

Министерство высшего и среднего специального образования
Р С Ф С Р

Горьковский ордена Трудового Красного Знамени
научно-исследовательский радиопизический институт (НИРФИ)

П р е п р и н т № 260

ПРИБЛИЖЕННЫЕ АНАЛИТИЧЕСКИЕ ЗАВИСИМОСТИ
ДЛЯ ПАРАМЕТРОВ УДАРНОЙ ВОЛНЫ,
ВОЗБУЖДАЕМОЙ ДВИЖУЩИМСЯ ПОРШНЕМ

Д. В. Петухов

Горький 1988

Петухов Д. В.

ПРИБЛИЖЕННЫЕ АНАЛИТИЧЕСКИЕ ЗАВИСИМОСТИ ДЛЯ ПАРАМЕТРОВ
УДАРНОЙ ВОЛНЫ, ВОЗБУЖДАЕМОЙ ДВИЖУЩИМСЯ ПОРШНЕМ. //Препринт № 260.
- Горький, НИРФИ. - 1988. - 15 с.

УДК 539.6.011.72.

Полученные приближенные выражения для давления на границе поршня и ударном фронте, импульса давления и динамического импульса, длительности ударной волны, которые хорошо согласуются с численными расчетами соответствующих величин.

Изучение волн, возбуждаемых поршнем, движущимся с постоянной скоростью в газообразной среде, представляет интерес, поскольку уже такая простейшая модель может использоваться при описании самых начальных моментов процесса генерации ударных волн при электрических разрядах в жидкости /1-2/, при воздействии лазерного излучения на мишени, помещенные в газообразную среду /3-4/ и при фокусировке этого излучения в жидкость /5-6/. Так как рассмотрение данной задачи сводится к численному интегрированию системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений, то естественно, что проведен достаточно подробный анализ конкретных ситуаций /7-12/, рассчитаны профили давления, плотности и скорости. Однако без должного внимания остались такие параметры ударной волны, как ее длительность T_d и импульс давления I_d , которые наряду с давлением на ударном фронте p_1 и давлением на границе поршня p_2 характеризуют эффективность воздействия ударной волны на преграды.

Цель данной работы - получить приближенные аналитические зависимости для p_1 , p_2 , T_d , I_d от скорости движения поршня и сравнить их с численными расчетами соответствующих точных выражений.

Рассмотрим одномерные движения поршня, т.е. плоские $\gamma = 1$, цилиндрические $\gamma = 2$ и сферические $\gamma = 3$, в среде с адиабатическим уравнением состояния:

$$p = \frac{p_0 c_0^2}{\gamma} \left\{ \left(\frac{p}{p_0} \right)^\gamma - 1 \right\} + p_0, \quad (1)$$

где p_0 , ρ_0 , c_0 - равновесные значения давления, плотности и скорости звука, γ - показатель адиабаты; p , ρ - давление и плотность в возмущенной среде. В дальнейшем удобно рассматривать безраз-

мерные величины $\rho_1 = (\rho - \rho_0) \gamma / \rho_0 c_0^2$, $T_1 = \frac{r}{c_0 t_1} - \frac{r}{c_0 t_2}$,

$J_1 = \frac{\gamma}{\rho_0 c_0 r} I_1$, где $I_1 = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \rho' d\left(\frac{1}{\tau}\right)$, $\tau = \frac{c_0}{t}$, r - расстояние, t - время, t_1 - время прихода фронта волны в точку с радиусом r , t_2 - время прихода границы поршня в ту же точку; $\tau_1 = r/c_0 t_1$, $\tau_2 = M = V/c_0$, M - отношение скорости движения поршня V к скорости звука c_0 . Используя автомодельные решения /7-10/, для ρ_2 , M , T_1 и J_1 получим следующие выражения:

$$\rho_2' = (\eta_2 e^{2z_2})^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} - 1, \quad M = e^{z_2}, \quad T_1 = e^{z_1} - e^{z_2},$$

$$J_1 = \int_{\xi_1}^1 \left[(\eta e^{2z})^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} - 1 \right] \frac{e^{-z}}{\xi} \frac{\eta - (1-\xi)^2}{\partial \eta - (1-\xi)^2} d\xi, \quad (2)$$

где функции $\eta(\xi)$, $z(\xi)$ находятся из решения системы двух дифференциальных уравнений:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{2\eta}{\xi} \frac{\eta - (\xi-1)(1-\xi)}{\partial \eta (1-\xi)^2}, \quad \frac{dz}{d\xi} = -\frac{1}{\xi} \frac{\eta - (1-\xi)^2}{\partial \eta - (1-\xi)^2}. \quad (3)$$

Граничные условия для системы (3) определяются на ударном фронте $z = z_1$, $\eta = \eta_1$, $\xi = \xi_1$:

$$\xi_1 = \frac{2(y_1 - 1)}{\gamma - 1 + (\gamma + 1)y_1}, \quad \eta_1 = \frac{2\gamma y_1 [\gamma + 1 + (\gamma - 1)y_1]}{[\gamma - 1 + (\gamma + 1)y_1]^2},$$

$$z_1 = \frac{1}{2} \ln \frac{\gamma - 1 + (\gamma + 1)y_1}{2\gamma}, \quad y_1 = 1 + \rho_1'.$$

Значения η_2 и z_2 определяются из граничного условия на порш-

не $\xi = 1$, $l = 1 + (\gamma - 1)(\gamma - 1)/2$.

Используя линейные решения данной задачи /7, 12/, для рассматриваемых параметров волны получим следующие простые соотношения:

$$\gamma = 1, \quad p_2' = \gamma M, \quad T_1 = 1 - M, \quad J_1 = \gamma(1 - M); \quad (4)$$

$$\gamma = 2, \quad p_2' = \frac{M^2 \gamma}{\sqrt{1 - M^2}} \ln \left\{ \frac{M}{1 + \sqrt{1 - M^2}} \right\}^{-1}, \quad T_2 = 1 - M, \\ J_2 = \frac{M^2 \gamma}{\sqrt{1 - M^2}} \int_1^M \ln \frac{x}{1 + \sqrt{1 - x^2}} \frac{dx}{x^2}; \quad (5)$$

$$\gamma = 3, \quad p_2' = \frac{2M^2 \gamma}{1 + M}, \quad T_3 = 1 - M, \quad J_3 = \frac{\gamma M(1 - M)}{1 + M} \quad (6)$$

При получении приближенных аналитических выражений, которые бы учитывали нелинейные эффекты, рассмотрим область значений ξ близких к единице $\xi = 1 - x$, $x \ll 1$. Выделив в (3) наиболее существенные слабые, получим простые уравнения следующего вида:

$$\frac{d\eta}{dx} = - \frac{2\eta}{\gamma(1-x)}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{1}{\gamma(1-x)}, \quad (7)$$

с теми же граничными условиями на ударном фронте и на границе поршня. Условие малости x на ударном фронте хорошо выполняется для $\gamma_1 \gg 1$. Так как в этом случае $x \approx \frac{\gamma - 1}{\gamma + 2}$, то следует ожидать увеличения погрешностей используемого приближения с ростом γ .

Из (7) нетрудно получить решения, которые являются точными в случае плоского поршня $\gamma = 1$:

$$z = z_1 + \ln \left(\frac{\xi_1}{\xi} \right)^{1/\gamma}, \quad \eta = \eta_1 \left(\frac{\xi}{\xi_1} \right)^{2/\gamma} \quad (8)$$

В этом приближении из (2), (8) получим аналитические зависимости для

параметров ударной волны, которые являются точными лишь для плоского поршня $\psi = 1$:

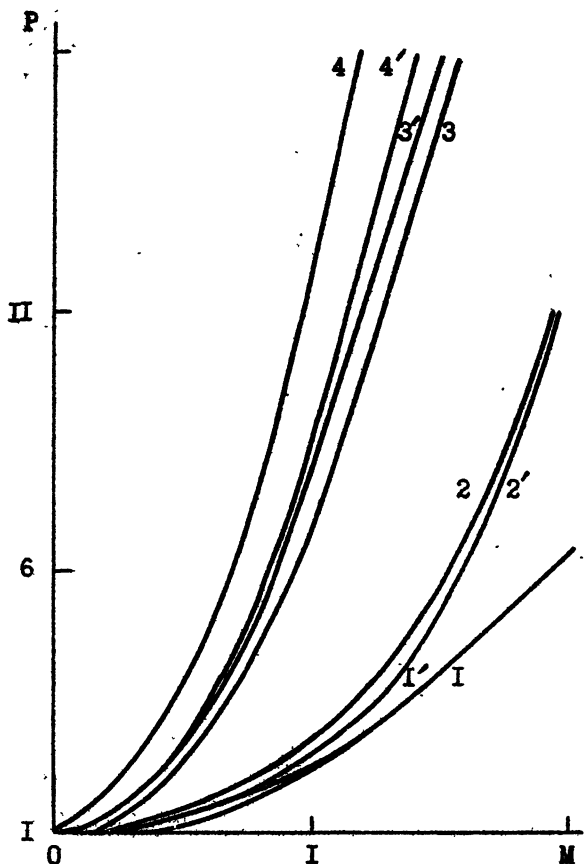
$$p_2' = (\tau_{v_1} e^{2z_1})^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} - 1, \quad M = \xi_1^{1/\gamma} e^{z_1},$$

$$T_{\gamma} = e^{z_1} (1 - \xi_1^{1/\gamma}), \quad J_{\gamma} = (p_2' / M) (1 - \xi_1^{1/\gamma}). \quad (9)$$

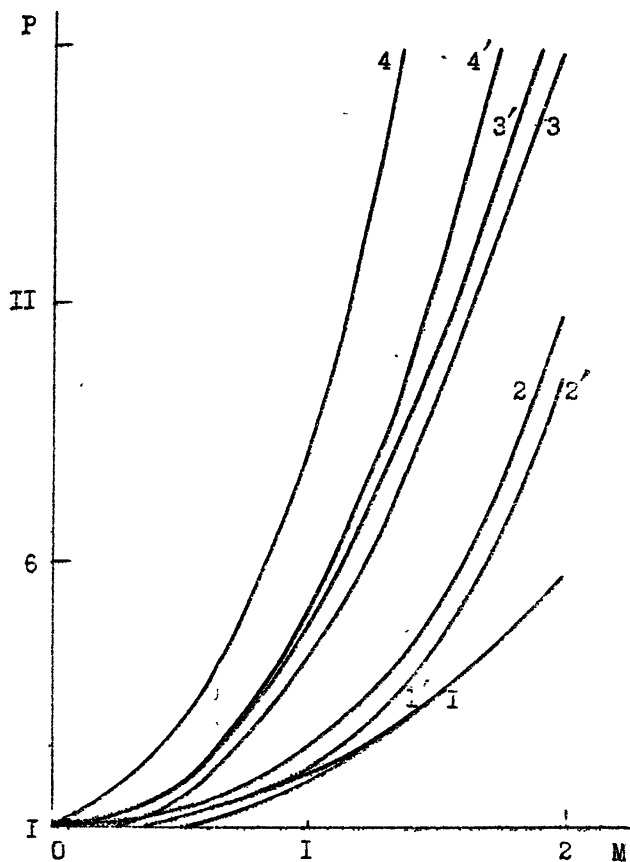
Анализ выражений (2), (4)–(6), (9) показал, что при числах Маха $M > 0,4$ наблюдаются существенные качественные и количественные отличия точных зависимостей $p_2'(M)$, $T_{\gamma}(M)$, $J_{\gamma}(M)$ от аналогичных характеристик (4)–(6), полученных в линейном приближении. В то же время, приближенные выражения (9), полученные в данной работе отлично согласуются с численными расчетами (2) для $M > 1$ и $\gamma = 1,4$ (рис. 1–6). С увеличением показателя адиабаты среды γ , возрастают значения M , начиная с которых наблюдается согласие приближенных (9) и точных выражений (2) для параметров ударной волны.

Здесь следует отметить, что сравнение зависимости для давления на границе поршня $p_2'(M)$ с аналогичной характеристикой, приведенной в /7/, показало, что имеются существенные отличия. Хорошее согласие численных расчетов для $p_2'(M)$ (2), выполненных в данной работе, с приближенным выражением (9) позволяет утверждать, что в /7/ при численных расчетах зависимости $p_2'(M)$ допущены неточности, которые привели к существенно заниженным значениям давления на границе поршня при $M > 1$ (см. рис. 7).

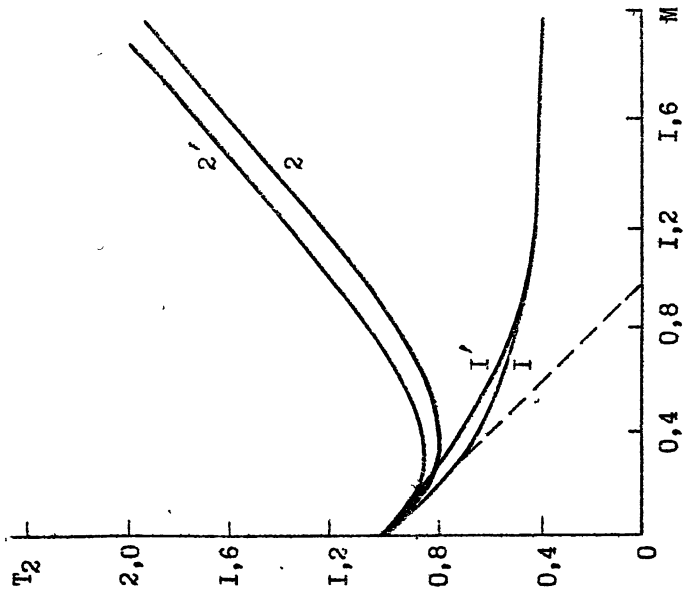
Столь хорошее совпадение точных (2) и приближенных (9) зависимостей позволяет использовать последние для довольно точной и простой оценки параметров ударной волны в начальные моменты времени процесса генерации. Оценим, например, скорость расширения V плазменного поршня и давление на его границе p_2 , при воздействии лазерного излучения с энергией $E = 177$ Дж на мишень из полистирола диаметром 174 мкм, находящуюся в атмосфере дейтерия D_2 , $\rho_0 = 2,13 \cdot 10^3$, $\rho_0 = (1 + 4) \cdot 10^{-3}$ кг/м³ /4/. В этом случае измеренная скорость ударной волны $V_1 = 3 \cdot 10^5$ м/сек была постоянна в течение времени $0 \leq t \leq 18$ нс, т.е. до расстояний $5 \cdot 10^3$ мкм /4/. Используя выражения (9) при $\psi = 3$, и



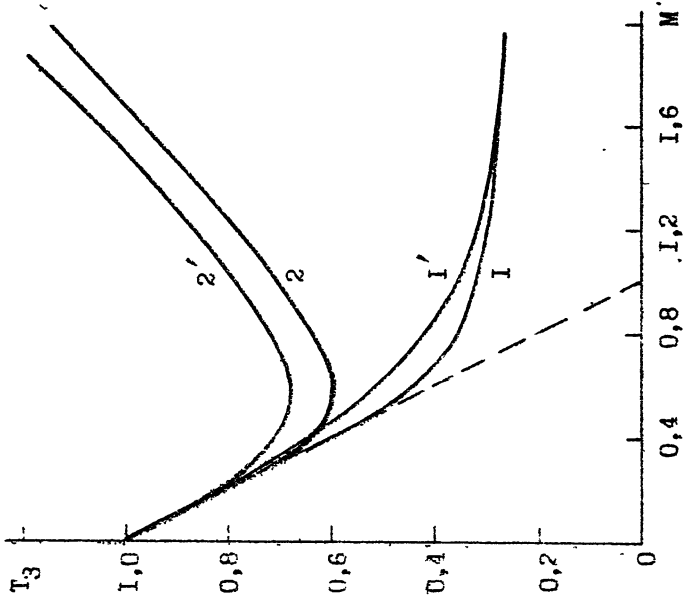
Р и с. I. Зависимость давления $P = (p - p_0) \frac{\gamma}{\rho_0 c_0^2} + I$ при $\psi = 2$ на поршне и ударном фронте от числа Маха. Кривые I, 2 отвечают численным расчетам (2) давления на ударном фронте и на поршне соответственно, $\gamma = 1,4$; кривые 3, 4 - аналогичным характеристикам для $\gamma = 7$. Кривые I', 2', 3', 4' соответствуют аналитическим выражениям (9)



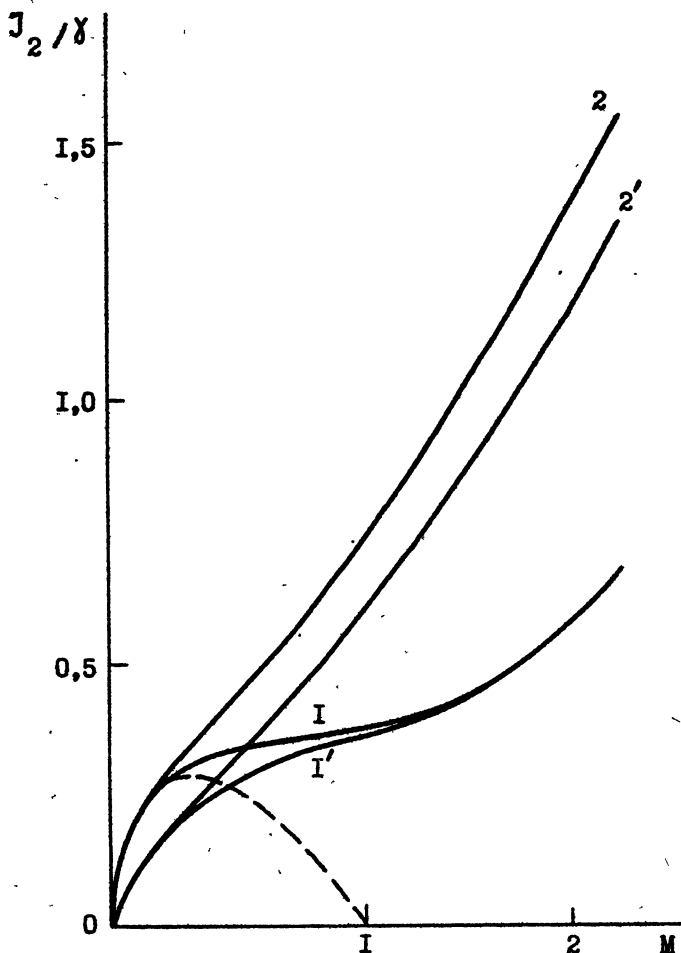
Р и с. 2. Зависимость давления $P = (p - p_0) \frac{\gamma}{\rho_0 c_0^2} + 1$ при $\gamma = 3$ на поршне и ударном фронте от числа Маха. Кривые 1, 2 отвечают численным расчетам (2) давления на ударном фронте и на поршне соответственно, $\gamma = 1,4$; кривые 3, 4 - аналогичным характеристикам для $\gamma = 7$. Кривые 1', 2', 3', 4' соответствуют аналитическим выражениям (9)



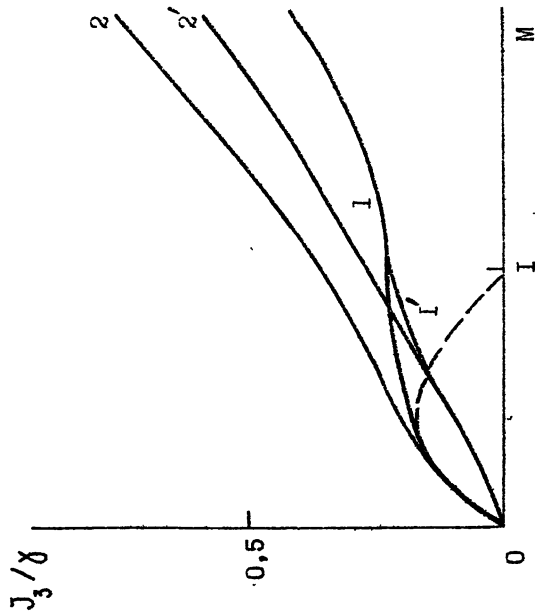
Р и с. 3. Зависимость длительности ударной волны T_2 от числа Маха M при $\chi = 2$. Штриховая линия отвечает линейному решению; кривые 1, 2 соответствуют численным расчетам (2) для $\chi = 1, 4$ и 7, кривые 1', 2' — аналитическим зависимостям (9)



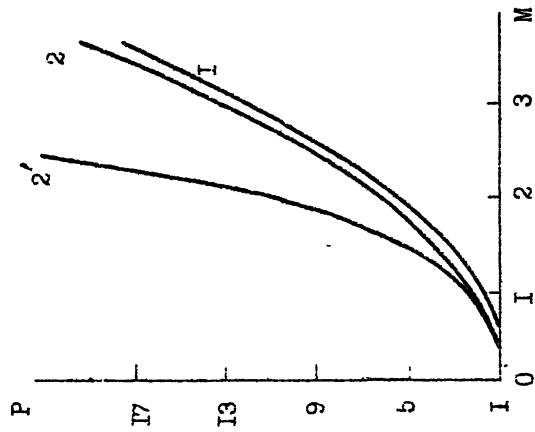
Р и с. 4. Зависимость длительности ударной волны T_3 от числа Маха M при $\chi = 3$. Штриховая линия отвечает линейному решению; кривые 1, 2 соответствуют численным расчетам (2) для $\chi = 1, 4$ и 7; кривые 1', 2' — аналитическим зависимостям (9)



Р и с. 5. Зависимость импульса давления J_2 от числа Маха M при $\gamma = 2$. Штриховая линия отвечает линейному решению; кривые $I, 2$ соответствуют численным расчетам (2) для $\gamma = 1,4$ и 7 ; кривые $I', 2'$ - аналитическим зависимостям (9)



Р и о. 6. Зависимость импульса давления J_3 от числа Маха M при $\delta = 3$. Штриховая линия отвечает линейному решению; кривые 1, 2 соответствуют численным расчетам (2) для $\gamma = 1,4$ и 7; кривые 1', 2' - аналитическим зависимостям (9)



Р и о. 7. Давление на ударном фронте и на границе сферического поршня, расширяющегося в воздухе $\gamma = 1,4$, $P = (p - p_0) \frac{p_0 c_0^2}{\gamma} + 1$. Кривая 1 - соответствует расчетам $\frac{1}{4}/\gamma$ (2) для ударного фронта; кривая 2 - расчетам $\frac{1}{4}/\gamma$ на сфере, кривая 2' - расчетам (2), выполненным в данной работе

зависимость скорости ударного фронта V_1 от величины y_1 , $U_2 = \frac{V_1^2}{C_0^2} = \frac{[(\gamma-1) + (\gamma+1)y_1]}{2\gamma}$, нетрудно получить зависимости $M(U)$ и $P_2'(U)$:

$$M = U \left\{ \frac{2}{\gamma+1} \left(1 - \frac{1}{U^2} \right) \right\}^{1/3},$$

$$P_2' = \left\{ \frac{2\gamma}{(\gamma+1)^2} \frac{(U^2 - \frac{\gamma-1}{2\gamma}) [2 + (\gamma-1)U^2]}{U^2} \right\}^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} - 1. \quad (10)$$

Из (10) для $\gamma = 4/3$ и $C_0 = (\gamma p_0 / \rho_0) = 1685 + 843$ м/сек находим $V = 2,85 \cdot 10^5$ м/сек, $p_2 = 1,5 \cdot 10^9 + 2,4 \cdot 10^{10}$ Па, при давлении ударном фронте $p_1 = 7,69 \cdot 10^7 + 3 \cdot 10^8$ Па.

В заключение рассмотрим зависимость от скорости расширения поршня V другой важной интегральной характеристикой ударной волны - её динамического импульса $E_\psi = \int_{t_1}^{t_2} p v^2 dt$; здесь v - скорость частиц среды. Удобно ввести безразмерную величину $G_\psi = E_\psi / \gamma p_0 C_0$, которую аналогично J_ψ можно записать в следующем виде:

$$G_\psi = \int_{\xi_1}^1 (\eta e^{2\xi})^{\frac{1}{\gamma-1}} \xi e^{\xi} \frac{[\eta - (1-\xi)^2]}{\eta - (1-\xi)^2} d\xi. \quad (11)$$

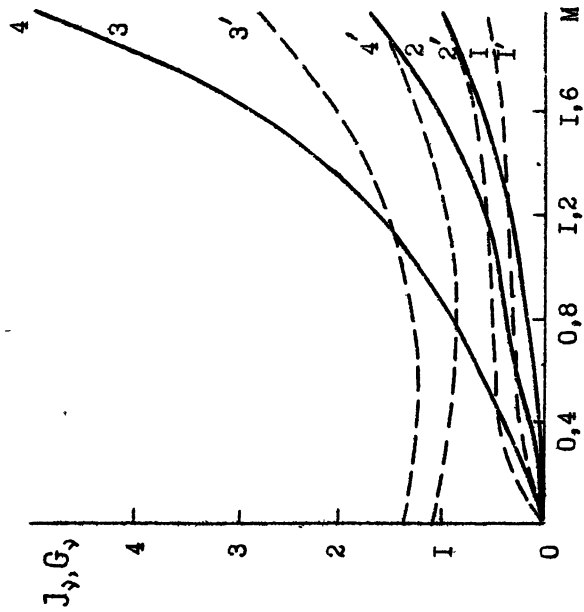
Используя (8), для G_ψ нетрудно получить приближенное (при $\psi = 2$; 3) выражение

$$G_\psi = \frac{1 - \xi_1^{(2\psi-1)/\gamma}}{2\psi-1} P_2^{1/\gamma} M, \quad (12)$$

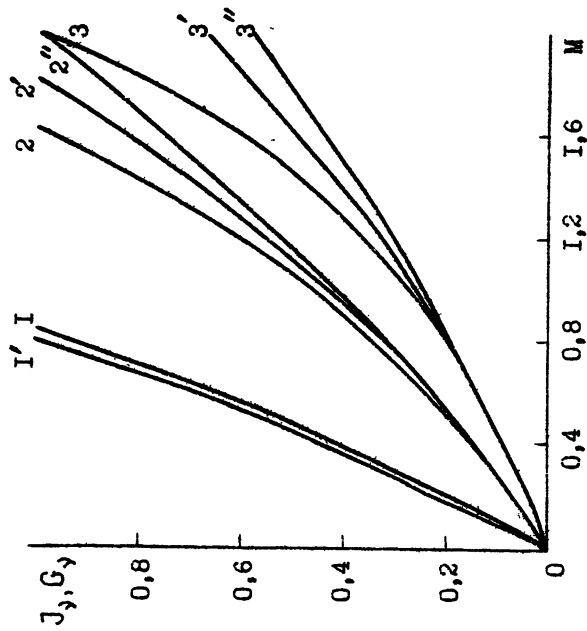
которое при $\psi = 1$ является точным.

Численные расчеты выражений (2), (11) показали, что в области $0 < M < M^*$ ($J_\psi(M^*) = G_\psi(M^*)$) значения импульса давления $J_\psi(M)$ превышают значения динамического импульса $G_\psi(M)$; в области $M > M^*$, $G_\psi(M) > J_\psi(M)$. С ростом γ область преобладания $J_\psi(M)$ резко расширяется (см. рис. 8).

Интересно отметить, что с ростом γ значения импульса давления увеличиваются, в то время как значения динамического импульса увеличиваются лишь для плоского случая $\psi = 1$, и уменьшаются для $\psi = 2, 3$ (см. рис. 9).



Р и с. 8. Сравнение значений импульсов давления и динамического импульса. Кривые 1, 2, 3 соответствуют значениям динамического импульса (9) для $\gamma = 3, 2, 1$ и $\chi = 1, 4$; 1', 2', 3' - значениям импульсов давления (5). Кривая 4 отвечает значениям динамического импульса (9) для $\gamma = 1, \chi = 1, 1$; 4' - значениям импульсов давления (5)



Р и с. 9. Зависимость динамического импульса от скорости поршня. Кривые 1, 2, 3 отвечают значениям динамического импульса (9) для $\gamma = 1, 2, 3$ и $\chi = 1, 4$; 1', 2', 3' - $\gamma = 1, 2, 3$ и $\chi = 4$; 1'', 2'', 3'' - $\gamma = 1, 2, 3$ и $\chi = 7$

Л и т е р а т у р а

1. Наугольных К.А., Рой Н.А. Электрические заряды в воде. - М. : Наука, 1971.
2. Поздеев В.А. Прикладная гидродинамика электрического разряда в жидкости. - Киев: Наукова Думка, 1980.
3. Freiwald D.A., Axford R.A. Approximate spherical blast theory including source mass. - J.Appl.Phys., 1975, v.46, N3, p.1171-1174.
4. Зорев Н.Н., Склизков Г.В., Шиканов А.С. Формирование сверх - сильных ударных волн под действием высокотемпературного плазменного поршня. - Письма в ЖЭТФ, т.38, № 9, с.421-424.
5. Коробейников В.П., Христофоров В.Д. Подводный взрыв. В кн. : Гидромеханика, М., 1976, с.54-120. (Итоги науки и техники / ВИНТИ; Т.9).
6. Лямшев Л.М., Наугольных К.А. Оптическая генерация звука. Нелинейные явления (обзор). - Акуст.ж., 1981, т.27, № 5, с.641-668.
7. Taylor G.L. The air wave surrounding an expanding sphere. - Proc.Roy.Soc., ser.A, 1946, v.186, p.273-292.
8. Седов Л.И. О некоторых невосстановившихся движений сплошной среды. - ПММ, 1945, т.9, № 4, с.293-311.
9. Кочина Н.Н., Мельникова Е.С. О расширении поршня в воде. - ПММ, 1959, т.23, № 1, с.93-100.
10. Наугольных К.А. О расширении цилиндра в жидкости. - Акуст.ж., 1962, т.8, № 1, с.136-137.
11. Наугольных К.А. Волна сжатия, излучаемая расширяющейся сферой.

- Акуст.ж., 1965, т. II, № 3, с. 351-358.

12. Бескаравайный Н.М., Поддеев В.А. Волновые задачи о расширении полости в жидкости с учетом конечности перемещения границ. - Сб. Физико-механические процессы при высоковольтном разряде в жидкости. - Киев: Наукова Думка, 1980, с. 86-97.

Дата поступления статьи

24 мая 1988 г.