

Министерство высшего и среднего специального образования
Р С Ф С Р

Горьковский ордена Трудового Красного Знамени
научно-исследовательский радиофизический институт (НИРФИ)

П р е п р и н т № 2 7 2

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЕКЦИОННОГО МЕТОДА УГЛОВОГО РАЗРЕШЕНИЯ НА
ОСНОВЕ АНАЛИЗА СОБСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ МАТРИЦЫ

А.Б.Гершман

В.Т.Ермолаев

Горький 1989

Гершман А. Б., Ермолаев В. Т.

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЕКЦИОННОГО МЕТОДА УГЛОВОГО РАЗРЕШЕНИЯ НА
ОСНОВЕ АНАЛИЗА СОБСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ МАТРИЦЫ // Пре-
принт № 272. - Горький: НИРФИ. - 1989. - 30 с.

УДК 512.8

На основе анализа собственных чисел корреляционной матрицы входных сигналов проводится исследование асимптотических свойств нелинейного проекционного метода углового разрешения в антенных решетках. Анализируется также эффективность процедуры пространственного сглаживания корреляционной матрицы при разрешении коррелированных источников.

В В Е Д Е Н И Е

Анализ собственных чисел корреляционной матрицы (КМ) входных сигналов антенной решетки (АР) позволяет исследовать свойства нелинейных методов углового сверхразрешения точечных источников излучения [1-3]. Точные выражения для собственных чисел КМ в случае двух некоррелированных источников получены в [4,5], а более общие выражения для произвольного коэффициента корреляции - в [2,6].

В настоящей работе в случае двух источников с произвольным коэффициентом корреляции проведен вывод точных выражений для собственных чисел сглаженной КМ, соответствующей обработке сигналов в АР с применением процедуры пространственного сглаживания, предложенной в [3,7-9] с целью разрешения коррелированных источников. Кроме того, получены асимптотические формулы для собственных чисел КМ в случае трех некоррелированных источников одинаковой мощности. Полученные и известные выражения для собственных чисел использованы при анализе свойств проекционного метода сверхразрешения в условиях достаточно большого числа обучающих выборок при оценке КМ. В частности, исследовано влияние количества источников и степени их взаимной коррелированности на эффективность первого и наиболее важного этапа проекционного метода - процедуры оценивания числа воздействующих на АР источников (так называемой процедуры оценивания размерностей шумового и сигнального подпространств). Рассмотрена также эффективность пространственного сглаживания КМ.

1. КОРРЕЛЯЦИОННАЯ МАТРИЦА ВХОДНЫХ СИГНАЛОВ И ПРОЕКЦИОННЫЙ МЕТОД УГЛОВОГО РАЗРЕШЕНИЯ

Рассмотрим линейную эквидистантную АР, состоящую из N изотропных элементов, в которые поступают сигналы от I внешних точечных

источников излучения, находящихся в дальней зоне антенны. Кроме того, имеется аддитивный статистически независимый по каналам собственный шум с единичной мощностью в каждом элементе. Входные сигналы АР опишем вектором $X(t)$, i -я компонента которого соответствует сигналу i -го элемента в момент t :

$$X(t) = A s(t) + n(t). \quad (I)$$

Здесь $A = (F_1, F_2, \dots, F_I)$ - матрица размерности $N \cdot I$, составленная из векторов F_i , описывающих амплитудно-фазовые распределения сигналов источников в элементах решетки, $F_i = (e^{j(1-\frac{N+1}{2})\alpha_i}, e^{j(2-\frac{N+1}{2})\alpha_i}, \dots, e^{j(N-\frac{N+1}{2})\alpha_i})^T$, точка отсчета фазы выбрана в центре апертуры

АР, $\alpha_i = 2\pi d \lambda_B^{-1} \sin \theta_i$, d - шаг решетки, λ_B - средняя длина волны, θ_i - угол прихода сигнала i -го источника, отсчитываемый от нормали к апертуре АР, $s(t)$ - I -мерный вектор комплексных амплитуд источников излучения, $n(t)$ - вектор собственных шумов, $(\cdot)^T$ - знак транспонирования.

Используя (I), КМ можно записать следующим образом [2,9]:

$$M = \langle X(t) X^+(t) \rangle = E_N + A S A^+, \quad (2)$$

где E_N - единичная матрица размерности $N \cdot N$, описывающая корреляционные свойства собственного шума, $S = \langle s(t) s^+(t) \rangle$ - матрица размерности $I \cdot I$, описывающая корреляционные свойства комплексных амплитуд источников излучения в точке отсчета фазы, $\langle \cdot \rangle$ и $(\cdot)^+$ - знаки статистического усреднения и эрмитового сопряжения, соответственно. Матрица S может быть записана в виде [2]

$$S = \begin{bmatrix} \vartheta_1 & \sqrt{\vartheta_1 \vartheta_2} \rho_{12} \dots & \sqrt{\vartheta_1 \vartheta_I} \rho_{1I} \\ \sqrt{\vartheta_2 \vartheta_1} \rho_{21} & \vartheta_2 & \dots & \sqrt{\vartheta_2 \vartheta_I} \rho_{2I} \\ \vdots & & & \vdots \\ \sqrt{\vartheta_I \vartheta_1} \rho_{I1} & \sqrt{\vartheta_I \vartheta_2} \rho_{I2} \dots & & \vartheta_I \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Здесь γ_i - отношения мощности i -го источника излучения к мощности собственного шума в одном элементе АР, $\rho_{pq} = |\rho_{pq}| \exp(j\varphi_{pq})$ - коэффициент корреляции комплексных амплитуд p -го и q -го источников, φ_{pq} - средняя разность фаз колебаний этих источников в точке отсчета фазы, т.е. в центре апертуры АР.

Если источники не коррелированы, то матрица S является диагональной. При полной корреляции отдельных источников (когда модуль коэффициента их взаимной корреляции равен единице) матрица S вырождается и имеет ранг, меньший I .

Проекционный метод углового разрешения предложен в работах [10-13] для случая $N > I$. В этом случае пространство N -мерных векторов можно разбить на два ортогональных подпространства - шумовое и сигнальное [11, 14, 15]. Размерности этих подпространств соответственно равны $(N-I)$ и I . Сигнальное подпространство натянуто на базис F_i ($i = \overline{1, I}$). Поскольку шумовое подпространство является ортогональным дополнением к сигнальному, векторы F_i ортогональны любому вектору из шумового подпространства. Это обстоятельство используется в проекционном методе для определения угловых координат источников следующим образом. В случае невырожденной матрицы (3) пространство собственных векторов точной КМ (2) также можно разбить на сигнальную и шумовую части, причем шумовым собственным векторам соответствует минимальное единичное шумовое собственное число кратности $(N-I)$, а сигнальным собственным векторам - сигнальные собственные числа, большие единицы. Проекционный метод разрешения включает в себя два этапа. На первом формируется оценка КМ входных сигналов и оценивается число источников излучения (т.е. размерность сигнального и шумового подпространств). На втором этапе строится матричный проектор D на шумовое подпространство и оценка пространственного спектра вида [11, 14, 15]

$$\eta(\theta) = (V^+(\theta) D V(\theta))^{-1}, \quad (4)$$

где $V(\theta)$ - вектор обзора по угловой координате θ . При этом ранг матрицы D выбирается равным оцененной размерности шумового подпространства. Если КМ известна точно и ранг шумового проектора оценок правильно, то в направлении θ_i , при котором $V(\theta_i) = F_i$, проекция вектора V на шумовое подпространство равна нулю и, следовательно, угловым координатам источников соответствуют пики спек-

тральной оценки (4). На практике КМ измеряется по конечной совокупности выборок векторов входных сигналов и поэтому всегда известна неточно. В этом случае существует вероятность ошибки при определении ранга шумового проектора. Такая ошибка сильно ухудшает характеристики разрешения, так как приводит либо к существенному повышению вероятности неразрешения (пропуска) источников, либо к существенному повышению вероятности ложного разрешения (формирования ложных пиков в спектре (4)) [3,13]. Поэтому процедура классификации собственных чисел и векторов КМ на сигнальные и шумовые (процедура оценивания ранга шумового проектора) имеет в проекционном методе определяющее значение [3,16].

Возможности разрешения источников проекционным методом сильно зависят от степени коррелированности их комплексных амплитуд. При сильной коррелированности источников некоторые из сигнальных собственных чисел точной КМ становятся близкими к единичному шумовому числу и в пределе при полной коррелированности – точно равными этому числу [2,3]. Это приводит к ошибкам в определении ранга шумового проектора D и к существенному ухудшению характеристик проекционного метода, а в пределе – к полной потере разрешения. С целью улучшения разрешения коррелированных источников в [3,7-9] предлагается перед непосредственным применением проекционного метода осуществлять пространственное сглаживание КМ.

2. МЕТОД ПРОСТРАНСТВЕННОГО СГЛАЖИВАНИЯ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ МАТРИЦЫ

Пространственное сглаживание реализуется путем разбиения АР на K перекрывающихся подрешеток размерности $L < N$, сдвинутых друг относительно друга на один приемный элемент и образования сглаженной КМ за счет суммирования КМ подрешеток (усреднения КМ по пространству). Дальнейшая обработка принятых сигналов ничем не отличается от подобной в случае некоррелированных источников, за исключением того, что вместо полной КМ вида (2) при этом используется сглаженная КМ меньшей размерности. Число подрешеток и размерность подрешетки связаны очевидным соотношением

$$K = N - L + 1. \quad (5)$$

Пронумеруем подрешетки так, чтобы левая крайняя была первой, а правая крайняя – последней. Тогда для подрешетки с номером k , полученной сдвигом первой подрешетки на $k-1$ элементов вправо, запишем L -мерный вектор входных сигналов по аналогии с (I):

$$X_k(t) = A_k s(t) + n_k(t), \quad (6)$$

$$A_k = A_{k-1} \Phi = A_1 \Phi^{k-1}.$$

Здесь A_k – матрица размерности $L \cdot I$, аналогичная матрице A в (I), но меньшей размерности, $\Phi = \text{diag} \{e^{j\mu_1}, e^{j\mu_2}, \dots, e^{j\mu_I}\}$ – диагональная унитарная матрица, связывающая матрицы A_k и A_{k-1} для двух соседних подрешеток. Корреляционную матрицу k -й подрешетки на основании (6) запишем следующим образом:

$$M_k = \langle X_k(t) X_k^+(t) \rangle = E_L + A_1 \Phi^{k-1} S (\Phi^{k-1})^+ A_1^+, \quad (7)$$

где E_L – единичная матрица размерности $L \cdot L$. Сглаженная КМ, образованная как среднее арифметическое от КМ подрешеток, будет иметь вид [9]

$$\tilde{M} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K M_k = A_1 \tilde{S} A_1^+, \quad (8)$$

где матрица \tilde{S} имеет структуру, аналогичную (3), за исключением того, что в элементы \tilde{S} входит вместо ρ_{pq} коэффициент корреляции вида

$$\tilde{\rho}_{pq} = \rho_{pq} \frac{\sin [K(\mu_p - \mu_q)/2]}{K \sin [(\mu_p - \mu_q)/2]} e^{j \frac{K-1}{2} (\mu_p - \mu_q)}. \quad (9)$$

При выводе формулы (9) для удобства рассмотрения точка отсчета фаз сигналов выбиралась не в центре апертуры всей АР, как ранее, а в центре апертуры первой подрешетки.

Для пары источников $\mu_p \neq \mu_q$ и, следовательно, при $K > 1$ имеет место неравенство

$$|\tilde{\rho}_{pq}| < |\rho_{pq}|, \quad (10)$$

т.е. процедура пространственного сглаживания приводит к декорреляции источников, причем выбором величины K можно регулировать значение $|\rho_{pq}|$.

Рассмотрим теперь условия, которым должна удовлетворять общая размерность AP N . Для того, чтобы после пространственного сглаживания можно было применить проекционный метод, необходимо $L > I$. Кроме того, чтобы матрица \tilde{S} имела полный ранг, равный I , необходимо, чтобы число подрешеток было больше или равно числу полностью коррелированных источников [3,9], т.е. в общем случае нужно брать $K \geq I$. Следовательно, с учетом (5) имеем следующее условие, которому должна удовлетворять общая размерность AP [3]:

$$N \geq 2I, \quad (II)$$

т.е. размерность AP должна, по крайней мере, вдвое превышать число разрешаемых источников.

3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СИГНАЛЬНЫХ СОБСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ МАТРИЦЫ

Прямой метод определения собственных чисел точной КМ путем решения ее характеристического уравнения не позволяет получить аналитические выражения для собственных чисел. Поэтому ниже мы рассмотрим другой метод, связанный с определением корней минимального многочлена КМ [17]. В общем случае сигнальные собственные числа отличаются по величине друг от друга и от шумового собственного числа. Тогда минимальный многочлен $\varphi(\lambda)$ имеет степень $(I+1)$ и может быть записан в виде

$$\varphi(\lambda) = \lambda^{I+1} - \rho_0 \lambda^I - \rho_1 \lambda^{I-1} - \dots - \rho_I. \quad (I2)$$

Введем в рассмотрение матрицы

$$\Gamma_1 = E_I + SA^+A, \quad \Gamma_2 = E_I + A^+AS. \quad (I3)$$

Покажем, что эти матрицы имеют один и тот же характеристический многочлен $\Psi(\lambda)$, который связан с минимальным многочленом $\varphi(\lambda)$ соотношением

$$\varphi(\lambda) = (\lambda - 1) \psi(\lambda). \quad (I4)$$

Это означает, что корни многочлена $\psi(\lambda)$ (собственные числа матриц Γ_1 и Γ_2) совпадают с сигнальными собственными числами ЮМ М.

Возводя последовательно матрицу М вида (2) в возрастающие степени и применяя метод математической индукции, можно доказать справедливость выражений

$$M^r = M^{r-1} + A \Gamma_1^{r-1} S A^+, \quad (I5)$$

$$M^r = M^{r-1} + A S \Gamma_2^{r-1} A^+.$$

Минимальный многочлен $\varphi(\lambda)$ аннулирует матрицу М ($\varphi(M) = 0$). Поэтому из (I2) получаем матричное выражение вида

$$M^{I+1} = \rho_0 M^I + \rho_1 M^{I-1} + \dots + \rho_{I-1} M + \rho_I E_N. \quad (I6)$$

В правой части (I6) с помощью (I5) произведем последовательно замену матриц E_N, M, \dots, M^{I-1} . На первом шаге матрицу E_N заменим на $(M - A S A^+)$, на следующем шаге матрицу М заменим на $(M^2 - A \Gamma_1 S A^+)$. Продолжая эту процедуру, через I шагов приходим к выражению

$$M^{I+1} = (\rho_I + \rho_{I-1} + \dots + \rho_0) M^I + A \left[-\rho_I E_I - (\rho_I + \rho_{I-1}) \Gamma_1 - \right. \\ \left. - (\rho_I + \rho_{I-1} + \rho_{I-2}) \Gamma_1^2 - \dots - (\rho_I + \rho_{I-1} + \dots + \rho_1) \Gamma_1^{I-1} \right] S A^+. \quad (I7)$$

Сравнивая (I7) с первой формулой в (I5), приходим к выводу, что

$$\rho_I + \rho_{I-1} + \dots + \rho_0 = 1, \quad (I8)$$

$$\Gamma_1^I + (\rho_I + \rho_{I-1} + \dots + \rho_1) \Gamma_1^{I-1} + (\rho_I + \rho_{I-1} + \dots + \rho_2) \Gamma_1^{I-2} + \dots + (\rho_I + \rho_{I-1}) \Gamma_1 + \rho_I E_I = 0$$

Первое равенство в (I8) является следствием того, что многочлен имеет своим корнем шумовое собственное число, равное единице (см. (I2)). Второе равенство является матричным. Его левая часть опре-

делает некоторый аннулирующий многочлен степени I с коэффициентом при старшем члене, равным единице. Среди аннулирующих многочленов такими свойствами обладает только характеристический многочлен матрицы Γ_1 . Аналогичный вывод можно повторить и для матрицы Γ_2 . Таким образом, характеристический многочлен матриц Γ_1 и Γ_2 можно представить следующим образом:

$$\psi(\lambda) = \lambda^I + q_1 \lambda^{I-1} + q_2 \lambda^{I-2} + \dots + q_I, \quad (19)$$

где

$$q_1 = p_1 + p_2 + \dots + p_I = 1 - p_0,$$

$$q_2 = p_2 + p_3 + \dots + p_I = 1 - p_0 - p_1,$$

$$\dots$$

$$q_{I-1} = p_{I-1} + p_I = 1 - p_0 - p_1 - \dots - p_{I-2},$$

$$q_I = p_I = 1 - p_0 - p_1 - \dots - p_{I-1}.$$
(20)

Нетрудно проверить, что из (12), (19), (20) следует соотношение (14). Таким образом, мы доказали, что собственные числа матриц Γ_1 и Γ_2 совпадают с сигнальными собственными числами КМ М. Коэффициенты q_1, q_2, \dots, q_I для произвольного I могут быть найдены методом Лейбнера [17].

Определим сигнальные собственные числа КМ размерности N · N в случае двух источников излучения с произвольным коэффициентом взаимной корреляции [2,6]. В этом случае матрица Γ_1 имеет вид

$$\Gamma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \vartheta_1 & \sqrt{\vartheta_1 \vartheta_2} \rho_{12} \\ \sqrt{\vartheta_2 \vartheta_1} \rho_{21} & \vartheta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N & N g_{12} \\ N g_{21} & N \end{bmatrix}, \quad (21)$$

где

$$g_{pq} = \frac{F_p^+ F_q}{N} = \frac{\sin [N(\omega_p - \omega_q)/2]}{N \sin [(\omega_p - \omega_q)/2]}. \quad (22)$$

Коэффициенты q_1 и q_2 характеристического многочлена $\psi(\lambda) = \lambda^2 + q_1 \lambda + q_2$ имеют следующий вид:

$$q_1 = -2 \left[1 + N \left(\frac{\nu_1 + \nu_2}{2} + \sqrt{\nu_1 \nu_2} g_{12} |p_{12}| \cos \varphi_{12} \right) \right], \quad (23)$$

$$q_2 = 1 + N \left[(\nu_1 + \nu_2) + 2 \sqrt{\nu_1 \nu_2} g_{12} |p_{12}| \cos \varphi_{12} + N \nu_1 \nu_2 (1 - g_{12}^2) (1 - |p_{12}|^2) \right].$$

Определяя корни этого многочлена, находим сигнальные собственные числа КМ:

$$\lambda_{1,2} = 1 + \frac{(\nu_1 + \nu_2)N}{2} + \sqrt{\nu_1 \nu_2} N g_{12} |p_{12}| \cos \varphi_{12} \pm \sqrt{\left[\frac{(\nu_1 + \nu_2)N}{2} + \sqrt{\nu_1 \nu_2} N g_{12} |p_{12}| \cos \varphi_{12} \right]^2 - \nu_1 \nu_2 N^2 (1 - g_{12}^2) (1 - |p_{12}|^2)} \quad (24)$$

При отсутствии корреляции ($|p_{12}| = 0$) эти выражения переходят в известные формулы для некоррелированных источников [4,5]:

$$\lambda_{1,2} = 1 + \frac{(\nu_1 + \nu_2)N}{2} \pm \sqrt{\frac{(\nu_1 - \nu_2)^2 N^2}{4} + \nu_1 \nu_2 N^2 g_{12}^2} \quad (25)$$

В случае полной корреляции ($|p_{12}| = 1$)

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1 + (\nu_1 + \nu_2)N + 2 \sqrt{\nu_1 \nu_2} N g_{12} \cos \varphi_{12}, \\ \lambda_2 &= 1 \end{aligned} \quad (26)$$

и наблюдается равенство одного из сигнальных собственных чисел шумовому собственному числу за счет вырождения матрицы S .

Если при $|p_{12}| = 1$ источники одинаковой мощности полностью совместить по углу, т.е. положить в формуле (26) $\nu_1 = \nu_2 = \nu$ и $g_{12} = 1$, то будут выполняться следующие предельные переходы:

1. При $\varphi_{12} = \pi$ сигналы от источников складываются в противофазе и происходит их полное гашение ($\lambda_1 = 1$).

2. При $\varphi_{12} = 0$ наблюдается синфазное равнсамплитудное сложение сигналов от источников, что соответствует случаю одного источника учетверенной мощности ($\lambda_1 = 1 + 4\nu N$).

3. При $\varphi_{12} = \pi/2$ происходит квадратурное сложение сигналов от источников, что соответствует случаю одного источника удвоенной мощности ($\lambda_1 = 1 + 2\nu N$).

Собственные числа сглаженной КМ в случае двух произвольным образом коррелированных источников можно получить, воспользовавшись тем, что матрицы \tilde{M} и \tilde{M} имеют аналогичную структуру, за исключением того, что в элементы \tilde{M} вместо ρ_{pq} входит коэффициент корреляции $\tilde{\rho}_{pq}$. Таким образом, будем иметь следующие выражения для сигнальных собственных чисел сглаженной КМ \tilde{M} :

$$\lambda_{1,2} = 1 + \frac{(\nu_1 + \nu_2)L}{2} + \sqrt{\nu_1 \nu_2} L g_{12}(L) g_{12}(K) |\rho_{12}| \cos\left(\varphi_{12} + \frac{(K-1)(u_1 - u_2)}{2}\right) \pm \left[\left[\frac{(\nu_1 + \nu_2)L}{2} + \sqrt{\nu_1 \nu_2} L g_{12}(L) g_{12}(K) |\rho_{12}| \cos\left(\varphi_{12} + \frac{(K-1)(u_1 - u_2)}{2}\right) \right]^2 - \nu_1 \nu_2 L^2 (1 - g_{12}^2(L)) (1 - g_{12}^2(K) |\rho_{12}|^2) \right]^{1/2}, \quad (27)$$

где
$$g_{12}(L) = \sin[L(u_1 - u_2)/2] / [L \sin((u_1 - u_2)/2)],$$

$$g_{12}(K) = \sin[K(u_1 - u_2)/2] / [K \sin((u_1 - u_2)/2)].$$

Еще раз отметим, что для удобства дальнейшего анализа точка отсчета фазы φ_{12} в выражениях (24) берется в центре апертуры всей решетки, а в выражениях (27) - в центре апертуры первой подрешетки.

Выражения (27) допускают предельный переход к формулам (24) при $L = N$, т.е. при отсутствии пространственного сглаживания (когда $K=1$ и $\tilde{\rho}_{12} = \rho_{12}$).

Получим теперь выражения для сигнальных собственных чисел КМ (2) в случае трех некоррелированных источников ($I=3$). Для этого необходимо определить корни многочлена (19) третьей степени. Матрица Γ_1 в этом случае имеет вид

$$\Gamma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \nu_1 & 0 & 0 \\ 0 & \nu_2 & 0 \\ 0 & 0 & \nu_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} N & N g_{12} & N g_{13} \\ N g_{21} & N & N g_{23} \\ N g_{31} & N g_{32} & N \end{bmatrix}. \quad (28)$$

Коэффициенты характеристического многочлена этой матрицы

$$q_{11} = - [3 + (\nu_1 + \nu_2 + \nu_3) N],$$

$$q_{12} = 3 + 2(\nu_1 + \nu_2 + \nu_3) N + \nu_1 \nu_2 N^2 (1 - g_{12}^2) + \nu_1 \nu_3 N^2 (1 - g_{13}^2) + \nu_2 \nu_3 N^2 (1 - g_{23}^2), \quad (29)$$

$$q_3 = - \left[1 + (\nu_1 + \nu_2 + \nu_3)N + \nu_1 \nu_2 N^2 (1 - q_{12}^2) + \nu_1 \nu_3 N^2 (1 - q_{13}^2) + \nu_2 \nu_3 N^2 (1 - q_{23}^2) + \nu_1 \nu_2 \nu_3 N^3 (1 + 2q_{12} q_{13} q_{23} - q_{12}^2 - q_{13}^2 - q_{23}^2) \right].$$

Корни многочлена $\psi(\lambda)$ можно, в принципе, получить по известным формулам Кардано. Однако при этом действительные корни будут представляться через комплексные величины, и поэтому использование этих выражений для дальнейшего анализа весьма затруднительно. Воспользуемся приближенным методом решения. При анализе будем рассматривать асимптотический случай, когда угловое разнесение источников мало по сравнению с шириной луча AP. Тогда при не слишком больших значениях мощностей можно считать, что минимальное сигнальное собственное число $\lambda_3 = 1 + \Delta\lambda_3$, где $(\Delta\lambda_3)^3 \ll 1$; $\Delta\lambda_3$ - искомая малая величина. Произведем замену переменных $\lambda = 1 + \Delta\lambda$ в уравнении $\psi(\lambda) = 0$ и вычтем из него "невозмущенное" уравнение, соответствующее случаю полного углового совмещения всех трех источников (при этом $q_{12} = q_{13} = q_{23} = 1$); а корни принимают значения $\lambda_1 = 1 + (\nu_1 + \nu_2 + \nu_3)N$, $\lambda_{2,3} = 1$. В полученном кубическом относительно $\Delta\lambda$ уравнении пренебрежем малой величиной $\Delta\lambda^3$ по сравнению с $\Delta\lambda^2$ и, решая квадратное уравнение, найдем $\Delta\lambda$. В качестве $\Delta\lambda_3$ следует выбрать минимальное из двух решений, так как именно для него выполняется $\Delta\lambda \ll 1$. Затем, исключая из уравнения $\psi(\lambda) = 0$ найденный корень λ_3 , получим квадратное уравнение, корнями которого будут сигнальные собственные числа $\lambda_{1,2}$. В результате для сигнальных собственных чисел КМ в случае трех некоррелированных источников одинаковой мощности ($\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = \nu$) будем иметь следующие асимптотические выражения:

$$\lambda_{1,2} = 1 + \nu N \left\{ 1,25 + (q_{12}^2 + q_{13}^2 + q_{23}^2)/12 + 0,5 [(q_{12}^2 + q_{13}^2 + q_{23}^2)/6 + (q_{12}^2 + q_{13}^2 + q_{23}^2)^2/36 - \frac{1}{12} - \frac{2}{3} q_{12} q_{13} q_{23}]^{1/2} \pm 0,5 [3(q_{12}^2 + q_{13}^2 + q_{23}^2) + 2q_{12} q_{13} q_{23} - 0,5 - (q_{12}^2 + q_{13}^2 + q_{23}^2)^2/6 - (3 + q_{12}^2 + q_{13}^2 + q_{23}^2)(q_{12}^2 + q_{13}^2 + q_{23}^2)/6 + (q_{12}^2 + q_{13}^2 + q_{23}^2)^2/36 - \frac{1}{12} - \frac{2}{3} q_{12} q_{13} q_{23}]^{1/2} \right\}, \quad (20)$$

$$\lambda_3 = 1 + \gamma N \left\{ 0,5 - \frac{g_{12}^2 + g_{13}^2 + g_{23}^2}{6} - \left[\frac{g_{12}^2 + g_{13}^2 + g_{23}^2}{6} + \frac{(g_{12}^2 + g_{13}^2 + g_{23}^2)^2}{36} - \frac{1}{12} - \frac{2}{3} g_{12} g_{13} g_{23} \right]^{1/2} \right\}.$$

Выражения (30) допускают предельный переход к более простому случаю двух источников. Так, при полном угловом совмещении каких-либо двух источников из трех (например, второго и третьего, т.е. при $g_{12} = g_{13}$, $g_{23} = 1$) формулы (30) дают

$$\lambda_{1,2} = 1 + \gamma N \left(1,5 \pm \sqrt{0,25 + 2g_{12}^2} \right), \quad \lambda_3 = 1, \quad (31)$$

что соответствует точным выражениям (25) для случая двух некоррелированных источников с мощностями $\gamma_1 = \gamma$; $\gamma_2 = 2\gamma$.

4. КРИТЕРИЙ ЭФФЕКТИВНОСТИ ОЦЕНИВАНИЯ РАЗМЕРНОСТИ ШУМОВОГО ПОДПОСТРАНСТВА ПРИ ВЫБОРОЧНОМ ФОРМИРОВАНИИ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ МАТРИЦЫ ВХОДНЫХ СИГНАЛОВ

В практических ситуациях при цифровой обработке сигналов КМ оценивается максимально правдоподобно по конечному числу статистически независимых выборок вектора входных сигналов $X(t)$ [18]:

$$\hat{M} = \frac{1}{J} \sum_{l=1}^J X(t_l) X^+(t_l), \quad (32)$$

где \hat{M} - оценка КМ, $X(t_l)$ - выборка вектора X , взятая в l -й момент времени t_l . Будем рассматривать случай одинаковости для всех значений l и достаточно большого числа J обучающих выборок, когда в порядке малости $1/\sqrt{J}$ справедливы следующие соотношения для произвольного числа источников [19]:

$$\langle \delta \lambda \rangle = 0, \quad \sigma_\lambda = \lambda / \sqrt{J}, \quad (33)$$

где $\langle \delta \lambda \rangle$ - среднее смещение между оцененным по конечному числу обучающих выборок и точным (соответствующим случаю $J = \infty$) значением произвольного собственного числа КМ, σ_λ - среднеквадратич-

ное отклонение оценочного значения собственного числа от его точного значения λ .

Согласно (33), в рамках сделанных приближений $\langle \delta \lambda \rangle$ и $\delta \lambda$ не зависят от значений других собственных чисел кроме λ . Поскольку определение ранга шумового проектора D сводится к сравнению оценочных значений собственных чисел с некоторым значением порога [16], [20], то при оптимальном выборе порога, при котором занижению и завышению ранга проектора приписываются одинаковые стоимости [21], отклонение минимального из сигнальных собственных чисел точной КМ от шумового есть монотонно возрастающая функция от вероятности правильного определения ранга проектора. Ограничиваясь при рассмотрении случаем $N \gg I$ (т.е. считая, что количество шумовых собственных чисел достаточно велико и практически остается постоянным при любом I), а также учитывая, что, согласно (33), статистические характеристики флуктуаций оценочных собственных чисел определяются лишь соответствующими точными значениями, получаем, что упомянутая монотонная функция является независимой от количества источников, т.е. будет одинаковой для любого I при фиксированном J . Следовательно, в качестве относительной меры потенциальной эффективности оценивания размерности шумового подпространства можно выбрать величину указанного отклонения между точными значениями минимального сигнального и шумового собственного числа.

5. ВЛИЯНИЕ ЧИСЛА НЕКОРРЕЛИРОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ НА ВОЗМОЖНОСТИ ПРОЕКЦИОННОГО МЕТОДА

Используем выражения (25) и (30) для сравнительного анализа потенциальной эффективности оценивания ранга шумового проектора в случаях двух и трех некоррелированных источников в условиях конечного, но достаточно большого числа обучающих выборок, при котором справедлив сформулированный выше относительный критерий эффективности. При сравнении случаев $I=2$ и $I=3$ будем считать, что в (25), (30) при $I=2$ $\lambda_{1,2} = \lambda_{1,2}^{(2)}$, $u_1 - u_2 = \Delta u^{(2)} > 0$, $\psi = \psi = \psi^{(2)}$, а при $I=3$ $\lambda_{1,2,3} = \lambda_{1,2,3}^{(3)}$, $u_1 - u_2 = u_2 - u_3 = \Delta u^{(3)} > 0$, $\psi = \psi^{(3)}$, где верхний индекс в скобках обозначает истинное число источников и вводится для удобства рассмотрения.

Разлагая значения минимальных сигнальных собственных чисел в ряд по малым параметрам $(N \Delta u^{(2)})^2$, $(N \Delta u^{(3)})^2$ и ограничиваясь вто-

рым порядком малости, получим

$$\lambda_2^{(2)} = 1 + \Delta\lambda_2^{(2)} \approx 1 + \gamma^{(2)} N \left[\frac{(N\Delta\psi^{(2)})^2}{24} - \frac{(N\Delta\psi^{(2)})^4}{1920} \right], \quad (34)$$

$$\lambda_3^{(3)} = 1 + \Delta\lambda_3^{(3)} \approx 1 + \gamma^{(3)} N \left[\frac{(N\Delta\psi^{(3)})^4}{108} \right]. \quad (35)$$

С целью сопоставления возможностей оценивания размерности шумового подпространства при $I=2$ и $I=3$ рассмотрим несколько ситуаций.

Ситуация 1. Пусть $\gamma^{(2)} = \gamma^{(3)}$, $\Delta\psi^{(2)} = \Delta\psi^{(3)} = \Delta\psi$. При этом величина $\Delta\lambda_3^{(3)}$ приблизительно в $4,5(N\Delta\psi)^{-2}$ раз меньше величины $\Delta\lambda_2^{(2)}$. Таким образом, потенциальная эффективность оценивания ранга шумового проектора в случае трех источников более низкая, чем в случае двух.

Ситуация 2. Пусть $\gamma^{(2)} \neq \gamma^{(3)}$, $\Delta\psi^{(2)} = \Delta\psi^{(3)} = \Delta\psi$. Приравнявая $\Delta\lambda_2^{(2)}$ и $\Delta\lambda_3^{(3)}$, получим отношение мощностей источников, необходимое для обеспечения одинаковой потенциальной эффективности оценивания ранга матрицы D в случаях $I=2$ и $I=3$ при равном угловом разнесении $\Delta\psi$:

$$\frac{\gamma^{(3)}}{\gamma^{(2)}} \approx 4,5 (N\Delta\psi)^{-2}. \quad (36)$$

Формулу (36) можно преобразовать к другому виду:

$$\frac{\gamma^{(3)}}{\gamma^{(2)}} \approx 0,1 \left(\frac{\Delta\theta_A}{\Delta\theta} \right)^2, \quad (37)$$

где $\Delta\theta_A$ и $\Delta\theta$ - соответственно ширина луча и разнесение источников по углу. Из (36) и (37) следует, что для обеспечения одинаковой потенциальной эффективности мощность $\gamma^{(3)}$ должна существенно превышать $\gamma^{(2)}$, причем отношение $\gamma^{(3)}/\gamma^{(2)}$ возрастает при взаимном сближении источников по углу.

Ситуация 3. Пусть теперь $\gamma^{(2)} = \gamma^{(3)}$, а $\Delta\psi^{(2)} \neq \Delta\psi^{(3)}$. Приравнявая $\Delta\lambda_2^{(2)}$ и $\Delta\lambda_3^{(3)}$, получим соотношение между величинами углового разнесения, при котором потенциальная эффективность оценивания размерности шумового подпространства будет одинаковой для случаев двух и трех источников:

$$\frac{\Delta \zeta^{(3)}}{\Delta \zeta^{(2)}} \approx \frac{3}{\sqrt{2}} (N \Delta \zeta^{(3)})^{-1} = \sqrt{\frac{3}{\sqrt{2}}} (N \Delta \zeta^{(2)})^{-1}. \quad (38)$$

Таким образом, при $\gamma^{(2)} = \gamma^{(3)}$ одинаковая эффективность достигается, когда угловое разнесение в случае трех близко расположенных источников превышает угловое разнесение в случае двух источников. При взаимном сближении источников по углу этот эффект усиливается.

Анализ рассмотренных ситуаций выявляет различия между нелинейными методами сверхразрешения [10-13, 22-25] и классическим линейным методом сканирования лучом AP. При классическом подходе разрешение двух источников при угловом разнесении $\Delta \zeta$ практически гарантирует и разрешение трех источников той же мощности, разнесенных на угловое расстояние $\Delta \zeta$. При нелинейном подходе такой связи не наблюдается, поскольку с ростом числа источников одинаковая эффективность оценивания ранга шумового проектора D может быть достигнута только при увеличении их мощностей.

6. ВЛИЯНИЕ ВЗАИМНОЙ КОРРЕЛИРОВАННОСТИ ИСТОЧНИКОВ НА ВОЗМОЖНОСТИ ПРОЕКЦИОННОГО МЕТОДА

Для исследования влияния корреляции комплексных амплитуд источников на возможности оценивания их числа в условиях конечного, но большого объема обучающей выборки, будем использовать выражения (24) для случая двух источников с произвольным коэффициентом корреляции, полученные в [2,6], а также выведенные и в разд. 4 настоящей работы.

В случае $|\rho_{12}| \rightarrow 1$, $\lambda_2 \rightarrow 1$ и при $|\rho_{12}| = 1$ КМ имеет единственное не равное единице собственное число

$$\lambda_1 = 1 + (\gamma_1 + \gamma_2) N + 2\sqrt{\gamma_1 \gamma_2} N g_{12} \cos \varphi_{12}. \quad (39)$$

Следовательно, совокупность двух полностью коррелированных источников излучения может быть представлена в виде одного более сложного источника, которому соответствует единственное не равное единице собственное число (39). Этот вывод может быть обобщен на случай произвольного числа I источников. Действительно, в случае $|\rho_{pq}| = 1$,

$\rho, q = \overline{1, I}$ КМ (2) может быть записана следующим образом:

$$M = E_N + FF^+, \quad (40)$$

где $F = \sum_{p=1}^I \sqrt{\gamma_p} F_p \exp(j\varphi_{pI})$. Из вида КМ (40) следует, что $(N-1)$ ее собственных чисел $\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_N$ соответствуют собственным векторам, ортогональным F и равны единице. Невырожденное собственное число, соответствующее собственному вектору F , имеет вид

$$\lambda_1 = 1 + F^+ F = 1 + N \sum_{p=1}^I \sum_{q=1}^I \sqrt{\gamma_p \gamma_q} g_{pq} \cos \varphi_{pq}. \quad (41)$$

Такая асимптотика в поведении собственных чисел отмечается в [2, 3, 25] и означает, что полностью коррелированные источники не могут быть разрешены стандартным проекционным методом в модели распространения "плоский волновой фронт", так как процедура оценивания ранга D даже в случае точной КМ дает неправильный ответ $\text{Rang}\{D\} = N - 1$. Однако частичная корреляция может как уменьшать, так и увеличивать эффективность оценивания размерности шумового подпространства. Покажем это на примере двух источников одинаковой мощности ($\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$). Согласно (24), сигнальные собственные числа в этом случае примут вид:

$$\lambda_{1,2} = 1 + \gamma N \left\{ 1 + g_{12} |p_{12}| \cos \varphi_{12} \pm \sqrt{(1 + g_{12} |p_{12}| \cos \varphi_{12})^2 - (1 - g_{12}^2)(1 - |p_{12}|^2)} \right\}. \quad (42)$$

Будем рассматривать только случай $g_{12} > 0$, т.е. будем считать, что источники находятся в пределах ширины луча АР. Минимальное сигнальное число имеет максимум при $\varphi_{12} = \pi + 2\pi l$ ($l = 0, 1, \dots$) и минимум при $\varphi_{12} = 2\pi l$. То есть

$$\lambda_{2 \max} = \begin{cases} 1 + \gamma N (1 + |p_{12}|)(1 - g_{12}) & \text{при } |p_{12}| \leq g_{12} \\ 1 + \gamma N (1 - |p_{12}|)(1 + g_{12}) & \text{при } |p_{12}| \geq g_{12} \end{cases}, \quad (43)$$

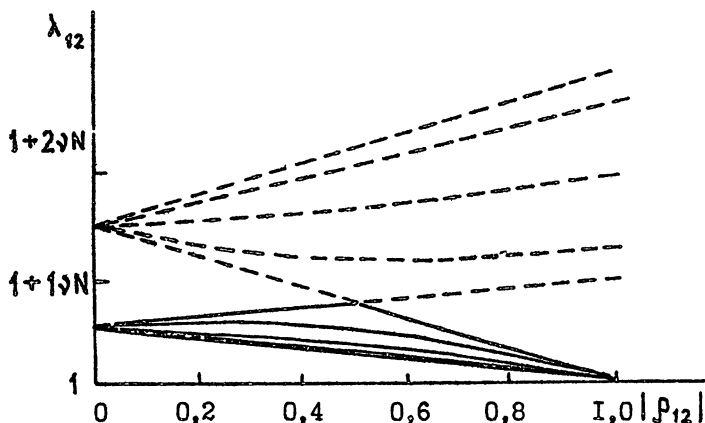
$$\lambda_{2 \min} = 1 + \gamma N (1 - |p_{12}|)(1 - g_{12}).$$

При отсутствии корреляции

$$\lambda_2 = 1 + \nu N (1 - q_{12}). \quad (44)$$

Сравнивая (43) и (44), имеем, что наличие частичной корреляции между источниками при условии $|p_{12}| < 2q_{12} / (1 + q_{12})$ и фиксированных параметрах ν , N , q_{12} может в зависимости от средней разности фаз φ_{12} между колебаниями источников как уменьшать, так и увеличивать минимальное сигнальное собственное число по сравнению со случаем $|p_{12}| = 0$, т.е. потенциальная эффективность оценивания ранга шумового проектора D в случае коррелированных источников может быть как более низкой, так и более высокой, чем для некоррелированных источников. Если же выполняется противоположное условие $|p_{12}| > 2q_{12} / (1 + q_{12})$, то корреляция между источниками всегда приводит к снижению потенциальной эффективности оценивания ранга D по сравнению со случаем $|p_{12}| = 0$. Таким образом, широко известный вывод о том, что корреляция между источниками ухудшает разрешающую способность нелинейных методов сверхразрешения (см. [6,7,26]) справедлив не всегда. Для иллюстрации вышесказанного на рис. I приведены зависимости λ_{12} от $|p_{12}|$ при $N = 10$, $d/\lambda_8 = 0,5$, $\nu_1 = \nu_2 = \nu$, $q_{12} = 0,5$ и различных значениях φ_{12} . Из этого рисунка видно, что при $\varphi_{12} = \pi; 3\pi/4$ λ_2 имеет максимум при $|p_{12}| > 0$, т.е. эффективность оценивания ранга шумового проектора сначала повышается при увеличении $|p_{12}|$, а потом начинает уменьшаться. При $\varphi_{12} = \pi/2, \pi/4$, данная эффективность уменьшается монотонно при увеличении $|p_{12}|$ от 0 до 1.

Отметим интересную особенность собственных чисел (24), заключающуюся в том, что величины q_{12} и $|p_{12}|$ входят в них одинаковым образом, т.е. эти формулы инвариантны к одновременной замене q_{12} и $|p_{12}|$ соответственно на $|p_{12}|$ и q_{12} . Следовательно, с точки зрения потенциальной эффективности оценивания размерности шумового подпространства изменение одной из этих величин приводит к тем же физическим следствиям, что и аналогичное изменение другой. Так, увеличение q_{12} (например, за счет сближения источников по углу) в этом смысле аналогично повышению $|p_{12}|$, что позволяет интерпретировать отрицательное влияние сильной корреляции на оценку ранга матрицы D как соответствующее влияние сближения источников. Инвариантность собственных чисел к замене q_{pq} , $|p_{pq}|$ соответственно



Р и с. I

Сплошные кривые - $\lambda_2(|\rho_{12}|)$. Сверху вниз: $\varphi_{12} = \pi, \frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, 0$;
 Штрих-пунктирные кривые - $\lambda_1(|\rho_{12}|)$. Сверху вниз: $\varphi_{12} = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi$

на $|\rho_{pq}|$, g_{pq} существует и в случае произвольного числа источников, поскольку вид характеристического многочлена (19) и его корней одинаков для матриц Γ_1 и Γ_2 , которые отличаются только перестановкой матриц $A^T A$ и S .

Важной особенностью, которая отличает выражения (24) для собственных чисел коррелированных источников от соответствующих выражений (25) для случая некоррелированных источников, является уже частично рассмотренная выше зависимость $\lambda_{1,2}$ от φ_{12} и от координаты АР на оси, совпадающей с линией апертуры. Действительно, собственные числа (24) являются периодическими функциями фазы коэффициента корреляции φ_{12} , причем положение экстремумов зависит от знака функции g_{12} , а глубина осцилляций - от значений $|g_{12}|$, $|\rho_{12}|$, ϑ_1 , ϑ_2 , N . При $g_{12} > 0$ $\varphi_{12} = 2\pi l$ ($l = 0, 1, \dots$) является точкой максимума λ_1 и минимума λ_2 , а $\varphi_{12} = \pi + 2\pi l$ - точкой максимума λ_2 и минимума λ_1 . При $g_{12} < 0$ точки максимумов и минимумов $\lambda_{1,2}(\varphi_{12})$ меняются местами. Так как смещение решетки на расстояние Δ по оси, совпадающей с линией апертуры, приводит к изменению разности фаз между колебаниями источников на величину

$$\Delta \varphi_{12} = \pm \frac{2\pi}{\lambda_0} \Delta (\sin \theta_1 - \sin \theta_2) \quad (45)$$

(знак зависит от направления смещения), то собственные числа $\lambda_{1,2}$ являются периодическими функциями координаты АР на этой оси. При этом максимальная эффективность оценивания размерности шумового подпространства достигается в максимуме функции $\lambda_2(\varphi_{12})$. Следовательно, с целью повышения указанной эффективности в случае, когда источники являются частично коррелированными, можно производить смещение АР по оси апертуры до достижения значения $\lambda_2(\varphi_{12}) = \max$.

Для случая $\nu_1 = \nu_2 = \nu$ выясним, когда эффективность оценивания ранга матрицы D будет сильно зависеть от средней разности фаз между источниками и от местоположения АР. Глубину осцилляций λ_2 охарактеризуем параметром $\alpha = \lambda_{2\max}(\varphi_{12}) / \lambda_{2\min}(\varphi_{12})$. Этот параметр имеет следующий вид:

$$\alpha = \begin{cases} \frac{1 + \nu N(1 + |p_{12}|)(1 - |q_{12}|)}{1 + \nu N(1 - |p_{12}|)(1 - |q_{12}|)} & \text{при } |q_{12}| \geq |p_{12}| \\ \frac{1 + \nu N(1 - |p_{12}|)(1 + |q_{12}|)}{1 + \nu N(1 - |p_{12}|)(1 - |q_{12}|)} & \text{при } |q_{12}| \leq |p_{12}| \end{cases} \quad (46)$$

Согласно (46), осцилляции будут сильными ($\alpha \gg 1$) при одновременном выполнении условий

$$\begin{aligned} \nu N(1 - |q_{12}|) &\gg 1, \\ \nu N(1 - |p_{12}|) &\gg 1, \\ 0 < 1 - |q_{12}| &\ll 1, \\ 0 < 1 - |p_{12}| &\ll 1. \end{aligned} \quad (47)$$

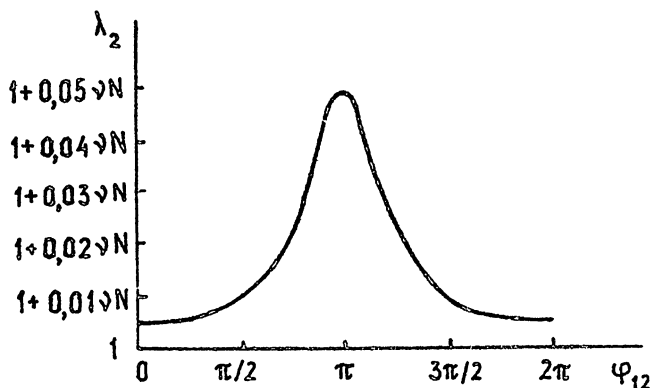
Таким образом, в ситуации достаточно мощных, слабо разнесенных по углу и сильно (но не полностью) коррелированных источников λ_2 испытывает сильные осцилляции по φ_{12} и предложенный способ повышения эффективности оценивания числа источников путем смещения АР будет полезен при разрешении. Так, при $N = 10$, $\nu = 20 \text{ дБ}$, $|p_{12}| = 0,9$, $q_{12} = 0,9$, $\alpha \approx 17,4$, а при снижении мощностей источников до

значения $\vartheta = 10^\circ$ $\alpha = 10^\circ$.

Максимальная абсолютная величина смещения Δ решетки в точку $\lambda_2(\varphi_{12}) = \max$ равна

$$\Delta_{\max} = \frac{\lambda_B}{2 |\sin \theta_1 - \sin \theta_2|}, \quad (48)$$

т.е. она увеличивается при сближении источников по углу или увеличении средней длины волны. Для иллюстрации проведенного рассмотрения на рис. 2 приведена зависимость $\lambda_2(\varphi_{12})$ при $N=10$, $d/\lambda_B=0,5$, $\vartheta_1 = \vartheta_2 = \vartheta$, $|p_{12}| = 0,8$, $q_{12} = 0,972$.

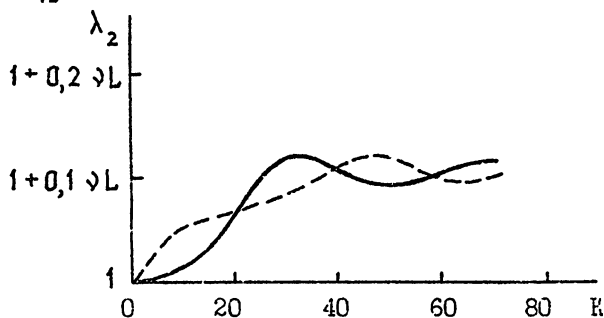


Р и с. 2

7. ВЛИЯНИЕ ПРОЦЕДУРЫ ПРОСТРАНСТВЕННОГО СГЛАЖИВАНИЯ НА ВОЗМОЖНОСТИ ПРОЕКЦИОННОГО МЕТОДА

Анализ эффективности процедур: пространственного сглаживания будем проводить при помощи выражений (27) для собственных чисел сглаженной КМ (8). Нетрудно показать, что при $K \geq 2$ $|\tilde{p}_{12}| < |p_{12}|$ и минимальное сигнальное число сглаженной КМ при $I = 2$ всегда больше единицы. При фиксированном L и увеличении K λ_2 имеет

тенденцию роста за счет умножения коэффициента корреляции ρ_{12} на значения $g_{12}(K)$, соответствующие все более дальним и малым по амплитуде боковым лепесткам. Следовательно, увеличение числа подрешеток при фиксированной размерности подрешетки эквивалентно декорреляции источников и в целом повышает эффективность оценивания ранга шумового проектора D в случае коррелированных источников. Отметим, что данное повышение эффективности, вообще говоря, не является монотонным в силу немонотонности функции g_{12} и λ_2 и о нем можно говорить лишь как о тенденции. Этот факт иллюстрируется на рис. 3, где приведена зависимость $\lambda_2(K)$ при $L=10$, $d/\lambda_0=0,5$, $\psi_1 = \psi_2 = \psi$, $|\rho_{12}|=1$, $g_{12}(L)=0,892$, $\varphi_{12}=0$ (сплошная кривая) и $\varphi_{12}=\pi$ (штрих-пунктирная кривая).



Р и с . 3

Параметры $g_{12}(L)$ и $g_{12}(K)|\rho_{12}|$ входят в выражения (27) эквивалентно, т.е. эти формулы инвариантны к одновременной замене $g_{12}(L)$ и $g_{12}(K)|\rho_{12}|$ соответственно на $g_{12}(K)|\rho_{12}|$ и $g_{12}(L)$. Следовательно, уменьшение $g_{12}(L)$ (например, за счет разнесения источников) эквивалентно увеличению числа подрешеток, или уменьшению $|\rho_{12}|$.

Собственные числа сглаженной КМ при $|\rho_{12}| > 0$ являются периодическими функциями фазы коэффициента корреляции φ_{12} . При $g_{12}(K)g_{12}(L) > 0$ $\varphi_{12} = 2\pi l - (K-1)(\psi_1 - \psi_2)/2$ ($l = 0, 1, \dots$) является точкой максимума λ_1 и минимума λ_2 , а $\varphi_{12} = 2\pi l + \pi - (K-1)(\psi_1 - \psi_2)/2$ - точкой максимума λ_2 и минимума λ_1 . При $g_{12}(K)g_{12}(L) < 0$ точки максимумов и минимумов $\lambda_{12}(\varphi_{12})$ меняются местами. Так как смещение решетки на величину Δ по оси

апертуры приводит к изменению φ_{12} на $\Delta\varphi_{12}$ (45), собственные числа сглаженной КМ являются периодическими функциями Δ . Параметр α , характеризующий глубину осцилляций λ_2 , в случае $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$ имеет вид

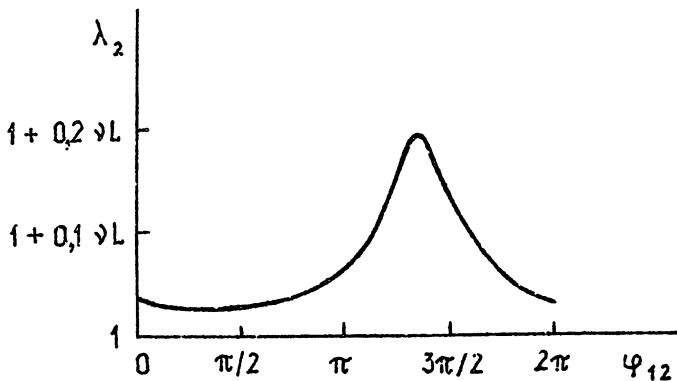
$$\alpha = \begin{cases} \frac{1 + \vartheta L (1 + |g_{12}(K)| |p_{12}|) (1 - |g_{12}(L)|)}{1 + \vartheta L (1 - |g_{12}(K)| |p_{12}|) (1 - |g_{12}(L)|)} & \text{при } |g_{12}(L)| \geq |g_{12}(K)| |p_{12}| \\ \frac{1 + \vartheta L (1 - |g_{12}(K)| |p_{12}|) (1 + |g_{12}(L)|)}{1 + \vartheta L (1 - |g_{12}(K)| |p_{12}|) (1 - |g_{12}(L)|)} & \text{при } |g_{12}(L)| \leq |g_{12}(K)| |p_{12}| \end{cases} \quad (49)$$

Осцилляции минимального сигнального собственного числа будут сильными ($\alpha \gg 1$) при одновременном выполнении следующих условий:

$$\vartheta L (1 - |g_{12}(L)|) \gg 1, \quad \vartheta L (1 - |g_{12}(K)| |p_{12}|) \gg 1, \quad (50)$$

$$0 < 1 - |g_{12}(L)| \ll 1, \quad 0 < 1 - |g_{12}(K)| |p_{12}| \ll 1.$$

Согласно (50), в ситуации достаточно мощных, сильно коррелированных (в том числе и полностью коррелированных), близких по углу источников и при числе подрешеток, по порядку величины не сильно превышающем размерность подрешетки, эффективность оценивания размерности шумового подпространства сильно зависит от значения φ_{12} и может быть существенно повышена за счет смещения ΔP по оси, совпадающей с линией апертуры, в точку максимума $\lambda_2(\varphi_{12})$. Максимальная величина такого смещения по-прежнему описывается формулой (48). В конкретном случае $L=K=10$, $\vartheta=20\text{ dB}$, $g_{12}(L)=g_{12}(K)=0,9$, $|p_{12}|=0,9$, $\alpha=9,1$, а при снижении мощности источника до значения $\vartheta=10\text{ dB}$ $\alpha \approx 6,6$. На рис. 4 приведена зависимость $\lambda_2(\varphi_{12})$ при $L=10$, $K=15$, $d/\lambda_8=0,5$, $\varphi_1=\varphi_2=\varphi$, $|p_{12}|=1$, $g_{12}(L)=0,892$. Из сравнения рис. 2 и рис. 4 видно, что максимум собственного числа сглаженной КМ и максимум собственного числа КМ при отсутствии сглаживания смещены друг относительно друга за счет дополнительного сдвига фаз $(K-1)(\alpha_1 - \alpha_2)/2$.



Р и с. 4

В практических ситуациях при разработке антенных решеток обычно задаются конкретным значением N — числа элементов АР. При этом возникает задача оптимального выбора размерности подрешетки, при которой наименьшее сигнальное собственное число сглаженной КМ \tilde{M} максимально, т.е. пространственное сглаживание наиболее эффективно. Прямой путь отыскания L_{opt} требует нахождения максимума функции $\lambda_1(L)$, что представляется возможным лишь при использовании численных методов. Поэтому определим субоптимальную размерность подрешетки L_{sopt} при $N = const$, $I=2$, $|p_{12}|=1$, когда угловое разнесение между источниками меньше, чем ширина луча АР. Замечая, что величина λ_2 определяется функцией

$$T(L) = \nu_1 \nu_2 L^2 (1 - q_{12}^2(L))(1 - q_{12}^2(K) |p_{12}|^2) \quad (51)$$

под корнем выражения (27), считая, что максимум (51) примерно совпадает с максимумом λ_2 , разлагая $q_{12}(L)$ и $q_{12}(K)$ в ряд с учетом двух первых членов, учитывая (5) и $N = const$, $\nu_1 = const$, $\nu_2 = const$, $|p_{12}|=1$, получим путем дифференцирования (51) по L :

$$L_{sopt} = 0,6(N+1). \quad (52)$$

Следовательно, субоптимальное число подрешеток

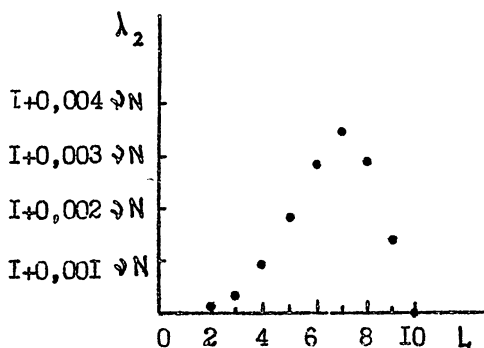
$$K_{s \text{ opt}} = 0,4 (N+1). \quad (53)$$

В табл. I приведены субоптимальные (вычисленные по формуле (52) и затем округленные до целого числа) и оптимальные (полученные на ЭВМ путем нахождения максимума λ_2 по L) значения L при $d/\lambda_8 = 0,5$, $\psi_1 = \psi_2 = \psi$, $|\rho_{12}| = 1$, $q_{12} = 0,972$ и различных N и φ_{12} .

Таблица I

φ_{12}	N = 10		N = 25		N = 50	
	L_{sopt}	L_{opt}	L_{sopt}	L_{opt}	L_{sopt}	L_{opt}
0	7	6	16	16	31	30
$\pi/4$	7	7	16	16	31	31
$\pi/2$	7	7	16	16	31	31
π	7	7	16	17	31	34

Кроме того, характерный рельеф $\lambda_2(L)$ при $N=10$, $\varphi_{1,2}=\pi$ изображен на рис. 5. Из результатов, приведенных в табл. I видно, что



Р и с. 5

величина $L_{s \text{ opt}}$ практически совпадает с L_{opt} , причем, согласно (52), значение $L_{s \text{ opt}}$ вообще не зависит от φ_{12} , а зависимость L_{opt} от φ_{12} является слабой и поэтому разброс L_{opt} при различных значениях φ_{12} весьма незначителен. Наблюдаемое неплохое соответствие между оптимальным и субоптимальным значениями L позволяет рекомендовать формулы (52), (53) для использования при выборе размерности подрешетки в практически важной задаче определения угла места одиночного источника с помощью вертикальной линейной эквидистантной АР, находящейся над какой-либо отражающей поверхностью (например, над поверхностью земли).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе получен ряд новых выражений для собственных чисел корреляционной матрицы входных сигналов линейной, эквидистантной АР. На основе анализа известных ранее и полученных выше выражений, а также на основе введенного в настоящей работе критерия исследованы вопросы влияния количества источников излучения и степени их коррелированности на эффективность первого этапа проекционного метода сверхразрешения – процедуры оценивания числа источников (размерности шумового подпространства) в условиях конечного числа обучающих выборок, используемых при оценке корреляционной матрицы. Показано, что увеличение количества источников снижает эффективность оценивания размерности шумового подпространства, а частичная корреляция комплексных амплитуд источников может в зависимости от их углового разнесения и средней разности фаз между колебаниями источников как увеличивать, так и снижать данную эффективность. Полная коррелированность источников независимо от этих параметров всегда снижает эффективность оценивания их числа практически до нуля. Показано также, что в случае частично коррелированных источников указанная эффективность зависит от средней разности фаз между колебаниями источников и от местоположения АР на оси, совпадающей с линией апертуры. В практически важном случае двух источников предложен способ повышения эффективности оценивания размерности шумового подпространства – смещение АР в точку максимума наименьшего сигнального собственного числа. Найдены условия, когда осцилляции этого собственного числа при изменении разности фаз будут сильными и предложенный способ повышения эффектив-

ности оценивания числа источников – особенно полезным.

Подробно исследована процедура пространственного сглаживания, используемая при разрешении сильно или полностью коррелированных источников. Показано, что ее эффективность зависит от разности фаз между колебаниями источников и поэтому наряду с применением указанной процедуры можно дополнительно повысить эффективность оценивания числа источников смещением АР в точку максимума наименьшего сигнального собственного числа сглаженной корреляционной матрицы. При фиксированной размерности АР для случая двух полностью коррелированных источников найдено значение субоптимальной размерности подрешетки, при котором эффективность оценивания размерности шумового подпространства близка к максимальной.

Отметим, что полученные выражения для собственных чисел корреляционной матрицы могут быть использованы также при анализе работы адаптивных АР.

Авторы выражают благодарность А.И.Кнафелю, О.С.Литвинову и В.И.Турчину за полезные обсуждения вопросов, рассмотренных в данной работе.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Wang H., Kaveh M. Performance of narrowband signal-subspace processing // Proc.ICASSP-86, 1986, v.1. P.589-592.
2. Гершман А.Б., Ермолаев В.Т. Анализ собственных чисел корреляционной матрицы входных колебаний адаптивной антенной решетки и возможности углового сверхразрешения в условиях коррелированных внешних источников излучения // Изв. вузов – Радиофизика.–1988. – Т.31, № 10. – С.1236–1240.
3. Коробко О.В., Таурогинский Б.И. Анализ пространственного спектра поля когерентных источников излучения из алгебраических свойств корреляционной матрицы сигналов антенной решетки // Радиотехника и электроника. - 1987. - Т.32, № 7. - С.1403–1408.
4. Zahn C.L. Application of adaptive arrays to suppress strong jammers in the presence of weak signals // IEEE Trans.–1973. - V.AES-9, N 2. - P.260-271.

5. Литвинов О.С. Расчет и анализ собственных чисел ковариационной матрицы на входах n -элементной адаптивной антенной решетки // Вопросы радиоэлектроники, серия ОТ. 1981, вып. 8. - С.31-38.
6. Кудинов А.В., Тетельбаум И.С. Разрешение коррелированных сигналов адаптивной антенной решеткой // Изв. вузов - Радиоэлектроника.-1987. - Т.30, № 3. - С.24-28.
7. Evans J.E., Johnson J.R., Sun D.F. Application of advanced signal processing techniques to angle of arrival estimation in ATC navigation and surveillance systems - Lincoln Lab., MIT, Tech.Rep.582, June 1982.
8. Shan T.J., Kailath T. New adaptive processing for coherent signals and interference // Proc.ICASSP-84. - 1984. - P.33.5-33.8.
9. Paulraj A., Reddy V.U., Shan T.J., Kailath T. Performance analysis of the MUSIC algorithm with spatial smoothing in the presence of coherent sources // Proc.MILCOM. 1986. - V.3. - P.41.5/1-41.5/5.
10. Shmidt R.O. Multiple emitter location and signal parameter estimation // Proc.RADC Spectral Estimation Workshop, 1979. - P.243-258.
11. Shmidt R.O. Multiple emitter location and signal parameter estimation // IEEE Trans. 1986. - V.AP-34, N 3. - P.276-280.
12. Bienvenue G., Kopp L. Optimality of high resolution array processing using the eigensystem approach // IEEE Trans. - 1983. - V.ASSP-31, N 5. - P.1235-1248.
13. Бьенвеню Ж., Копп Л. - В кн.: Подводная акустика и обработка сигналов. - М.: Мир, 1985. - С.422-428.
14. Jeffries D.J., Farrier D.R. Asymptotic results for eigenvector methods // IEE Proc. - 1985. - V.F-132, N 7. - P.589-594.
15. Kaveh M., Barabell A.J. The statistical performance of the MUSIC and the minimum-norm algorithms in resolving plane waves in noise // IEEE Trans. - 1986. - V.ASSP-34, N 2. - P.331-341.

16. Lee K.S., Herper J.C. A tight threshold for noise eigenvalues in superresolution // Proc. Antennas and Propag. Int. Symp. Digital. - 1986. - V.2. - P.587-590.
17. Ермолаев В.Т. Метод определения и свойства коэффициентов минимального многочлена корреляционной матрицы помехи адаптивной антенной решетки // Изв. вузов - Радиофизика. - 1987. - Т.30, № 3. - С.447-448.
18. Ширман Я.Д., Манжос В.Н. Теория и техника обработки радиолокационной информации на фоне помех. - М.: Радио и связь, 1981.
19. Караваев В.В., Сазонов В.В. Статистическая теория пассивной локации. - М.: Радио и связь, 1987.
20. Кнафель А.И. Метод собственных значений и векторов для определения спектральных линий поглощения и излучения // Препринт № 238, Горький: НИРФИ, 1987. - II с.
21. Wax M., Kailath T. Detection of signals by information theoretic criteria // IEEE Trans. - 1985. - V. ASSP-33, N 2. - P.387-392.
22. Nickel U. Angular superresolution with phased array radar: a review of algorithms and operational constraints. // IEE Proc. - 1987. - V. F-134, N 1. - P.53-59.
23. Бахрах Л.Д., Литвинов О.С. Место апертурного синтеза в общей теории антенн // Изв. вузов - Радиофизика. - 1983. - Т.26, № II. - С.1323-1334.
24. Джонсон Д.Х. Применение методов спектрального оценивания к задачам определения угловых координат источников излучения // ТИИЭР. - 1982. - Т.70, № 9. - С.126-139.
25. Гейбриэл У.Ф. Спектральный анализ и методы сверхразрешения с использованием адаптивных решеток // ТИИЭР. - 1980. - Т.68, № 6. - С.19-32.
26. Zolotowski M., Haber F. A vector space approach to direction finding in a coherent multipath environment // IEEE Trans. - 1986. - V. AP-34, N 9. - P.1069-1079.

Дата поступления статьи
28 декабря 1988 г.

Алексей Борисович Гершман
Виктор Тимофеевич Ермолаев

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЕКЦИОННОГО МЕТОДА УГЛОВОГО РАЗРЕШЕНИЯ
НА ОСНОВЕ АНАЛИЗА СОБСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ МАТРИЦЫ

Подписано в печать 21.03.89 г. МЦ 00655. Формат 60 x 84/16
Бумага писчая. Печать офсетная. Объем 1,78 усл. п. л.
Заказ 4828. Тираж 120. Бесплатно

Отпечатано на ротационте НИРФИ