$E|p(T) - q|^2_H = 0, \quad q \in L_2(T, H), \tag{I.5}$$

оператор $A^*: V \to V^*$ сопряжен с A в следующем смысле: $\tilde{a}(x,y) = \langle y, Ax \rangle = \langle x, A^* y \rangle$, $x, y \in V$ /2,4/. Условие (I.2) достаточно для существования и единственности принадлежащего $L_2(\mathcal{T}_{0,T}, V)$ решения задачи (I.4), (I.5) /4/.

2. Вариационная задача на множестве управляемости для стохастических эволюционных управляемых систем

В этом пункте рассматривается задача о минимуме квадратичного функционала на множестве управляемости уравнения (I.I), аналогичная той, что рассматривалась в /5/ для конечномерных систем. Ввиду этой аналогии доказательства некоторых утверждений мы будем опускать со ссылкой на /5/.

При каждых $s \geq 0$, $h \in L_2(s, H)$ введем множество допустимых уравнений $U(s, h)$, состоящее из элементов $u(\cdot)$ пространст -

ва $L_2(\mathcal{T}_s, U)$, которым отвечает решение $x_s(\cdot, h, u)$ уравнения (I.I), принадлежащее $L_2(\mathcal{T}_s, H)$.

Будем предполагать, что эволюционная управляемая система (I.I) L_2 - управляема (в среднем квадратическом), т.е. при любых $s \geq 0$ и $h \in L_2(s,H)$ множество $U(s,h)$ не пусто.

Рассмотрим отображение Φ_s, ставящее в соответствие паре (h, u), $h \in L_2(s,H)$, $u \in U(s,h)$ процесс $x_s(\cdot, h, u)$. Областью определения этого отображения является линейное нормированное пространство $D_s = \{(h,u): h \in L_2(s,H), u \in U(s,h)\}$; норму в нем можно определить $\|(h,u)\|_{D,s} = |h|_{s,H} + |u|_{[s,+\infty),U}$.

Лемма I. D_s - банахово пространство; $U(s,h)$ - выпуклое замкнутое множество; Φ_s - линейный непрерывный оператор $D_s \to L_2(\mathcal{T}_s, H)$.

Лемма 2. $U(s,0)$ - подпространство в $L_2(\mathcal{T}_s, U)$. Существует оператор $S \in \mathcal{L}(L_2(0,H), U(0,0)^{\perp})$ такой, что при любых $s \geq 0$, $h \in L_2(s,H)$ $U(s,h) = U(s,0) \dotplus \{Sh\}$.

Знак $\dotplus$ обозначает прямую сумму пространств, знак $\perp$ - ортогональное дополнение.

Пусть P - оператор проектирования $L_2(\mathcal{T}_0, U)$ на $U(0,0)$. Определим на $U(s,h)$, $s \geq 0$, $h \in L_2(s,H)$ функционал

$$J(s,h;u) = \int_s^\infty E F(x_s(\tau,h,u), u(\tau))\, d\tau, \tag{2.I}$$

где

$$F(x,u) = \mu(x,x,u,u),$$

(2.2)

$$\mu(x,y,u,v) = \langle x, Ry \rangle + (x,Kv)_H + (y,Ku)_H + (u,Gv)_U,$$

μ - форма, заданная на $V \times V \times U \times U$, $R \in L(V, V^*)$

$K \in L(U,H)$, $G \in L(U,U)$, причем $\langle x, Ry\rangle = \langle y, Rx\rangle$, $x,y \in V$ и $G = G^*$.

Лемма 3. Функционал (2.I) непрерывен на $U(s,h)$ и представим в виде

$$J(s,h;u) = (TPu, Pu)_{[s,+\infty)U} - 2(\Psi h, Pu)_{[s,+\infty)U} + J(s,h;Sh), \tag{2.3}$$

где $T \in L(U(0,0), U(0,0))$, $\Psi \in L(L_2(s,H), U(s,0))$.

Доказательство этих лемм проводится аналогично в /5/.

Теорема 2. Пусть при сделанных выше предположениях L_2 - управляемости и коэрцитивности (I.2) существует $\varepsilon > 0$ такое, что при любом $u \in U(0, 0)$

$$J(0,0;u) \geq \varepsilon |u|^2_{[0,+\infty),U}. \tag{2.4}$$

Тогда:

I. существует единственный элемент $u^s(h) \in U(s,h)$, $s \geq 0$, $h \in L_2(s,H)$, доставляющий минимум функционала (2.I) на множестве управляемости $U(s,h)$;

2. существует линейный непрерывный оператор $M \in L(H,V) \cap L(V^*,H)$ такой, что при любом $s \geq 0$

$$E(h, Mh)_H = \inf J(s,h;u) = J(s,h;u^s(h)). \tag{2.5}$$

Результаты лемм I, 3 делают утверждение пункта I теоремы 2 очевидным: оно непосредственно следует из общей теоремы /4/ о минимуме полуограниченного снизу непрерывного функционала на выпуклом замкнутом множестве. Доказательство второго утверждения проводится в нес -

колько этапов по той же схеме, что и в конечномерном стохастическом /5,6/ и детерминистском бесконечномерном случае /4, 7, 8/. Кратко остановимся на нем.

Прежде всего заметим, что как и в конечномерном случае /5/ существуют операторы $X_s \in L(L_2(s,H), L_2(\mathcal{T}_s, V))$, $U_s \in L(L_2(s,H), L_2(\mathcal{T}_s, U))$, $M_s \in L(L_2(s,H), L_2(s,H))$ такие, что

$$u^s(h) = U_s h, \quad x^s(h) \equiv x_s(\cdot, h, u^s(h)) = X_s h, \tag{2.6}$$

$$M_s = X_s^* R X_s + X_s^* K U_s + U_s^* K^* X_s + U_s^* G U_s. \tag{2.7}$$

Здесь $X_s^* \in L(L_2(\mathcal{T}_s, V^*), L_2(s,H))$, $U_s^* \in L(L_2(\mathcal{T}_s, U), L_2(s,H))$. Оператор M_s при каждом $s \geq 0$ является самосопряженным оператором в пространстве $L_2(s,H)$ (это следует из (2.7)) и $J(s,h;u^s(h)) = (M_s h, h)_{s,H}$.

Как и в конечномерном варианте, под носителем $\mathcal{F}_s$ - измеримой случайной величины $z(\omega)$ со значениями в гильбертовом пространстве z будем понимать $\mathcal{F}_s$ - измеримое множество $\Delta \subseteq \Omega$ такое, что при почти всех $\omega \notin \Delta$ $z(\omega) = 0$ и почти всюду на Δ $z(\omega) \neq 0$. Все такие множества отождествляются, обозначение носителя supp. Положим $U(s,h,\Delta) = \{u : u = U(s,h),\ \mathrm{supp}\, u \subseteq \Delta,\ \Delta \in \mathcal{F}_s\}$.

<u>Лемма 4.</u> При любом $s \geq 0$, $h \in L_2(s,H)$.

1. Имеет место включение $\mathrm{supp}\, Sh \subseteq \mathrm{supp}\, h$;

2. линейное многообразие $U(s,h)$ имеет следующую структуру:

$$U(s,h) = U(s,h,\mathrm{supp}) \dotplus U(s,0,\Omega \setminus \mathrm{supp}\, h);$$

3. оператор M_s не расширяет носитель: $\mathrm{supp}\, M_s h \subseteq \mathrm{supp}\, h$.

Эта лемма, как и в /5/, используется для изучения эргодических свойств "оптимальной пары" $\{x^s(\cdot,h), u^s(\cdot,u)\}$ и операторного семейства $\{M_s,\ s\geq 0\}$. В /5/ для этой цели использовалась также полугруппа преобразований алгебры случайных величин, связанная со скалярным винеровским процессом /9/. Подобные преобразования порождаются и винеровским процессом со значениями в гильбертовом пространстве.

Лемма 5.

I. В пространстве случайных величин $\Omega\to W$ действует полугруппа преобразований $\{\Gamma_W(s),\ s\geq 0\}$, порожденная сдвигом процесса $w(t)$:

$$\Gamma_W(s)\big(w(t+\theta)-w(t)\big)=w(t+\theta+s)-w(t+s)\quad(\omega-\text{п.в.})\tag{2.8}$$

при любых $t, s, \theta\geq 0$.

2. Преобразование $\Gamma_W(s)$ однозначно с точностью до случайных величин, ω - п.в. равных 0, линейно и сохраняет сходимость п.в.; $\mathcal{F}_t$ - - измеримые случайные величины отображаются им в $\mathcal{F}_{t+s}$ - измеримые. Единственными инвариантными величинами этого преобразования являются (ω - п.в.) - константы из W. Оператор $\Gamma_W(s)$ коммутирует с оператором условного математического ожидания по правилу

$$E\{\Gamma_W(s)(\cdot)\mid\mathcal{F}_{t+s}\}=\Gamma_W(s)\,E\{(\cdot)\mid\mathcal{F}_t\}.\tag{2.9}$$

3. Полугруппы, обладающие такими же свойствами действуют в пространствах случайных величин $\Omega\to H$, $\Omega\to U$. С отображением $\Gamma_W(s)$ они связаны следующим образом:

$$\Gamma_H(s)=I_H\,\Gamma_W(s)\,I_H^{-1},\qquad \Gamma_U(s)=I_U\,\Gamma_W(s)\,I_U^{-1},$$

I_H, I_U - изоморфизмы $W\leftrightarrow H$, $W\leftrightarrow U$.

Замечание. В случае дискретных стационарных последовательностей аналог формулы (2.9) имеется в /I0/.

Учитывая свойство операторов Γ_W, Γ_U, Γ_H, а также единственность оптимального элемента и определение решения уравнения (I.I) можно показать, что оптимальные элементы функционалов $J(0, h; \cdot)$ и $J(s, \Gamma_H(s) h; \cdot)$ и соответствующие траектории системы (I.I) связаны соотношениями

$$u^s(t+s, \Gamma_H(s) h, \omega) = \left[\Gamma_U(s) u^0(t,h)\right](\omega) \quad ,$$

$$x^s(t+s, \Gamma_H(s) h, \omega) = \left[\Gamma_H(s)\, x^0(t,h)\right](\omega) \quad ,$$

Эти равенства справедливы ω - п.в. при $t \geq 0$, $s \geq 0$. Затем теми же рассуждениями, что и в /5/, можно показать, что оператор M_S не зависит от S и есть результат отображения Ω в $L(H, H)$. Осталось показать, что (ω - п.в.) $M_S = M$, где $M \in L(H, V) \cap \cap L(V^*, H)$. Это проделывается стандартным образом/4, 6–8/.

Рассмотрим "сопряженную задачу" вида (I.4), (I.5)

$$\frac{\partial p(t)}{\partial t} = -A^* p(t) + R x^0(t, h) + K u^0(t, h), \tag{2.I0}$$

$$p(T) = -M_0\, x^0(T, h), \qquad (\omega \text{ - п.в.}) \tag{2.II}$$

а также задачу минимизации функционала

$$J_T(h; u) = \int_0^T E F\big(x_0(t, h, u), u(t)\big) dt + E\big(M_0 x_0(T, h, u), x_0(T, h, u)\big) \tag{2.I2}$$

на пространстве $L_2(\mathcal{J}_{0,T}, U)$. Необходимое условие минимума функционала (2.I2) состоит в равенстве нулю его градиента, вычисленного на оптималином элементе. А оптимальным элементом, как следует из принципа Беллмана, является $u^0(t,h)$, $0 \le t \le T$.

Отсюда имеем

$$E\int_0^T \langle -A^* p(\tau) + Rx^0(\tau,h) + Ku^0(\tau,h), x_0(\tau,0,u)\rangle d\tau +$$

$$+ E\int_0^T \langle p(\tau), Ax_0(\tau,0,u) + bu\rangle d\tau +$$

$$+ E\int_0^T \left(-b^* p(\tau) + Gu^0(\tau,h) + K^* x^0(\tau,h), u\right)_U d\tau -$$

$$- E\left(p(T), x_0(T,0,u)\right)_H = 0.$$

В соответствии с формулой Ито /I, II/ это равенство влечет при любом $u \in L_2(\mathcal{T}_{0,T}, U)$, что

$$E\int_0^T \left(-b^* p(\tau) + Gu^0(\tau,h) + K^* x^0(\tau,h), u\right)_U d\tau = 0 ,$$

так как $x_0(0,0,u) = 0$. Поэтому , если $(x^0(\cdot), u^0(\cdot)) \in$ $\in L_2(\mathcal{T}_{0,T}, H) \times L_2(\mathcal{T}_{0,T}, U)$ - оптимальная пара функционала (2.I2), а $p(\cdot) \in L_2(\mathcal{T}_{0,T}, V)$ - решение задачи (2.I0), (2.II), то

$$b^* p(t) = Gu^0(t,h) + K^* x^0(t,h) \qquad (2.I3)$$

при любом $t \in [0,T]$.

Вновь применяя формулу Ито к $\left(p(T), x^0(T,g)\right)_H$ и используя (2.I3), получаем, что

$$-E(p(0),g)_H = E\int_0^\infty \mu(x^0(\tau,h),x^0(\tau,g),u^0(\tau,h),u^0(\tau,g))\,d\tau = E(M_0h,g)_H,$$

что влечет включение $M_0 \in L(H,V)$ (ω - п.в.). Тогда, сопряженный к M_0 оператор (относительно скалярного произведения в H) может быть продолжен до оператора из $L(V^*,H)$. В силу симметрии оператора M_0 относительно $(\cdot,\cdot)_H$ это означает, что $M_0 \in L(H,V) \cap L(V^*,H)$. На этом доказательство теоремы 2 завершено.

Может возникнуть вопрос о том как проверить предположение L_2 - управляемости. В детерминистском случае L_2 - управляемость эквивалентна экспоненциальной стабилизируемости /8/. В нашем случае достаточным условием L_2 - управляемости также является предположение об экспоненциальной стабилизируемости, которое означает, что существует линейный непрерывный оператор $\mu: H \to U$ такой, что процесс $\tilde{x}(t)$, определяемый линейным эволюционным уравнением

$$x = h + \int_0^t (A + b\mu)x\,d\tau + \int_0^t (C + D\mu)x\,dw(\tau), \tag{2.14}$$

экспоненциально "убывает" при любом $h \in H$:

$$E|\tilde{x}(t)|_H^2 \le \gamma e^{-\alpha t}|h|_H^2, \quad \alpha > 0, \quad \gamma > 0. \tag{2.15}$$

Однако это предположение может оказаться более предпочтительным по следующим причинам.

Во-первых, известно, при каких условиях оно выполняется: для этого достаточно, чтобы выполнялось следующее условие коэрцитивности: при любом $x \in V$

$$\alpha_1|x|_V^2+2\langle x,(A+b\mu)x\rangle+|(C+D\mu)x|_Q^2\le\gamma_1+\lambda_1|x|_H^2. \quad (2.16)$$

В частности, (2.16) выполняется, если /II/

а) $\lambda_1<0,\quad \gamma_1\le 0$;

б) $\alpha_1\beta>\lambda_1>0,\quad \gamma_1\le 0$;

β - константа из неравенства $\beta|x_H|\le|x|_V$, $x\in V$ /II/.

Во-вторых, можно уточнить структуру пространств $U(S,0)$ и усилить неравенство (I.3).

Введем, кроме (I.I), управляемую систему

$$x=h+\int_S^t((A+b\mu)x+bv(\tau))d\tau+\int_S^t((C+D\mu)x+Dv(\tau))dw(\tau). \quad (2.17)$$

Обозначим процесс $x_S(\cdot,0,u)=x_S(u)$, а решение уравнения (2.17), отвечающее $h=0$ и управлению $v\in L_2(\mathcal{T}_S,U)$, через $x_S(v)$.

Теорема 3. Пара отображений

$$v=u-\mu x_S(u), \quad (2.18)$$

$$u=v+\mu x_S(v) \quad (2.19)$$

осуществляет взаимнооднозначное соответствие между $U(S,0)$ и $L_2(\mathcal{T}_S,U)$. При любых $h\in L_2(S,H)$, $u\in U(S,h)$

$$|x_S(\cdot,h,u)|^2_{[S,+\infty],H}\le C_1\left(|h|^2_{S,H}+|u(\cdot)|^2_{[S,+\infty],H}\right). \quad (2.20)$$

Первая часть утверждения теоремы 3 следует из линейности уравнений (I.I) и (2.17), единственности их решений и определения пространства $U(S,0)$. Для доказательства неравенства (2.20) введем производящий оператор $\mathcal{L}_u$ на классе дважды непрерывно дифференцируемых функций $\Lambda(x)$ – таких, что $\Lambda'_x(\cdot)\in L(V,V)$, $\Lambda''_{xx}(\cdot)\in L(V,L(V,V))$ при $x\in V$ и отображение $V\to R^1$ $x\to tr\{\Gamma\Lambda''_x(\cdot)\}$ непрерывно при любом $\Gamma\in L(H,H)$:

$$[\mathcal{L}_u\Lambda](x)=\langle\Lambda'(x),\ Ax+bu\rangle+\frac{1}{2}(Cx+Du,\Lambda''(x)(Cx+Du)).$$

Можно показать, что при любом $h\in V$

$$\mathcal{L}_u\Big|_{u=\mu h}\Lambda(h)\le-\frac{\varkappa}{\beta}\,|h|_V^2\,. \tag{2.21}$$

Здесь $\varkappa>0$ – произвольное число, $\Lambda(h)=\varkappa\,(\tilde{x}(\cdot),\tilde{x}(\cdot))_{[0,+\infty],H}$, $\beta|x|_H<|x|_V$. Используя оценку (2.21), а также первую часть утверждения теоремы, можно показать, что $\mathcal{L}_u\Lambda(h)\le$ $\le-\frac{\varkappa}{\beta}|h|_V^2+\varkappa_1|h|_V^2+\varkappa_2|u|_U^2$, $\forall h\in V$, где $\varkappa_1,\varkappa_2$ – – положительные константы, зависящие только от норм операторов b, D, μ, C и Λ''. Отсюда, после применения формулы Ито и выбора $\varkappa$, при котором $-\frac{\varkappa}{\beta}+\varkappa_1<0$, с учетом непрерывного вложения $V\subseteq H$, получаем неравенство (2.20).

3. Операторные стохастические уравнения Лурье

В этом разделе формулируются достаточные условия разрешимости операторных уравнений, которые аналогичны операторным уравнениям Лурье из детерминистской теории абсолютной устойчивости /7, 8/, стохастическим матричным уравнениям Лурье из конечномерной теории /5/, а также матричным уравнениям Риккати из теории оптимального управления /6/. Как и в разделе 2, техника доказательств мало отличается от той, что использовалась в конечномерных задачах.

Обозначим $\Lambda(x)=(Mx,x)_H$, $x\in H$, $M\in L(H,H)$

– самосопряженный оператор.

Теорема 4. Пусть при сделанных в п. I, 2 предположениях оператор $b \in L(U, H)$, оператор A имеет в H плотную область определения $D(A)$, $A: D(A) \to H$. Пусть при любом $u \in U(0,0)$

$$E \int_0^\infty F(x_0(\tau,0,u),\ u(\tau))\, d\tau \geq 0. \tag{3.I}$$

Тогда существует такая тройка операторов $(M = M^*, \Sigma^*, N) \in L(H, H) \times L(H, H \times U) \times L(U, H \times U)$, что при любых $x \in D(A)$, $u \in U$ имеет место тождество

$$\mathcal{L}_u \Lambda(x) + F(x,u) = \left| \Sigma^* x + Nu \right|^2_{H \times U}. \tag{3.2}$$

Тождество (3.2) эквивалентно при $x \in D(A)$, $u \in U$ системе операторных уравнений

$$\begin{aligned} &MA + A^* M + C^* MC + R = \Sigma \Sigma^*, \\ &Mb + C^* MD + K = \Sigma N, \\ &D^* MD + G = N^* N. \end{aligned} \tag{3.2'}$$

Доказательство этой теоремы можно провести, повторив рассуждения работ /8, I2/, основанные на регуляризации функционала (2.I) и применении принципа Беллмана.

4. Нелинейное стохастическое уравнение эволюционного типа, различные типы устойчивости

Ниже рассматривается эволюционное стохастическое уравнение

$$x(t) = h + \int_0^t (Ax(\tau) + b\varphi(x))\,d\tau + \int_0^t (Cx + D\varphi(x))\,dw(\tau), \quad (4.1)$$

в котором коэффициенты A, b, C и D те же, что и в пункте 1, а φ - нелинейное отображение $H \to U$, которое обладает следующими свойствами:

1. Оператор φ ограничен и Липшиц - непрерывен:

$$|\varphi(x)|_U \leq K_1 |x|_H, \quad |\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| \leq K_2 |x_1 - x_2|_H \quad (4.2)$$

при любых $x, x_{1,2} \in H$.

2. Существует линейный непрерывный оператор $\theta : U \to V$ такой, что

а) $\theta\varphi : H \to V$ - потенциальный оператор;

б) при любом $y \in V^*$ функционал $\langle [\theta\varphi](\cdot), y \rangle$ -непрерывный функционал на V;

в) производная Фреше оператора $\theta\varphi$ существует и является локально ограниченным отображением $H \to L(H, V)$;

г) для любого ядерного оператора $\Gamma \in L(H, H)$ отображение $x \to tr\{\Gamma\theta\varphi'(x)\}$ из H в R^1 непрерывно.

При выполнении условий (1.2), (4.2) решение уравнения (4.1) существует при любом $h \in H$ и является марковским случайным процессом /1/.

Как принято в теории абсолютной устойчивости, рассматривается некоторое множество отображений φ, которое имеет следующую структуру.

Для заданных операторов $(r, q, g) \in L(V, V^*) \times L(U,H) \times L(U, U)$ определим на $V \times U \times L(H, H)$ функционал

(4.3)

$$F_1(x,u,\varphi) = \langle x, rx\rangle + 2(x, qu)_H + (u, gu)_U - (Cx+Du, \varphi(Cx+Du))_Q.$$

Определение. Оператор φ принадлежит классу $\Phi(r, q, g; \theta, \mu)$, определяемому, кроме операторов (r, q, g), еще и операторами θ (см.выше), $\mu \in L(H, U)$ из пункта 2, если при любом $x \in V$

$$F_1(x, \varphi(x), \theta\varphi'(x)) \leq 0, \tag{4.4}$$

$$F_1(x, \mu x, \theta\mu) \leq 0, \tag{4.5}$$

$$\int_0^1 (\theta\varphi(\xi x), x)_H \, d\xi \leq (\theta\mu x, x)_H. \tag{4.6}$$

Обычное в теории абсолютной устойчивости требование " минимальной устойчивости" состоит в выполнении предположения об экспоненциальной стабилизируемости из. разд.2.

Условия, которые наложены на φ, позволяют применить к функционалу

$$\Lambda(x) = (x, Mx)_H + 2\int_0^1 (\theta\varphi(\xi x), x)_H \, d\xi \tag{4.7}$$

формулу Ито, M – оператор из пунктов 2, 3.

Пусть $\xi \subseteq H$, $x_\xi(t)$ – процесс $x_s(t, h, \varphi)$, $h \in L_2(S,H)$;

$s \geq 0$, остановленный в момент $\tau(\omega)$ первого выхода из области $\mathcal{E}$. В /II/ показано, что $\{\Lambda(x_{\mathcal{E}}(t)), \ \mathcal{F}_t, \ t \geq s\}$ - супермартингал и справедлива формула

$$E\left\{\Lambda(x_{\mathcal{E}}(t)) \mid \mathcal{F}_s\right\} - \Lambda(h) = \int_s^{\tau_{\mathcal{E}}(t)} E\left\{\mathcal{L}_u \Big|_{u=\varphi(x)} \Lambda(x_{\mathcal{E}}(\xi)) \mid \mathcal{F}_s\right\} d\xi . \tag{4.8}$$

Здесь $\tau_{\mathcal{E}}(t) = \min(\tau(\omega), t)$.

Устойчивость тривиального решения уравнения (4.I) исследуем с помощью функционала Ляпунова (4.7) и формулы (4.8).

Положим $R = r$, $K = q + A^* \theta$, $G = g + \theta^* b + b^* \theta$.

<u>Теорема 5.</u> Пусть при некоторых μ и θ справедливы предположения о нелинейности φ и коэффициентах уравнения (4.I), а также выполняются условия теоремы 2. Тогда найдуться такие положительные числа k_1, k_2 и k_3 и оператор $M_{\varepsilon} \in L(H, V) \cap (V^*, H)$, что при любом $x \in V$ и любом $\varphi \in \Phi(r, q, g; \theta, \mu)$

$$-k_1 |x|_H^2 \leq \Lambda(x) \leq -k_2 |x|_H^2 , \tag{4.9}$$

$$\mathcal{L}_u \Lambda \Big|_{u=\varphi(x)} (x) \geq k_3 |x|_H^2 , \tag{4.10}$$

$\Lambda(x)$ - функционал (4.7), в котором $M = M_{\varepsilon}$.

<u>Теорема 6.</u> При сделанных в теореме 5 предположениях при любых $h \in L_2(s, H)$, $\varphi \in \Phi(r, q, g; \theta, \mu)$ тривиальное решение системы (4.I)

а) асимптотически устойчиво по вероятности в целом /II, I3/:

$$\lim_{h \to 0} \mathcal{P}\left\{\sup_{t \geq s} |x_s(t, h, \varphi)|_H > \delta\right\} = 0, \quad \forall s \geq 0, \quad \delta > 0,$$

$$\mathcal{P}\{\lim_{t\to\infty} x_s(t,h,\varphi)=0\}=1, \quad \forall h \quad ;$$

б) экспоненциально устойчиво в среднем квадратическом:

$$E\left\{|x_s(t,h,\varphi)|_H^2 \;|\; \mathcal{F}_s\right\} \le \gamma e^{-\alpha(t-s)}|h|_H^2 . \qquad (4.II)$$

5. Частотные условия устойчивости класса нелинейных систем параболического типа

Рассмотрим уравнение параболического типа

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial s}\left(a_1(s)\frac{\partial x}{\partial s}\right) - a_0(s)x \qquad (0<s<1) \qquad (5.I)$$

с начальными и граничными условиями

$$\left.\frac{\partial x}{\partial s}\right|_{s=0} \doteq \varphi_0(\sigma)(1+q\dot{w}_t), \; q>0, \; \left.\frac{\partial x}{\partial s}\right|_{s=1} = 0 , \qquad (5.2)$$

$$x(0,s) = x_0(s) \qquad (5.3)$$

в классе функций , удовлетворяющих неравенствам

$$\int_0^1 |x(t,s)|^2 ds < +\infty, \qquad \int_0^1 |x_s'(t,s)|^2 ds < +\infty$$

и непрерывных по t . Функции φ_0 и σ определены условиями

$$\sigma(t) = \int_0^{1} g(s)\, x(t,s)\, ds , \qquad (5.4)$$

$$0 \le \varphi_0(\sigma)\sigma \le h\sigma^2, \qquad \varphi_0'(\sigma) \le d , \qquad (5.5)$$

а функции g , a_0 , a_1 отвечают требованиям: $a_0 \in C^0(0, I)$, $a_1 \in C^I(0, I)$, $a_i(s) \ge a > 0$; $i = 0,I$, $g(0) = g(I) =$

$= 0, \quad g \in C^0(0, 1).$

$\dot{w}_t$ – гауссовский белый шум с параметрами распределения (0,1).

Положим $H = L_2(0, 1)$, $V = H^1(0, 1)$ – пространство С.Л.Соболева действительных функций на $[0, 1]$ с нормой $\|x\|_1 = \left[\int_0^1 (|x(s)|^2 + \left|\frac{\partial x}{\partial s}\right|^2 ds\right]^{1/2} < +\infty$, $\frac{\partial}{\partial s}$ – обобщенная производная в смысле Соболева. Тогда $V^* = H^{-1}(0, 1)$ (подробнее см./2/). Положим также $W = R^1$, $U = R^1$. Определим коэффициенты эволюционного уравнения, соответствующего смешанной задаче(5.1)-(5.3):

$$A = \frac{\partial}{\partial s}\left(a_1(s)\frac{\partial}{\partial s}\right) - [a_0(s)], \quad b = [-a_1(0)\,\delta(s)].$$

Здесь и далее $[f(s)]$ – оператор умножения на функцию $f(s)$. Фактически операторы A и b порождены билинейными формами

$$\langle Ax, y\rangle = -\int_0^1 \left(a_0(s)x(s)y(s) + a_1(s)\frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial y}{\partial s}\right) ds,$$

$$\langle bv, y\rangle = -a_1(0)\,v\,y(0), \quad x, y \in H^1(0,1), \quad v \in R^1.$$

Пусть $\alpha(s)$ – достаточно гладкая функция, носитель которой лежит внутри достаточно малой окрестности точки $s = 0$. Предположим, что это семейство функций в качестве слабой предельной точки имеет $\delta(s)$.

Положим

$$D_\alpha v = [a_1(0)\,\alpha(s)\,v], \quad C = 0.$$

Мы фактически подменяем исходную задачу (5.1)-(5.3)"сглаженной" :

$$\frac{\partial x_\alpha}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial s}\left(a_1(s)\frac{\partial x_\alpha}{\partial s}\right) - a_0(s)x_\alpha - q\,a_1(0)\alpha(s)\,\varphi_0(\sigma_\alpha)\,\dot{w}_t,$$

$$\left.\frac{\partial x_\alpha}{\partial s}\right|_{s=0} = \varphi_0(\sigma_\alpha), \qquad \left.\frac{\partial x_\alpha}{\partial s}\right|_{s=1} = 0, \tag{5.6}$$

$$x_\alpha(0,s) = x_0(s),$$

$$\sigma_\alpha(t) = \int_0^1 g(s)\, x_\alpha(t,s)\, ds,$$

для которой уже возможно строгое математическое описание в виде эволюционного стохастического уравнения

$$x_\alpha(t) = \dot{x}_0 + \int_0^t \left(A x_\alpha(\tau) + b\varphi_0(\sigma_\alpha)\right) d\tau + \int_0^t D_\alpha \varphi_0(\sigma_\alpha)\, dw_q(\tau), \tag{5.7}$$

где $w_q(t) = q w(t)$ – винеровский процесс с ковариационным "оператором" $Q = q^2$.

Применим к уравнению (5.7) результаты пункта 4. Предположения теоремы I и 2 выполняются ввиду сильной эллиптичности оператора A (последней – при $\mu = 0$).

Определим класс нелинейных операторов Φ.

В него войдут функционалы $L_2(0, I) \to R^1$ вида

$$\varphi(x) = \varphi_c\left(\int_0^1 g(s)\, x(s)\, ds\right).$$

Оператор θ определим как $[v\, g_s(s)]$, где v – число произвольного знака, $g_\alpha(s) = g(s)$ при $\alpha(s) = 0$ и $g_\alpha(s) = 0$ при $\alpha(s) \neq 0$. В этом случае $\operatorname{tr}\{q^2 \theta \varphi'(D_\alpha \varphi)(D_\alpha \varphi)^*\} = 0$ и класс допустимых нелинейных функционалов φ можно записать неравенством

$$\frac{1}{h}\varphi^2 - \sigma_\alpha \varphi - \mathrm{tr}\left\{q^2 \theta \varphi'(D_\alpha \varphi)(D_\alpha \varphi)^*\right\} \le 0.$$

Отсюда параметры, определяющие класс Φ , таковы: $r = 0$, $q = -\frac{I}{2}\left[g(s)\right]$, $g = \frac{I}{h}$; $\theta = \left[v g_\alpha(s)\right]$, $\mu = 0$.
Соответственно, коэффициенты формы F из теоремы 3 равны: $R = 0$, $K = -\frac{I}{2}\left[g(s)\right]$, $G = \frac{I}{h}$. Если $\mu = 0$, то при $v \le 0$ выполняется неравенство (4.6), условие минимальной устойчивости выполняется ввиду сильной эллиптичности оператора A .

Рассмотрим краевую задачу

$$(p + a_0(s))\, z_2(p,s) - \frac{d}{ds}\left(a_1(s)\frac{d}{ds} z_2(p,s)\right) = 0,$$

$$\left.\frac{dz_2}{ds}\right|_{s=0} = 1, \qquad \left.\frac{dz_2}{ds}\right|_{s=1} = 0$$

и положим $\chi(p) = \int\limits_0^1 z_2(p,s)\, g(s)\, ds$,

$$\gamma = \left\{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left|\int\limits_0^1 z_2(i\omega,s)(1-2v\, i\omega)\, g(s)\, ds\right|^2 d\omega\right\}^{1/2}.$$

Используя те же свойства стохастических интегралов, что и в конечно-мерном случае, и аналогичные оценки, а также достаточную близость $\alpha(s)$ к $\delta(s)$ можно доказать следующее утверждение.

<u>Теорема 7.</u> Пусть при любом $\omega \in R^1$ имеет место неравенство

$$\frac{1}{h} - \gamma q - \mathrm{Re}\,\chi(i\omega)(1-2v\, i\omega) \ge \varepsilon, \qquad \varepsilon > 0. \tag{5.8}$$

Тогда при всех $\alpha(s)$, достаточно близких к $\delta(s)$ в слабом смысле, справедливы выводы теоремы 6. Поскольку неравенство (5.8) от "сглаживающей функции" $\alpha(\cdot)$ не зависит, то эти же выводы справедливы и для слабой предельной точки семейства процессов $\{x_\alpha(t,s)\}$, которая формально является решением задачи (5.I) - (5.5).

Литература

1. Крылов Н.В., Розовский Б.Л. Об эволюционных стохастических уравнениях. Современные проблемы математики. Т.14 (Итоги науки и техники. - М.: ВИНИТИ. - 1979. - С.72-147.

2. Лионс Ж.Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. - М.: Мир. - 1971. - 371 с.

3. Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. - М.: Наука. - 1967. - 464 с.

4. Лионс Ж.Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. - М.: Мир. - 1972. - 414 с.

5. Брусин В.А., Угриновский В.А. Исследование стохастической устойчивости некоторого класса нелинейных дифференциальных уравнений типа Ито.//Сибирский математический журнал.-1987. - Т.28, № 3. - С.35-50.

6. Bismut J.M. Linear Quadratic optimal stochastic control with random coefficients.//SIAM J.Control and Optimization. - 1976. - V.14, N 3. - P.419 - 444.

7. Брусин В.А., Уравнения Лурье в гильбертовом пространстве и их разрешимость.//Прикладная математика и механика. - 1976. - Т.40, Вып.5. - С.947-956.

8. Лихтарников А.Л., Якубович В.А. Частотная теорема для уравнений эволюционного типа.//Сибирский математический журнал.- - 1976. - Т.17, № 5. - С.1069-1085.

9. Дуб Дж.Л. Вероятностные процессы. - М.: ИЛ. - 1956. - 605 с.

10. Гихман И.И., Скороход А.В. Теория случайных процессов. Т.1.- - М.: Наука,- 1971. - 664 с.

II. Chow P.L. Stability of Nonlinear Stochastic Evolution Equations.//J.of Math.Analysis and Appl. - 1982, - V. 89. - P.400 - 419.

I2. Угриновский В.А. Стохастический аналог частотной теоремы.// Изв. ВУЗов. Математика. - I987. - № IO. - С.37-45.

I3. Хасьминский Р.З. Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. - М.: Наука. - I969. - 368 с.

Владимир Александрович БРУСИН

Валерий Аронович УГРИНОВСКИЙ

ОБ АБСОЛЮТНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ
НЕЛИНЕЙНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ

Подписано в печать 10.05.88 г. МЦ 00793. Формат 60 x 84/ 16
Бумага писчая. Печать офсетная. Объем 1,52 усл.п.л. Тираж 120
Заказ 4722. Бесплатно

Отпечатано на ротапринте в НИРФИ