Министерство высшего и среднего специального образования
Р С Ф С Р

Горьковский ордена Трудового Красного Знамени
научно-исследовательский радиофизический институт (НИРФИ)

Препринт № 274

ВОЗБУЖДЕНИЕ СЕЙСМОАКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН ИМПУЛЬСНЫМИ ПОВЕРХНОСТНЫМИ ИСТОЧНИКАМИ

А.В. Разин

Горький 1989

Разин А. В.

ВОЗБУЖДЕНИЕ СЕЙСМОАКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН ИМПУЛЬСНЫМИ ПОВЕРХНОСТНЫМИ ИСТОЧНИКАМИ.//Препринт № 274. - Горький: НИРФИ, 1989 г. - 69 с.

УДК 534.232

Рассмотрены поля звуковых и упругих волн, возбуждаемых при воздействии на границу раздела однородный газ - однородное твердое тело нормальной точечной силовой нагрузки и при излучении сферического звукового импульса точечным источником, находящимся на границе, а также поля переходного тормозного излучения сейсмоакустических волн, возникающего при равномерном дозвуковом движении в газе по нормали к границе раздела и последующей остановке и выключении в момент касания поверхности твердого тела точечного изотропного источника массы постоянной производительности. Двойные интегралы Фурье, описывающие нестационарные волновые поля, сведены к однократному интегралу по замкнутому контуру. Подробно проанализированы формы сигналов в окрестностях фронтов сферических акустической и упругих волн, а также боковых волн в газе и конической волны в твердом теле. На проходящей через источник нормали к границе раздела сред получены точные аналитические выражения для полей акустических и упругих волн.

ВВЕДЕНИЕ

Глубинное сейсмическое зондирование является в настоящее время перспективным методом исследования земных недр и поиска полезных ископаемых. Для формирования у зондирующего сейсмосигнала требуемых характеристик направленности, длительности и формы необходимо исследование процессов генерации и распространения упругих волн. В большинстве практических задач сейсморазведки можно считать Землю плоской и моделировать ее полупространством.

Теории возбуждения упругих волн в твердом полупространстве поверхностными и заглубленными источниками различных типов посвящено значительное количество статей и монографий. При этом, начиная с классической работы Лэмба /I/, обычно рассматривался случай, когда упругая среда граничит с вакуумом. Между тем, при воздействии на поверхность Земли мощным вибратором, при использовании взрывных источников сейсмических волн, при различных сильных ударах по земной поверхности необходимо принимать во внимание атмосферу и волны в ней. Волновые процессы в атмосфере, связанные с сейсмическими явлениями, дают вклад в формирование направленности и энергетических характеристик излучения, определяют длительность и форму сейсмоакустических импульсов (сейсмоакустический каплинг).

Таким образом, актуальной является задача моделирования волновых процессов, происходящих при работе находящихся вблизи земной поверхности источников сейсмоакустического излучения.

Целью настоящей работы является получение, представление в наиболее удобном для аналитического и численного анализа виде и подробное исследование выражений для функций Грина следующих трех задач.

Задача I. Генерация сейсмоакустических волн источником силы, действующей нормально к границе раздела однородный газ – однородное изотропное твердое тело.

Задача II. Генерация сейсмоакустических волн изотропным звуковым источником, находящимся в однородном газе вблизи поверхности однородного упругого полупространства.

Задача III. Переходное излучение сейсмоакустических волн точечным изотропным источником массы, равномерно движущимся в газе по нормали к границе раздела однородных газообразного и упругого полупространств и исчезающим в момент касания поверхности твердого тела.

Рассмотрение этих задач позволяет восполнить ряд пробелов в теории возбуждения упругих волн в полупространстве и преломления звуковых импульсов на границе раздела газ – твердое тело и, в особенности, в теории переходного излучения упругих и поверхностных акустических волн.

2.I. Постановка задачи I и интегральные выражения для потенциалов

Пусть плоскость $z = 0$ цилиндрической системы координат r, φ, z совпадает с границей раздела однородного газа с плотностью ρ_1 и скоростью звука c_1, заполняющего полупространство $z < 0$, и однородного изотропного твердого тела, занимающего полупространство $z > 0$ и характеризуемого плотностью ρ_2 и скоростями продольной и поперечной волн соответственно c_l и c_t. На границе твердого тела действует цилиндрически симметричный импульсный источник вертикальной силы, т.е. при $z = 0$ выполняются следующие граничные условия для вектора смещений $\vec{u}$ и тензора напряжений σ_{ik} (индекс " I " соответствует газу, " 2 " – твердому телу):

$$u_{z1} = u_{z2}, \quad \sigma_{rz2} = 0, \quad \sigma_{zz1} - \sigma_{zz2} = F \frac{\lambda}{2\pi(\lambda^2 + r^2)^{3/2}} \delta(t) \qquad (I)$$

выражающие соответственно равенство нормальных к границе смещений в обеих средах, отсутствие касательных напряжений на поверхности твердого тела и равенство разности вертикальных компонент напряжений в газе и в твердом теле при $z = 0$ давлению, создаваемому источником. В (I) t - время, $\delta(t)$ - дельта-функция Дирака, F определяет величину силового воздействия, а λ - характерный размер источника. Введение распределенного источника необходимо для использования развитых в работе /2/ методов контурного интегрирования. Результаты для точечного источника могут быть получены предельным переходом $\lambda \to 0$ в окончательных выражениях для волновых полей.

Будем рассматривать случай, когда плотность газа значительно меньше плотности твердого тела, $\varepsilon = \rho_1 / \rho_2 << 1$, и скорость звука в газе c_1 меньше скорости рэлеевской волны c_R на границе твердое тело - вакуум.

В газе введем потенциал смещений ψ_1, а в твердом теле - скалярный ψ_2 и векторный $\vec{A} = A\vec{i}_\varphi$ ($\vec{i}_\varphi$ - орт оси φ) потенциалы так, что смещения частиц $\vec{u}_1$ и давление p в акустической волне и смещения $\vec{u}_2$ в упругих волнах даются соответственно выражениями:

$$\vec{u}_1 = \operatorname{grad}\psi_1, \qquad p = -\rho_1 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2}, \tag{2}$$

$$\vec{u}_2 = \operatorname{grad}\psi_2 + \operatorname{rot}\vec{A}, \qquad \operatorname{div}\vec{A} = 0. \tag{3}$$

Для потенциалов смещений справедливы волновые уравнения, решения которых совместно с граничными условиями (I) представляются в следующем интегральном виде:

$$\psi_1 = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_0^{\infty} R_{s1}(\omega,k)\, e^{-i\omega t - i\varkappa_1 z - \lambda k} J_0(kr)\, k\, dk, \tag{4}$$

$$\psi_2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega \int\limits_0^{\infty} T_{l1}(\omega,\kappa) e^{-i\omega t + i\varkappa_l z - \lambda\kappa} J_0(\kappa r)\kappa d\kappa, \tag{5}$$

$$A = \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega \int\limits_0^{\infty} T_{t1}(\omega,\kappa) e^{-i\omega t + i\varkappa_t z - \lambda\kappa} J_1(\kappa r)\kappa d\kappa . \tag{6}$$

В выражениях (4)-(6) ω - циклическая частота, κ - горизонтальное волновое число,

$$R_{s1} = -\frac{F\kappa_t^2 \varkappa_l}{4\pi^2 \varkappa_1 \rho_2 c_t^2 S(\omega,\kappa)},$$

$$T_{l1} = \frac{F(\kappa_t^2 - 2\kappa^2)}{4\pi^2 \rho_2 c_t^2 S(\omega,\kappa)}, \qquad T_{t1} = \frac{Fi\kappa\varkappa_l}{2\pi^2 \rho_2 c_t^2 S(\omega,\kappa)},$$

$$S(\omega,\kappa) = R_0(\omega,\kappa) + \varepsilon\kappa_t^4 \varkappa_l / \varkappa_1 ,$$

$$R_0(\omega,\kappa) = (\kappa_t^2 - 2\kappa^2)^2 + 4\kappa^2 \varkappa_l \varkappa_t , \qquad \varkappa_{1,l,t} = \sqrt{\kappa_{1,l,t}^2 - \kappa^2},$$

$\kappa_{1,l,t} = \omega / c_{1,l,t}$ - волновые числа акустической волны в газе и продольной и поперечной волн в твердом теле, J_0 и J_1 - функции Бесселя соответственно нулевого и первого порядков. Из условия отсутствия возмущений в средах при $t < 0$ следует, что контур интегрирования по ω в (4)-(6) должен проходить выше особых точек подынтегральных выражений, т.е. в области $\mathrm{Im}\,\omega > 0$. Для сходимости интегралов (4)-(6) при $|z| \to \infty$ необходимо считать , что

$$\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2_{1,l,t}} - k^2} = i\left|\sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c_{1,l,t}}}\right| \quad \text{при} \quad k > \frac{|\omega|}{c_{1,l,t}} .$$

2.2. Исследование акустического поля в газе

Рассмотрим вначале акустический сигнал, генерируемый импульсным силовым источником, действующим на границу раздела газ - твердое тело. В интеграле Фурье (4) сделаем замену $\omega = c_1 k x$, а затем $x = (1 - \theta^2)^{-1/2}/2/$, что приводит к следующему выражению для потенциала смещений:

$$\varphi_1 = -\frac{i F n_t^3}{4\pi^2 \rho_2 c_t R} \oint\limits_{L_g} \frac{\sqrt{\theta^2 - \alpha_l^2}\,\theta\, d\theta}{S_1(\theta)\, E_1(\theta)} , \tag{7}$$

где $R^2 = r^2 + z^2$ - расстояние от источника до точки наблюдения,

$$S_1(\theta) = \theta R_1(\theta) + \varepsilon n_t^4 \sqrt{\theta^2 - \alpha_l^2} ,$$

$$R_1(\theta) = (2\theta^2 - 2 + n_t^2)^2 + 4(1-\theta^2)\sqrt{\theta^2 - \alpha_l^2}\sqrt{\theta^2 - \alpha_t^2} ,$$

$$\alpha^2_{l,t} = 1 - n^2_{l,t}, \quad n_{l,t} = c_1/c_{l,t}, \quad \lim_{\theta \to \infty} \sqrt{\theta^2 - \alpha^2_{l,t}} = \theta,$$

$$E_1(\theta) = \left[(\theta - q_1^{(1)})(\theta - q_2^{(1)}) - 2\frac{i\lambda}{R^2}\sqrt{1-\theta^2}\,(c_1 t - |z|\theta)\right]^{1/2},$$

$$q^{(1)}_{1,2}=\frac{1}{R^2}\left(c_1t|z|\pm r\sqrt{R^2-c_1^2t^2}\right),$$

$$\lim_{\theta\to\infty}\sqrt{1-\theta^2}=-i\theta, \qquad \lim_{\substack{\theta\to\infty\\ \lambda\to 0}} E_1(\theta)=\theta.$$

Контур интегрирования L_θ изображен на рис.I.

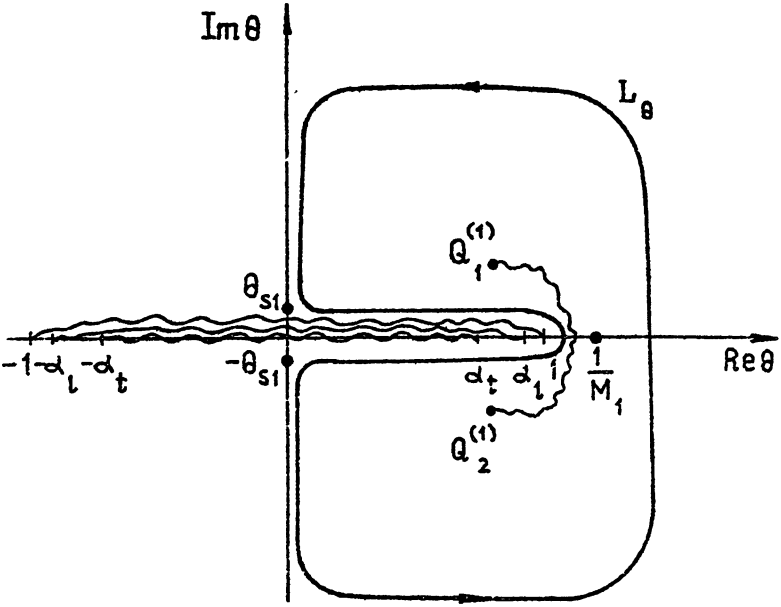


РИС. 1 Контур интегрирования L_θ и особые точки подынтегральных выражений (7), (42), (86). Разрезы показаны волнисты ми линиями. Полюс $\theta = 1/M_1$ относится к решению задачи Ш.

Особыми точками подынтегрального выражения в (7) внутри контура L_θ являются возникающие при $|z|<c_1t$ точки ветвления аналитической функции $E_1(\theta)$ /2/:

$$Q^{(1)}_{1,2} = q^{(1)}_1 \pm i \frac{\lambda \sin^2(\delta-\delta_1)}{R \sin \delta_1},$$

где $\delta = \arccos \frac{|z|}{R}$, $\delta_1 = \arccos \frac{c_1 t}{R}$. Точки ветвления $\theta = \pm\alpha_l$, $\theta = \pm\alpha_t$, $\theta = \pm 1$ аналитических функций $\sqrt{\theta^2-\alpha^2_{l,t}}$, $\sqrt{1-\theta^2}$ и определяемые из уравнения $S_1(\theta) = 0$ полюса $\theta_{S1} = \pm i\sqrt{c_1^2/c_s^2-1}$ (c_s - скорость поверхностной волны Стонели) лежат вне контура L_0.

При вычислении интеграла (7) следует рассмотреть случаи $R > c_1 t$ и $R < c_1 t$ и учесть три возможные ситуации:

1) $\mathrm{Re}\, Q^{(1)}_1 > \alpha_l$,

2) $\alpha_t < \mathrm{Re}\, Q^{(1)}_1 < \alpha_l$,

3) $\mathrm{Re}\, Q^{(1)}_1 < \alpha_t$.

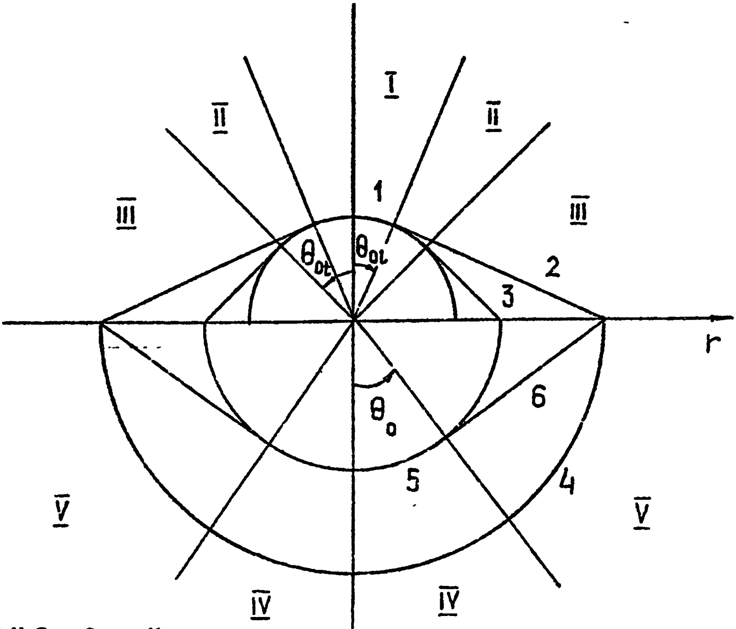
Условия $\mathrm{Re}\, Q^{(1)}_1 = \alpha_l$ и $\mathrm{Re}\, Q^{(1)}_1 = \alpha_t$ можно переписать соответственно в виде:

$$t = t_{Бl} = \frac{r}{c_l} + \frac{|z|}{c_1}\sqrt{1-\frac{c_1^2}{c_l^2}},$$

$$t = t_{Бt} = \frac{r}{c_t} + \frac{|z|}{c_1}\sqrt{1-\frac{c_1^2}{c_t^2}},$$

где $t_{Бl}$ и $t_{Бt}$ есть времена прихода в точку с координатами (r, z) боковых волн, связанных с продольными и поперечными волнами в твердом теле. Эти боковые волны существуют соответственно в областях

$\delta > \theta_{0l}$ и $\delta > \theta_{0t}$, где $\theta_{0l} = \arcsin n_l$, $\theta_{0t} = \arcsin n_t$ - углы полного внутреннего отражения (рис.2)



Р И С . 2 Картина волновых фронтов акустической и упругих волн:
1 - фронт сферической звуковой волны,
2 - фронт боковой волны, связанной с продольной волной в твердом теле,
3 - фронт боковой волны, связанной с поперечной волной в твердом теле,
4 - фронт продольной упругой волны,
5 - фронт сферической поперечной волны,
6 - фронт конической волны.

Анализ, аналогичный проведенному в /2/, показывает, что в области I, т.е. при $\delta < \theta_{0l}$, потенциал смещений в газе для случая точечного силового воздействия на поверхность упругого полупространства дается выражением:

$$\psi_1^{I} = -\frac{iFn_t^3 H(t-R/c_1)}{4\pi^2 \rho_2 c_t R} \oint\limits_{L_\theta} \frac{\sqrt{\theta^2-\alpha_l^2}\,\theta d\theta}{S_1(\theta)\,\varepsilon_1(\theta)}, \qquad (8)$$

где

$$H\left(t-\frac{R}{c_1}\right)=\begin{cases}1, & t>R/c_1\\ 0, & t<R/c_1\end{cases}$$ – ступенчатая функция Хевисайда и

$$\varepsilon_1(\theta)=\sqrt{(\theta-q_1^{(1)})(\theta-q_2^{(1)})}\,.$$

Контур интегрирования L_θ в (8) может быть стянут к берегам разреза, проведенного между точками ветвления $\theta=q_1^{(1)}$ и $\theta=q_2^{(1)}$ функции $\varepsilon_1(\theta)$ (контур $L(q_1^{(1)},\ q_2^{(1)})$).

Аналитически интеграл (8) можно оценить вблизи фронта сферической акустической волны, когда $R\lesssim c_1 t$, так что $c_1 t|z|\gg |r\sqrt{R^2-c_1^2t^2}|$. При этом условии потенциал φ_1 пропорционален вычету в полюсе $\theta=|z|/R$:

$$\varphi_1^{I}\approx\frac{F\,n_t^3|z|\sqrt{z^2/R^2-\alpha_l^2}\;H(t-R/c_1)}{2\pi\rho_2 c_t R^2 S_1(|z|/R)}\,. \qquad (9)$$

На вертикали над источником, т. е. при $r=0$, интеграл в(8) вычисляется точно, поскольку в этом случае $\varepsilon_1(\theta)=\theta-c_1t/|z|$:

$$\varphi_1^{I}\Big|_{r=0}=\frac{F\,n_t^4\,t\sqrt{c_1^2t^2-z^2\alpha_l^2}}{2\pi\rho_2|z|^3 S_1(c_1t/|z|)}\,H\left(t-\frac{z}{c_1}\right). \qquad (10)$$

Из (10) можно по формуле (2) получить точное аналитическое выражение для звукового давления.

Во временном интервале $t_{\text{Б}l}<t<R/c_1$ в области II ($\theta_{0l}<$

$< \delta < \theta_{0t}$) потенциал смещений описывает боковую волну, связанную с продольной волной в твердом теле:

$$\psi^{II}_{бl} = \frac{F n_t^3 H(R - c_1 t) H(\alpha_l - q_1^{(1)})}{\pi^2 \rho_2 c_t R} \int\limits_{\alpha_l}^{q_1^{(1)}} \frac{\sqrt{\alpha_l^2 - \theta^2}(2\theta^2 - 2 + n_t^2)^2 \theta^2}{G_1(\theta)\, \varepsilon_1(\theta)} \times$$

$$\times \left[\tilde{W}_1(\theta) - 8 \varepsilon n_t^4 H\left(\frac{|z|}{R} - \alpha_t\right)(\alpha_l^2 - \theta^2)(1 - \theta^2)\theta \sqrt{\theta^2 - \alpha_t^2} \right] d\theta. \quad (II)$$

В (II) введены обозначения:

$$G_1(\theta) = \tilde{W}_1^2(\theta) - 64 \varepsilon^2 n_t^8 \theta^2 (1 - \theta^2)^2 (\theta^2 - \alpha_l^2)^2 (\theta^2 - \alpha_t^2),$$

$$\tilde{W}_1(\theta) = \theta^2 W_1(\theta) - \varepsilon^2 n_t^8 (\theta^2 - \alpha_l^2),$$

$$W_1(\theta) = (2\theta^2 - 2 + n_t^2)^4 - 16(1 - \theta^2)^2 (\theta^2 - \alpha_l^2)(\theta^2 - \alpha_t^2).$$

При $t > R/c_1$ потенциал описывает сферическую акустичес - кую волну и дается выражением:

$$\psi^{II}_{1сф} = \frac{i F \varepsilon n_t^7 H(t - R/c_1)}{4\pi^2 \rho_2 c_t R} \oint\limits_{L(q_1^{(1)}, q_2^{(1)})} G_1^{-1}(\theta)\, \varepsilon_1^{-1}(\theta) \times$$

$$\times\left[\widetilde{W}_1(\theta)+32\theta^2(1-\theta^2)^2(\theta^2-\alpha_l^2)(\theta^2-\alpha_t^2)\right](\theta^2-\alpha_l^2)\theta\, d\theta +$$

$$+\frac{iFn_t^3 H\left(t-\frac{R}{c_1}\right)H\left(\frac{|z|}{R}-\alpha_t\right)}{\pi^2\rho_2 c_t R}\oint\limits_{L(q_1^{(1)},q_2^{(1)})} G_1^{-1}(\theta)\varepsilon_1^{-1}(\theta)\times$$

$$\times\left[\widetilde{W}_1(\theta)+2\varepsilon^2 n_t^8(\theta^2-\alpha_l^2)\right](\theta^2-\alpha_l^2)(1-\theta^2)\theta^2\sqrt{\theta^2-\alpha_t^2}\, d\theta +$$

$$+\frac{Fn_t^3 H\left(t-\frac{R}{c_1}\right)H(\alpha_l-\mathrm{Re}\, q_1^{(1)})}{2\pi^2\rho_2 c_t R}\int\limits_{\alpha_l}^{q_1^{(1)}} G_1^{-1}(\theta)\varepsilon_1^{-1}(\theta)\sqrt{\alpha_l^2-\theta^2}\,\times$$

$$\times(2\theta^2-2+n_t^2)^2\theta^2\left[\widetilde{W}_1(\theta)-8\varepsilon n_t^4 H\left(\frac{|z|}{R}-\alpha_t\right)(\alpha_l^2-\theta^2)(1-\theta^2)\theta\,\times\right. \qquad (12)$$

$$\left.\times\sqrt{\theta^2-\alpha_t^2}\right]d\theta + \text{к.с.}$$

Вблизи фронта сферической волны, когда $R \approx c_1 t$, потенциал принимает вид:

$$\psi_1^{II}\Big|_{R\approx c_1 t} \approx \frac{Fn_t^3|z|H(t-R/c_1)}{2\pi\rho_2 c_t R^2 G_1(|z|/R)}\Big\{\varepsilon n_t^4\Big[\widetilde{W}_1(|z|/R)+$$

$$+32(r^4 z^2/R^6)(z^2/R^2-\alpha_l^2)(z^2/R^2-\alpha_t^2)\Big](\alpha_l^2-z^2/R^2)+$$

$$+4(r^2|z|/R^3)H(|z|/R-\alpha_t)\left[\widetilde{W}_1(|z|/R)+2\varepsilon^2 n_t^8(z^2/R^2-\alpha_l^2)\right]\times$$

$$\times\left(\alpha_l^2-\frac{z^2}{R^2}\right)\sqrt{\frac{z^2}{R^2}-\alpha_t^2}\,\Bigg\}+\frac{F n_t^3 z^2\sqrt{\alpha_l^2-\frac{z^2}{R^2}}\left(n_t^2-\frac{2r^2}{R^2}\right)^2 H\left(\alpha_l-\frac{|z|}{R}\right)}{\pi^2\rho_2 c_t R^3 G_1(|z|/R)}\times$$

$$\times\left[\widetilde{W}_1\left(\frac{|z|}{R}\right)+8\varepsilon n_t^4 H\left(\frac{|z|}{R}-\alpha_t\right)\frac{r^2|z|}{R^3}\left(\frac{z^2}{R^2}-\alpha_l^2\right)\times\right.$$

$$\left.\times\sqrt{\frac{z^2}{R^2}-\alpha_t^2}\right]\ln\left|\frac{r}{R}\sqrt{1-\frac{c_1^2t^2}{R^2}}\right|. \qquad (13)$$

Нетрудно также вычислить асимптотику потенциала вблизи фронта боковой волны. Из (II) следует, что при $t \gtrsim t_{Бl}$

$$\varphi_{Бl}^{II} \approx \frac{F n_t^3(q_1^{(1)}-\alpha_l)\sqrt{\alpha_l}\,H(R-c_1t)\,H(\alpha_l-q_1^{(1)})}{2\pi\rho_2 c_t R\left(n_t^2-2n_l^2\right)^2\sqrt{\frac{r}{R}\sqrt{1-c_1^2t^2/R^2}}}. \qquad (14)$$

Перейдем к рассмотрению потенциала смещений в области III, где $\delta > \theta_{0t}$. В этой области существуют две боковые волны, одна из которых связана с продольной, а другая – с поперечной волнами в твердом теле. Во временном интервале $t_{Бl} < t < t_{Бt}$ волновое число определяется боковой волной, соответствующей продольной волне в упругом полупространстве, и описывается формулой:

$$\varphi^{\text{III}}_{\text{Б}l} = \frac{F n_t^3 H(q_1^{(1)} - \alpha_t) H(\alpha_l - q_1^{(1)})}{\pi^2 \rho_2 c_t R} \int\limits_{\alpha_l}^{q_1^{(1)}} \frac{\sqrt{\alpha_l^2 - \theta^2}\,(2\theta^2 - 2 + n_t^2)^2 \theta^2}{G_1(\theta)\,\varepsilon_1(\theta)} \times$$

$$\times \left[\tilde{W}_1(\theta) - 8\varepsilon n_t^4 H(q_1^{(1)} - \alpha_t)(\alpha_l^2 - \theta^2)(1 - \theta^2)\theta \sqrt{\theta^2 - \alpha_t^2} \right] d\theta \, ; \tag{I5}$$

Асимптотика потенциала смещений в области III при $t \gtrsim t_{\text{Б}l}$ описывается формулой, аналогичной (I4).

Если $t > t_{\text{Б}t}$, так что $\alpha_t > q_1^{(1)}$, то поле боковых волн при $\delta > \theta_{0t}$ дается выражением:

$$\varphi^{\text{III}}_{\text{Б}(l+t)} = \frac{F n_t^3 H(R - c_1 t) H(\alpha_t - q_1^{(1)})}{\pi^2 \rho_2 c_t R} \int\limits_{\alpha_l}^{q_1^{(1)}} \frac{\tilde{W}_1(\theta)(2\theta^2 - 2 + n_t^2)^2 \theta^2 \sqrt{\alpha_l^2 - \theta^2}\, d\theta}{G_1(\theta)\,\varepsilon_1(\theta)} -$$

$$- \frac{4 F n_t^3 H(R - c_1 t) H(\alpha_t - q_1^{(1)})}{\pi^2 \rho_2 c_t R} \int\limits_{\alpha_t}^{q_1^{(1)}} \frac{\left[\tilde{W}_1(\theta) + 2\varepsilon^2 n_t^8 (\theta^2 - \alpha_l^2)\right](\theta^2 - \alpha_l^2)}{G_1(\theta)\,\varepsilon_1(\theta)} (1 - \theta^2)\theta^2 \sqrt{\alpha_t^2 - \theta^2}\, d\theta -$$

$$- \frac{8 F \varepsilon n_t^7 H(R - c_1 t) H(\alpha_t - q_1^{(1)})}{\pi^2 \rho_2 c_t R} \int\limits_{\alpha_l}^{\alpha_t} \frac{(2\theta^2 - 2 + n_t^2)^2 (1 - \theta^2)\theta^3}{G_1(\theta)\,\varepsilon_1(\theta)} \times$$

$$\times (\alpha_l^2 - \theta^2)^{3/2} \sqrt{\theta^2 - \alpha_t^2}\, d\theta . \tag{I6}$$

Выражение для потенциала сферической звуковой волны в области III имеет вид:

$$\varphi^{\text{III}}_{1\text{сф}} = \frac{i F \varepsilon n_t^7 H(t - R/c_1)}{4\pi^2 \rho_2 c_t R} \oint\limits_{L(q_1^{(1)}, q_2^{(1)})} \frac{(\theta^2 - \alpha_l^2)\,\theta}{G_1(\theta)\,\varepsilon_1(\theta)} \times$$

$$\times\Big[\widetilde{W}_1(\theta)+32\theta^2(1-\theta^2)^2(\theta^2-\alpha_l^2)(\theta^2-\alpha_t^2)+8H(\alpha_t-\operatorname{Re}q_1^{(1)})\times$$

$$\times(2\theta^2-2+n_t^2)^2(1-\theta^2)\theta^2\sqrt{\alpha_l^2-\theta^2}\sqrt{\alpha_t^2-\theta^2}\Big]d\theta+$$

$$+\frac{Fn_t^3H(t-R/c_1)H(\alpha_t-\operatorname{Re}q_1^{(1)})}{2\pi^2\rho_2c_tR}\Bigg[\int\limits_{\alpha_l}^{q_1^{(1)}}\frac{\widetilde{W}_1(\theta)(2\theta^2-2+n_t^2)^2\theta^2\sqrt{\alpha_l^2-\theta^2}}{G_1(\theta)\,\varepsilon_1(\theta)}\,d\theta-$$

$$-4\int\limits_{\alpha_t}^{q_1^{(1)}}\frac{\widetilde{W}_1(\theta)+2\varepsilon^2n_t^8(\theta^2-\alpha_l^2)}{G_1(\theta)\,\varepsilon_1(\theta)}(\theta^2-\alpha_l^2)(1-\theta^2)\theta^2\sqrt{\alpha_t^2-\theta^2}\,d\theta+\text{к.с.}\Bigg]+$$

$$+\frac{8F\varepsilon n_t^7H(t-R/c_1)H(\alpha_t-\operatorname{Re}q_1^{(1)})}{\pi^2\rho_2c_tR}\int\limits_{\alpha_l}^{\alpha_t}\frac{(2\theta^2-2+n_t^2)^2}{G_1(\theta)\,\varepsilon_1(\theta)}\times$$

$$\times(1-\theta^2)(\theta^2-\alpha_l^2)\theta^3\sqrt{\theta^2-\alpha_t^2}\sqrt{\alpha_l^2-\theta^2}\,d\theta. \tag{I7}$$

Приведем также выражение для потенциала смещений в области III при $R\approx c_1t$:

$$\varphi_1^{\text{III}}\Big|_{R\approx c_1t}\approx\frac{F\varepsilon n_t^7|z|(\alpha_l^2-z^2/R^2)H(t-R/c_1)}{2\pi\rho_2c_tR^2G_1(|z|/R)}\times$$

$$\times\Big[\widetilde{W}_1(|z|/R)+32(r^4z^2/R^6)(z^2/R^2-\alpha_l^2)(z^2/R^2-\alpha_t^2)+$$

$$+8H(\alpha_t-|z|/R)(n_t^2-2r^2/R^2)^2(r^2z^2/R^4)\sqrt{\alpha_l^2-z^2/R^2}\sqrt{\alpha_t^2-z^2/R^2}\Bigg]+$$

$$+\frac{Fn_t^3z^2H(\alpha_t-|z|/R)}{\pi^2\rho_2 c_t R^3 G_1(|z|/R)}\Bigg\{\Bigg[\tilde{W}_1(|z|/R)(n_t^2-2r^2/R^2)^2\sqrt{\alpha_l^2-z^2/R^2}-$$

$$-4\left[\tilde{W}_1(|z|/R)+2\varepsilon^2n_t^8(z^2/R^2-\alpha_l^2)\right](z^2/R^2-\alpha_l^2)(r/R)^2\times$$

$$\times\sqrt{\alpha_t^2-\frac{z^2}{R^2}}\Bigg]\Bigg\}\ln\left|\frac{r}{R}\sqrt{1-\frac{c_1^2t^2}{R^2}}\right|. \qquad (18)$$

Выражения (9), (13), (14) и (18) позволяют делать простые аналитические оценки акустического поля в газе вблизи фронтов сферической и боковой волн. Для точек, лежащих на вертикали над источником, получено точное аналитическое выражение (10) для потенциала смещений. Контур интегрирования в (8), (12) и (17) можно растянуть на бесконечность, что позволяет представить потенциал в виде однократных интегралов от действительных функций в конечных пределах. Эти интегралы легко вычисляются на ЭВМ для произвольных координат точек наблюдения.

Полученные результаты могут быть использованы в экспериментальных исследованиях поля в газе при ударе по поверхности упругого полупространства с целью определения углов полного внутреннего отражения θ_{0l} и θ_{0t}, что позволит дистанционно измерять скорости упругих волн в твердом теле.

2.3. Исследование поля упругих волн в твердом полупространстве

Рассмотрим определяемые скалярным потенциалом ψ_2 смещения в продольных волнах. Делая в интеграле Фурье (5) замену $\omega = c_l K x$, а затем $x=(1-\theta^2)^{-1/2}$ /2/, имеем:

$$\psi_2 = \frac{iFc_l}{4\pi^2\rho_2 c_t R} \oint\limits_{L_\theta} \frac{(2\theta^2+a^2-2)\,\theta\, d\theta}{S_l(\theta)\;E_l(\theta)} . \tag{I9}$$

В (I9) введены следующие обозначения:

$$a = c_l/c_t, \quad S_l(\theta)=R_l(\theta)+\varepsilon a^4\theta\Big/\sqrt{\theta^2+\eta^2},$$

$$R_l(\theta)=(2\theta^2+a^2-2)^2+4\theta(1-\theta^2)\sqrt{\theta^2+\mu^2},$$

$$\eta^2 = c_l^2/c_1^2-1, \qquad \mu^2 = c_l^2/c_t^2-1,$$

$$\lim_{\theta\to i\infty}\sqrt{\theta^2+\mu^2} = i|\theta|, \quad \lim_{\theta\to i\infty}\sqrt{\theta^2+\eta^2} = i|\theta|,$$

$$E_l(\theta) = \left[(\theta-q_1^{(l)})(\theta-q_2^{(l)})-\frac{2i\lambda}{R^2}\sqrt{1-\theta^2}\,(c_lt-z\theta)\right]^{1/2},$$

$$q_{1,2}^{(l)}=\frac{1}{R^2}\left(c_ltz\pm r\sqrt{R^2-c_l^2t^2}\right)$$

Особыми точками подынтегрального выражения в (I9), лежащими внутри контура L_θ, являются возникающие при $z < c_lt$ точки ветвления аналитической функции $E_l(\theta)$:

$$Q^{(l)}_{1,2} = q^{(l)}_1 \pm i \frac{\lambda \sin^2(\delta - \delta_l)}{R \sin \delta_l},$$

где $\delta = \arccos(z/R)$, $\delta_l = \arccos(c_l t/R)$. Определяемые из уравнения $S_l(\theta) = 0$ полюса $\theta_{Sl} = \pm i\sqrt{c_l^2/c_s^2 - 1}$ лежат вне контура L_θ (рис.3).

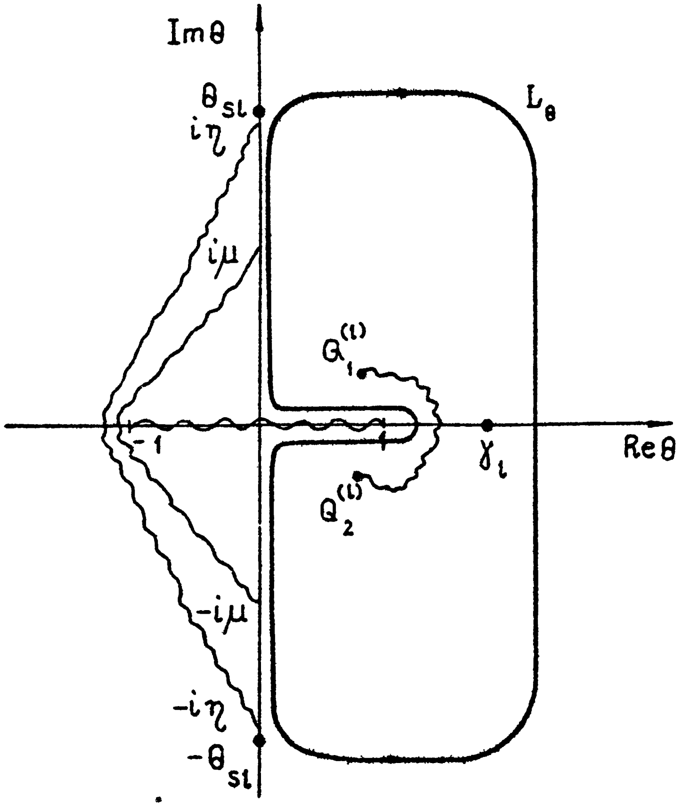


РИС. 3 Контур интегрирования L_θ и особые точки подынтегральных выражений (19), (61), (62), (103), (104). Разрезы показаны волнистыми линиями. Полюс $\theta = \gamma_l$ относится к решению задачи Ш.

В предельном случае точечного источника для скалярного потенциала имеем:

$$\psi_2 = \frac{iFc_l H(t-R/c_l)}{4\pi^2 \rho_2 c_t^2 R} \oint\limits_{L_\theta} \frac{(2\theta^2+a^2-2)\theta\, d\theta}{S_l(\theta)\,\varepsilon_l(\theta)}, \tag{20}$$

где $\varepsilon_l(\theta)=\sqrt{(\theta-q_1^{(l)})(\theta-q_2^{(l)})}$. Из (20) следует, что горизонтальные и вертикальные смещения в продольной волне даются соответственно выражениями:

$$u_z^{(l)} = \frac{F z^2 (a^2-2r^2/R^2)\,\delta(t-R/c_l)}{2\pi\rho_2 c_t^2 R^3\left[(a^2-2r^2/R^2)^2+4(r^2z/R^3)\sqrt{z^2/R^2+\mu^2}+\varepsilon a^4 z/\sqrt{R^2\eta^2+z^2}\right]}+$$

$$+\frac{iFc_l H(t-R/c_l)}{4\pi^2\rho_2 c_t^2 R^3}\oint\limits_{L_\theta}\frac{(2\theta^2-2+a^2)(c_l t-z\theta)\theta^2\, d\theta}{S_l(\theta)\,\varepsilon_l^3(\theta)}, \tag{21}$$

$$u_r^{(l)} = \frac{F r z (a^2-2r^2/R^2)\,\delta(t-R/c_l)}{2\pi\rho_2 c_t^2 R^3\left[(a^2-2r^2/R^2)+4(r^2z/R^3)\sqrt{z^2/R^2+\mu^2}+\varepsilon a^4 z/\sqrt{R^2\eta^2+z^2}\right]}+$$

$$+\frac{iFc_l r H(t-R/c_l)}{4\pi^2\rho_2 c_t^2 R^3}\oint\limits_{L_\theta}\frac{(2\theta^2-2+a^2)(1-\theta^2)\theta\, d\theta}{S_l(\theta)\,\varepsilon_l^3(\theta)}. \tag{22}$$

В (21), (22) члены, содержащие дельта-функцию, дают основной вклад в поле смещений при $R \approx c_l t$ и, следовательно, представляют собой асимптотики компонент вектора смещений вблизи фронта продольной волны. Интегральные члены в (21), (22) описывают отклонение формы сейсмического сигнала от формы импульса силового воздействия на поверхность упругого полупространства. При $R \approx c_l t$ эти члены могут быть оценены путем вычисления вычета в полюсе $\theta = z/R$, что позволяет получить поправки к асимптотикам компонент вектора смещений вблизи фронта продольной волны.

На вертикали под источником интеграл (20) пропорционален вычету в полюсе $\theta = c_l t/z$, так что потенциал при $r=0$ дается выражением:

$$\psi_z\Big|_{r=0} = -\frac{F a^2 t\left[2c_l^2 t^2+(a^2-2)z^2\right] H\left(t-\frac{z}{c_l}\right)}{2\pi\rho_2\left\{\left[2c_l^2t^2+(a^2-2)z^2\right]^2+4c_l t(z^2-c_l^2t^2)\sqrt{c_l^2t^2+\mu^2z^2}+\varepsilon a^4\frac{c_l t z^4}{\sqrt{c_l^2t^2+\eta^2z^2}}\right\}}. \quad (23)$$

Соответствующие потенциалу (23) смещения имеют вид:

$$u_z\Big|_{r=0} = \frac{F\delta(t-z/c_l)}{2\pi\rho_2 c_l^2 z\left[1+\varepsilon(1+\eta^2)^{-1/2}\right]} +$$

$$+\frac{Ftza^2H(t-z/c_l)}{2\pi\rho_2}\left\{2(a^2-2)\left[(a^2-2)z^2+2c_l^2t^2\right]^2+\right.$$

$$+8c_l^3t^3a^2\sqrt{z^2\mu^2+c_l^2t^2}-\frac{4c_lt\mu^2(c_l^2t^2-z^2)\left[2c_l^2t^2+(a^2-2)z^2\right]}{\sqrt{\mu^2z^2+c_l^2t^2}}+$$

$$+\frac{\varepsilon a^4c_lt}{(z^2\eta_l^2+c_l^2t^2)^{3/2}}\left[(a^2-2)(2c_l^2t^2+\eta_l^2)z^2+2c_l^2t^2(4c_l^2t^2-3\eta_l^2z^2)\right]\Bigg\}\times$$

$$\times\left\{\left[2c_l^2t^2+(a^2-2)z^2\right]^2+4c_lt(z^2-c_l^2t^2)\sqrt{c_l^2t^2+\mu^2z^2}+\frac{\varepsilon a^4c_ltz^4}{\sqrt{c_l^2t^2+\eta_l^2z^2}}\right\}^{-2} \tag{24}$$

Выражение (24) можно также получить, вычисляя в интеграле (2I) вычет в полюсе второго порядка $\theta = c_lt/z$.

Перейдем к рассмотрению определяемых векторным потенциалом смещений в поперечных волнах. Делая в (6) замену $\omega = c_t K \varkappa$, а затем $\varkappa = (1-\theta^2)^{-1/2}$, представим векторный потенциал в виде однократного интеграла по замкнутому контуру L_θ :

$$A=\frac{iFr}{2\pi^2\rho_2c_tR}\oint\limits_{L_\theta}\frac{(1-\theta^2)\sqrt{\theta^2-\alpha^2}\,\theta\,d\theta}{S_t(\theta)E_t(\theta)D_t(\theta)}, \tag{25}$$

где

$$\alpha^2=1-n^2,\quad n=c_t/c_l,\quad \lim_{\theta\to\infty}\sqrt{\theta^2-\alpha^2}=\theta,$$

$$S_t(\theta)=R_t(\theta)+\varepsilon\sqrt{\theta^2-\alpha^2}\Big/\sqrt{\theta^2+\beta^2},$$

$$R_t(\theta)=(1-2\theta^2)^2+4\theta(1-\theta^2)\sqrt{\theta^2-\alpha^2},$$

$$\beta^2 = c_t^2/c_1^2 - 1, \quad \lim_{\theta \to i\infty} \sqrt{\theta^2+\beta^2} = i|\theta|,$$

$$E_t(\theta) = \left[(\theta - q_1^{(t)})(\theta - q_2^{(t)}) - 2\frac{i\lambda}{R^2}\sqrt{1-\theta^2}(c_t t - z\theta)\right]^{1/2},$$

$$q_{1,2}^{(t)} = \frac{1}{R^2}\left(c_t t z \pm r\sqrt{R^2 - c_t^2 t^2}\right),$$

$$D_t(\theta) = c_t t - z\theta - RE_t(\theta) - i\lambda\sqrt{1-\theta^2}.$$

Внутри контура интегрирования L_θ в (25) лежат точки ветвления аналитической функции $E_t(\theta)$, существующие при условии $z < c_t t$,

$$Q_{1,2}^{(t)} = q_1^{(t)} \pm i\frac{\lambda \sin(\delta - \delta_t)}{R \sin \delta_t},$$

где $\delta_t = \arccos\frac{c_t t}{R}$. Точки ветвления $\theta = \pm\alpha$, $\theta = \pm i\beta$, $\theta = \pm 1$ и полюса $\theta = \pm i\sqrt{c_t^2/c_s^2 - 1}$ лежат вне контура интегрирования L_θ (рис.4).

В области отсутствия конической волны (область IУ на рис. 2, где $\delta < \theta_0 = \arcsin n$), т.е. при $\mathrm{Re}\, q_1^{(t)} > \alpha$, в предельном случае точечного источника векторный потенциал имеет вид:

$$A = \frac{iFrH(t-R/c_t)}{2\pi^2\rho_2 c_t R}\oint_{L_\theta}\frac{(1-\theta^2)\sqrt{\theta^2-\alpha^2}\,\theta\, d\theta}{S_t(\theta)\,\varepsilon_t(\theta)\, d_t(\theta)}, \tag{26}$$

где $\varepsilon_t(\theta) = \sqrt{(\theta - q_1^{(t)})(\theta - q_2^{(t)})}$, $d_t(\theta) = c_t t - z\theta - R\varepsilon_t(\theta)$, а верти-

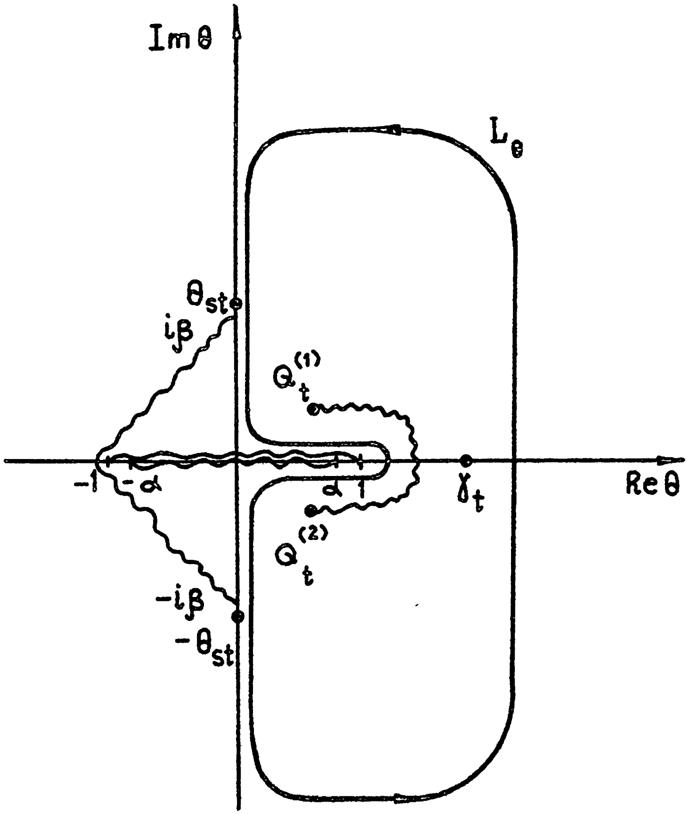


РИС. 4 Контур интегрирования L_θ и особы точки подынтегральных выражений (25), (68), (69), (110), (111). Разрезы показаны волнистыми линиями. Полюс $\theta = \gamma_t$ относится к решению задачи Ш.

кальные и горизонтальные смещения в поперечной волне описываются формулами:

$$u_z^{(t)} = \frac{F r^2 z \sqrt{z^2/R^2 - \alpha^2}\ \delta(t - R/c_t)}{\pi \rho_2 c_t^2 R^4 \left[\left(1 - \frac{2z^2}{R^2}\right)^2 + 4\frac{r^2 z}{R^3} \sqrt{\frac{z^2}{R^2} - \alpha^2 + \varepsilon \frac{\sqrt{z^2/R^2 - \alpha^2}}{\sqrt{z^2/R^2 + \beta^2}}} \right]} +$$

$$+\frac{iFH\left(t-\frac{r}{c_t}\right)}{2\pi^2\rho_2 c_t R^3}\oint\limits_{L_\theta}\frac{\sqrt{\theta^2-\alpha^2}(1-\theta^2)(c_t t-z\theta)\theta\,d\theta}{S_t(\theta)\,\varepsilon_t^3(\theta)}, \tag{27}$$

$$u_r^{(t)}=-\frac{Frz^2\sqrt{\frac{z^2}{R^2}-\alpha^2}\;\delta\left(t-\frac{R}{c_t}\right)}{\pi\rho_2 c_t^2 R^4\left[\left(1-\frac{2z^2}{R^2}\right)^2+4\left(\frac{r^2z}{R^3}\right)\sqrt{\frac{z^2}{R^2}-\alpha^2}+\varepsilon\frac{\sqrt{z^2/R^2-\alpha^2}}{\sqrt{z^2/R^2+\beta^2}}\right]}-$$

$$-\frac{iFrH\left(t-\frac{R}{c_t}\right)}{2\pi^2\rho_2 c_t R^3}\oint\limits_{L_\theta}\frac{\sqrt{\theta^2-\alpha^2}(1-\theta^2)\theta^2\,d\theta}{S_t(\theta)\,\varepsilon_t^3(\theta)}. \tag{28}$$

В (26) - (28) контур интегрирования L_θ может быть заменен контуром $L(q_1^{(t)}, q_2^{(t)})$, проходящим по берегам разреза, проведенного между точками ветвления $\theta = q_{1,2}^{(t)}$ функции $\varepsilon_t(\theta)$.

В области углов $\delta > \theta_0$ (область У на рис.2) существует коническая волна, время прихода которой $t_к$ определяется из условия $\operatorname{Re} Q_1^{(t)} = \alpha$:

$$t_к = \frac{r}{c_l} + \frac{z}{c_t}\sqrt{1-c_t^2/c_l^2}\ .$$

При $t_к < t < R/c_l$ векторный потенциал в области У описывает поле конической волны:

$$A_\kappa = -\frac{2Fr\,H(\alpha - q_1^{(t)})\,H\left(\frac{R}{c_t} - t\right)}{\pi^2 \rho_2 c_t R} \int\limits_{\alpha}^{q_1^{(t)}} \frac{(1-\theta^2)(1-2\theta^2)^2\sqrt{\alpha^2-\theta^2}\;\theta\,d\theta}{\widetilde{W}_t(\theta)\,\varepsilon_t(\theta)\,d_t(\theta)} . \qquad (29)$$

В (29) введено обозначение

$$\widetilde{W}_t(\theta) = W_t(\theta) - 8\varepsilon\,\frac{\theta(1-\theta^2)(\theta^2-\alpha^2)}{\sqrt{\theta^2+\beta^2}} - \varepsilon^2\,\frac{\theta^2-\alpha^2}{\theta^2+\beta^2} ,$$

$$W_t(\theta) = 16\alpha^2\theta^6 + 8(1-4\alpha^2)\theta^4 + 8(2\alpha^2-1)\,\theta^2 + 1 .$$

Вблизи фронта конической волны (29) можно приближенно записать в виде:

$$A_\kappa\Big|_{t \gtrsim t_\kappa} \approx \frac{F\,n\,\alpha\sqrt{\alpha}\,(\alpha - q_1^{(t)})\,H(\alpha - q_1^{(t)})\,H\left(\frac{R}{c_t} - t\right)}{\pi \rho_2 c_t R\,(1-2\alpha^2)^2\sqrt{\frac{r}{R}\sqrt{1-\frac{c_t^2 t^2}{R^2}}}} \qquad (30)$$

Из (30) нетрудно получить выражения для смещений при $t \gtrsim t_\kappa$.

Потенциал сферической поперечной волны в области $\underline{Y}$ описывается формулой

$$A = \frac{iFr\,H\left(t - \frac{R}{c_t}\right)}{2\pi^2 \rho_2 c_t R} \oint\limits_{L_\theta} \widetilde{W}_t^{-1}(\theta)\,\varepsilon_t^{-1}(\theta)\,d_t^{-1}(\theta)\,\times$$

$$\times\left\{\left[4\theta(1-\theta^2)+\frac{\varepsilon}{\sqrt{\theta^2+\beta^2}}\right](\alpha^2-\theta^2)+H(\alpha-\mathrm{Re}\,q_1^{(t)})(1-2\theta^2)^2\times\right.$$

$$\left.\times\sqrt{\theta^2-\alpha^2}\right\}(1-\theta^2)\theta\,d\theta. \tag{31}$$

Согласно (3), (29), (31) вертикальные и горизонтальные смещения в конической волне даются выражениями:

$$u_{zk}=-\frac{2FH(\alpha-q_1^{(t)})H(R-c_t t)}{\pi^2\rho_2 c_t R^3}\int\limits_{\alpha}^{q_1^{(t)}}\frac{1}{\varepsilon_t(\theta)}\frac{d}{d\theta}\left\{\frac{\theta\sqrt{\alpha^2-\theta^2}(1-\theta^2)(1-2\theta^2)^2(c_t t-z\theta)}{\tilde{W}_t(\theta)(\theta-c_t t z/R^2)}\right\}d\theta, \tag{32}$$

$$u_{rk}=\frac{2FrH(\alpha-q_1^{(t)})H(R-c_t t)}{\pi^2\rho_2 c_t R^3}\int\limits_{\alpha}^{q_1^{(t)}}\frac{1}{\varepsilon_t(\theta)}\frac{1}{d\theta}\left\{\frac{\theta^2\sqrt{\alpha^2-\theta^2}(1-\theta^2)(1-2\theta^2)^2}{\tilde{W}_t(\theta)\left(\theta-\frac{c_t t z}{R^2}\right)}\right\}d\theta. \tag{33}$$

Для смещений в сферической поперечной волне в области углов $\delta>\theta_0$ справедливы формулы:

$$u_z^{(t)}=\frac{Fr^2z\left[4(r^2z/R^3)+\varepsilon/\sqrt{z^2/R^2+\beta^2}\right](\alpha^2-z^2/R^2)\delta(t-R/c_t)}{\pi\rho_2 c_t^2 R^4\tilde{W}_t(z/R)}+$$

$$+\frac{iFH\left(t-\frac{R}{c_t}\right)}{2\pi^2\rho_2 c_t R^3}\oint\limits_{L_\theta}\left\{\left[4\theta(1-\theta^2)+\frac{\varepsilon}{\sqrt{\theta^2+\beta^2}}\right](\alpha^2-\theta^2)+\right.$$

$$\left.+H\left(\alpha-\operatorname{Re}q_{\gamma_1}^{(t)}\right)(1-2\theta^2)^2\sqrt{\theta^2-\alpha^2}\right\}\frac{(c_t t-z\theta)(1-\theta^2)\theta\, d\theta}{\tilde{W}_t(\theta)\,\varepsilon_t^3(\theta)}, \tag{34}$$

$$u_r^{(t)}=\frac{Frz^2\left[4(r^2z/R^3)+\varepsilon/\sqrt{z^2/R^2+\beta^2}\right](\alpha^2-z^2/R^2)\delta(t-R/c_t)}{\pi\rho_2 c_t^2 R^4\,\tilde{W}_t(z/R)}+$$

$$+\frac{iFrH(t-R/c_t)}{2\pi^2\rho_2 c_t R^3}\oint\limits_{L_\theta}\left\{\left[4\theta(1-\theta^2)+\frac{\varepsilon}{\sqrt{\theta^2+\beta^2}}\right](\alpha^2-\theta^2)+\right.$$

$$\left.+H\left(\alpha-\operatorname{Re}q_{\gamma_1}^{(t)}\right)(1-2\theta^2)^2\sqrt{\theta^2-\alpha^2}\right\}\frac{(1-\theta^2)\,\theta\, d\theta}{\tilde{W}_t(\theta)\,\varepsilon_t^3(\theta)}. \tag{35}$$

Вычисляя интегралы в (34), (35) при $R\approx c_t t$, для асимптотик компонент смещений вблизи фронта сферической поперечной волны получаем следующие выражения:

$$u_z^{(t)}=\frac{Fr^2z\left[4(r^2z/R^3)+\varepsilon\sqrt{z^2/R^2+\beta^2}\right](\alpha^2-z^2/R^2)\delta(t-R/c_t)}{\pi\rho_2 c_t^2 R^4\,\tilde{W}_t(z/R)}+$$

$$+\frac{Fr^2 z\left(1-\frac{2z^2}{R^2}\right)^2\sqrt{\alpha^2-\frac{z^2}{R^2}}\,H\left(\alpha-\frac{z}{R}\right)}{\pi^2\rho_2 c_t^2 R^4\ \widetilde{W}_t(z/R)}\cdot\frac{P}{t-R/c_t},\qquad(36)$$

$$u_r^{(t)}=-\frac{Frz^2\left[4\left(\frac{r^2 z}{R^3}\right)+\varepsilon\Big/\sqrt{\frac{z^2}{R^2}+\beta^2}\right]\left(\alpha-\frac{z^2}{R^2}\right)\delta\left(t-\frac{R}{c_t}\right)}{\pi\rho_2 c_t^2 R^4\ \widetilde{W}_t\left(\frac{z}{R}\right)}-$$

$$-\frac{Frz^2\left(1-\frac{2z^2}{R^2}\right)^2\sqrt{\alpha^2-\frac{z^2}{R^2}}\,H\left(\alpha-\frac{z}{R}\right)}{\pi^2\rho_2 c_t^2 R^4\ \widetilde{W}_t\left(\frac{z}{R}\right)}\cdot\frac{P}{t-\frac{R}{c_t}},\qquad(37)$$

где P – символ главного значения.

Таким образом, получены новые представления смещений в твердом теле в виде суммы их асимптотик вблизи фронта продольной и поперечной сферических волн, записанных аналитически, и однократных интегралов по замкнутому контуру, описывающих изменение формы сейсмического сигнала по сравнению с формой импульса силового воздействия источника. Растягиванием контура интегрирования на бесконечность эти интегралы могут быть сведены к однократным интегралам от действительных функций в конечных пределах. Выражения (21), (22), (27), (28), (30), (36), (37) позволяют делать простые оценки смещений вблизи фронтов продольной и поперечной сферических волн и конической волны.

При глубинном сейсмическом зондировании Земли необходимо знать поле смещений на вертикали под источником. Соответствующие расчёты могут быть проведены с помощью точного аналитического выражения (24).

3.1. Постановка задачи II и интегральные выражения для потенциалов

Задача об отражении сферического акустического импульса от границы раздела газ – твердое тело рассматривалась в ряде статей /3–5/. В настоящей работе методом контурного интегрирования /2/ получено новое представление для поля отраженной волны в виде однократного интеграла по замкнутому контуру. Этот интеграл вычислен точно для точек наблюдения, лежащих на проходящей через источник нормали к границе раздела газ – твердое тело. Подробно исследованы асимптотики поля отраженной волны вблизи фронтов сферической и боковых волн. Кроме того, рассмотрено поле упругих волн, возбуждаемых находящимся на границе раздела газ – твердое тело импульсным звуковым источником.

Итак, пусть на границе раздела однородных газообразного и твердого полупространств действует звуковой источник, создающий в газе возмущение давления p_0, описываемое уравнением:

$$\frac{\partial^2 p_0}{\partial t^2} - c_1^2 \Delta p_0 = \frac{\mathcal{P} c_1^2}{2\pi} \delta(t)\,\delta(z)\,\frac{\lambda}{(\lambda^2 + r^2)^{3/2}} \;,$$

где $\mathcal{P}$ характеризует амплитуду импульса, λ – размер источника. В газе введем потенциал скоростей φ_1, а в твердом теле – скалярный φ_2 и векторный $\vec{A} = A\vec{e}_\varphi$ потенциалы так, что давление p в акустической волне дается выражением $p = -\rho_1\, \partial\varphi_1 / \partial t$, а смещения в упругих волнах – выражением (3).

Решения волновых уравнений для потенциалов с граничными условиями

$$u_{z1} = u_{z2}, \quad \sigma_{rz2} = 0, \quad \sigma_{zz2} = -p \tag{38}$$

представляются в следующем интегральном виде:

$$\varphi_1 = \varphi_0 + \varphi_R ,$$

$$\varphi_0 = \frac{\mathcal{P}}{8\pi^2\rho_1} \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega \int\limits_{0}^{\infty} \frac{e^{-i\omega t - i\ae_1|z| - \lambda\kappa}}{\omega\ae_1} J_0(\kappa r)\,\kappa\, d\kappa$$

– потенциал падающего акустического импульса,

$$\varphi_R = \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega \int\limits_{0}^{\infty} R_{s2}(\omega,\kappa)\, e^{-i\omega t - i\ae_1 z - \lambda\kappa} J_0(\kappa r)\,\kappa\, d\kappa \qquad (39)$$

– потенциал отраженного импульса,

$$\psi_2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega \int\limits_{0}^{\infty} T_{e2}(\omega,\kappa)\, e^{-i\omega t + iz\ae_e - \lambda\kappa} J_0(\kappa r)\,\kappa\, d\kappa , \qquad (40)$$

$$A = \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega \int\limits_{0}^{\infty} T_{t2}(\omega,\kappa)\, e^{-i\omega t + i\ae_t z - \lambda\kappa} J_1(\kappa r)\,\kappa\, d\kappa , \qquad (4I)$$

где

$$R_{s2} = \frac{\mathcal{P}\left[R_0(\omega,\kappa) - \varepsilon\kappa_t^4 \ae_e/\ae_1\right]}{8\pi^2\rho_1\omega\ae_1 S(\omega,\kappa)} ,$$

$$T_{\ell 2} = \frac{i\Phi\left(k_t^2 - 2k^2\right)}{4\pi^2 \rho_2 c_t^2 \varkappa_1 S(\omega,k)}, \qquad T_{t2} = -\frac{\Phi k \varkappa_\ell}{2\pi^2 \rho_2 c_t^2 \varkappa_1 S(\omega,k)}.$$

3.2. Исследование поля отраженной звуковой волны

Делая в интеграле Фурье (39) замену $\omega = c_1 k x$, а затем $x = (1-\theta^2)^{1/2}$, приведем выражение для потенциала отраженного импульса к виду:

$$\varphi_R = \frac{i\Phi}{8\pi^2 \rho_1 R} \oint\limits_{L_\theta} \frac{\left[\theta R_1(\theta) - \varepsilon n_t^4 \sqrt{\theta^2 - \alpha_\ell^2}\right] d\theta}{S_1(\theta)\ \ E_1(\theta)}. \tag{42}$$

Из (42) следует, что в области углов $\delta < \theta_{0\ell}$, где отсутствуют эффекты полного внутреннего отражения, потенциал описывается формулой:

$$\varphi_R^I = \frac{i\Phi H(t - R/c_1)}{8\pi^2 \rho_1 R} \oint\limits_{L(q_{\gamma_1}^{(1)}, q_{\gamma_2}^{(1)})} \frac{\left[\theta R_1(\theta) - \varepsilon n_t^4 \sqrt{\theta^2 - \alpha_\ell^2}\right] d\theta}{S_1(\theta)\ \ \varepsilon_1(\theta)}. \tag{43}$$

Соответствующее (43) давление имеет вид:

$$p_R^I = \frac{\Phi\left[(|z|/R) R_1(|z|/R) - \varepsilon n_t^4 \sqrt{z^2/R^2 - \alpha_\ell^2}\right]}{4\pi R\, S_1(|z|/R)} \delta\left(t - \frac{R}{c_1}\right) +$$

$$+\frac{i\mathcal{P}c_1 H\left(t-\frac{R}{c_1}\right)}{8\pi^2 R^3}\oint\limits_{L(q_1^{(t)},q_2^{(t)})}\frac{\left[\theta R_1(\theta)-\varepsilon n_t^4\sqrt{\theta^2-\alpha_\ell^2}\right](c_1 t-|z|\theta)\,d\theta}{S_1(\theta)\,\varepsilon_1^3(\theta)}\,. \qquad (44)$$

Вблизи фронта отраженной звуковой волны основной вклад в поле давления (44) дает член, пропорциональный дельта - функции. Следующий член асимптотики пропорционален вычету в полосе $\theta=|z|/R$ в интеграле в (44).

Для точек наблюдения, лежащих на проходящей через источ - ник нормали к границе раздела газ - твердое тело, из (44) можно получить точное аналитическое выражения для звукового давления в отраженном импульсе:

$$p_R\Big|_{r=0}=\frac{\mathcal{P}(1-\varepsilon n_\ell)}{4\pi|z|(1+\varepsilon n_\ell)}\delta\left(t-\frac{|z|}{c_1}\right)-$$

$$-\frac{\mathcal{P}\varepsilon n_t^4 H(t-|z|/c_1)}{2\pi|z|}\left[\frac{c_1 t}{|z|}R_1\left(\frac{c_1 t}{|z|}\right)+\varepsilon n_t^4\sqrt{\frac{c_1^2t^2}{z^2}-\alpha_\ell^2}\right]^{-2}\times$$

$$\times\left\{\frac{c_1\alpha_\ell^2 R_1(c_1 t/|z|)}{\sqrt{c_1^2t^2-z^2\alpha_\ell^2}}-4\frac{c_1^3t^2}{|z|^3}\sqrt{\frac{c_1^2t^2}{z^2}-\alpha_\ell^2}\times\right.$$

$$\times\left[2\left(n_t^2-2+2\frac{c_1^2t^2}{z^2}\right)-2\sqrt{\frac{c_1^2t^2}{z^2}-\alpha_\ell^2}\sqrt{\frac{c_1^2t^2}{z^2}-\alpha_t^2}+\right.$$

$$\left.\left.+\left(1-\frac{c_1^2t^2}{z^2}\right)\frac{2c_1^2t^2-z^2(\alpha_\ell^2+\alpha_t^2)}{\sqrt{c_1^2t^2-z^2\alpha_\ell^2}\sqrt{c_1^2t^2-z^2\alpha_t^2}}\right]\right\}. \qquad (45)$$

В области углов $\theta_{0\ell} < \delta < \theta_{0t}$ (область II на рис.2) во временном интервале $t_{б\ell} < t < R/c_1$ потенциал скоростей описывает поле боковой волны, связанной с продольной волной в твердом теле:

$$\varphi^{II}_{б\ell} = \frac{\mathcal{P} \varepsilon n_t^4 H(R-c_1 t) H(\alpha_\ell - q_1^{(1)})}{\pi^2 \rho_1 R} \times$$

$$\times \int_{\alpha_\ell}^{q_1^{(1)}} \frac{\sqrt{\alpha_\ell^2-\theta^2}(2\theta^2-2+n_t^2)^2\theta}{G_1(\theta)\ \varepsilon_1(\theta)} \left[\widetilde{W}_1(\theta)+8H\left(\frac{|z|}{R}-\alpha_t\right)\varepsilon n_t^4\theta(\theta^2-\alpha_\ell^2)\times\right. \tag{46}$$

$$\left.\times(1-\theta^2)\sqrt{\theta^2-\alpha_t^2}\right]d\theta.$$

При $t > R/c_1$ потенциал скоростей описывает сферическую звуковую волну и дается выражением:

$$\varphi^{II}_{R_{сф}} = \frac{i\mathcal{P} H(t-R/c_1)}{8\pi^2\rho_1 R}\oint_{L(q_1^{(1)},q_2^{(1)})} \frac{\left[\theta^4 W_1^2(\theta)-\varepsilon^4 n_t^{16}(\theta^2-\alpha_\ell^2)^2\right]d\theta}{G_1(\theta)\ \varepsilon_1(\theta)} +$$

$$+\frac{i\mathcal{P}\varepsilon n_t^4 H(t-R/c_1)H(|z|/R-\alpha_t)}{\pi^2\rho_1 R}\oint_{L(q_1^{(1)},q_2^{(1)})}\frac{\left[\widetilde{W}_1(\theta)+2\varepsilon^2 n_t^8(\theta^2-\alpha_\ell^2)\right]}{G_1(\theta)\ \varepsilon_1(\theta)}\times$$

$$\times(1-\theta^2)(\theta^2-\alpha_\ell^2)\sqrt{\theta^2-\alpha_t^2}\ \theta\, d\theta +$$

$$+\frac{\mathcal{P}\varepsilon n_t^4 H(t-R/c_1)H(\alpha_\ell - \operatorname{Re} q_1^{(1)})}{2\pi^2\rho_1 R}\left\{\int_{\alpha_\ell}^{q_1^{(1)}}\frac{\sqrt{\alpha_\ell^2-\theta^2}(2\theta^2-2+n_t^2)^2\theta}{G_1(\theta)\ \varepsilon_1(\theta)}\right.\times$$

$$\times\left[\widetilde{W}_1(\theta)+8H\left(\frac{|z|}{R}-\alpha_t\right)\varepsilon n_t^4\,\theta(\theta^2-\alpha_\ell^2)(1-\theta^2)\sqrt{\theta^2-\alpha_t^2}\right]d\theta+\text{к.с}\Bigg\} \quad (47)$$

В области $\overline{\text{III}}$, где $\delta>\theta_{0t}$, во временном интервале $t_{б\ell}<t<t_{бt}$ потенциал скоростей описывает поле боковой волны, связанной с продольной волной в твердом теле:

$$\varphi_{б\ell}^{\overline{\text{III}}}=\frac{\mathcal{P}\varepsilon n_t^4 H(q_1^{(1)}-\alpha_t)H(\alpha_\ell-q_1^{(1)})}{\pi^2\rho_1 R}\int\limits_{\alpha_\ell}^{q_1^{(1)}}\frac{\sqrt{\alpha_\ell^2-\theta^2}\,(2\theta^2-2+n_t^2)^2\,\theta}{G_1(\theta)\ \varepsilon_1(\theta)}\times$$

$$\times\left[\widetilde{W}_1(\theta)+8\varepsilon n_t^4\,\theta(\theta^2-\alpha_\ell^2)(1-\theta^2)\sqrt{\theta^2-\alpha_t^2}\right]d\theta. \quad (48)$$

Если $t>t_{бt}$, т.е. $\alpha_t>q_1^{(1)}$, то поле боковых волн в области III дается выражением:

$$\varphi_{б(\ell+t)}^{\overline{\text{III}}}=\frac{\mathcal{P}\varepsilon n_t^4 H(R-c_1t)(\alpha_t-q_1^{(1)})}{\pi^2\rho_1 R}\left\{\int\limits_{\alpha_\ell}^{q_1^{(1)}}\frac{\widetilde{W}_1(\theta)\,(2\theta^2-2+n_t^2)^2\sqrt{\alpha_\ell^2-\theta^2}\,\theta\,d\theta}{G_1(\theta)\ \varepsilon_1(\theta)}+\right.$$

$$\left.+4\int\limits_{\alpha_t}^{q_1^{(1)}}\frac{\left[\widetilde{W}_1(\theta)-2\varepsilon^2 n_t^8(\alpha_\ell^2-\theta^2)\right](1-\theta^2)(\alpha_\ell^2-\theta^2)\sqrt{\alpha_t^2-\theta^2}\;\theta\,d\theta}{G_1(\theta)\ \varepsilon_1(\theta)}\right\}-$$

$$-\frac{8\mathcal{P}\varepsilon^2 n_t^8 H(R-c_1t)H(\alpha_t-q_1^{(1)})}{\pi^2\rho_1 R}\int\limits_{\alpha_\ell}^{\alpha_t}\frac{(2\theta^2-2+n_t^2)^2(1-\theta^2)\sqrt{\theta^2-\alpha_t^2}\,(\alpha_\ell^2-\theta^2)^{3/2}\,\theta^2\,d\theta}{G_1(\theta)\ \varepsilon_1(\theta)} \quad (49)$$

Сферическая отраженная волна в области III описывается формулой

$$\varphi^{III}_{Rc\varphi} = \frac{i\mathcal{P}H(t-R/c_1)}{8\pi^2\rho_1 R}\oint\limits_{L(q^{(1)}_{\gamma_1},q^{(1)}_{\gamma_2})} G_1^{-1}(\theta)\varepsilon_1^{-1}(\theta)\Big[\theta^4 W_1^2(\theta)-\varepsilon^4 n_t^{16}(\theta^2-\alpha_\ell^2)^2-$$

$$-16\varepsilon^2 n_t^8 H(\alpha_t-\mathrm{Re}\,q^{(1)}_{\gamma_1})(2\theta^2-2+n_t^2)^2(1-\theta^2)(\theta^2-\alpha_\ell^2)^{3/2}\sqrt{\theta^2-\alpha_t^2}\,\theta^2\Big]d\theta+$$

$$+\frac{\mathcal{P}\varepsilon n_t^4 H(t-R/c_1)H(\alpha_t-\mathrm{Re}\,q^{(1)}_{\gamma_1})}{2\pi^2\rho_1 R}\left\{\int\limits_{\alpha_\ell}^{q^{(1)}_{\gamma_1}}\frac{\widetilde{W}(\theta)(2\theta^2-2+n_t^2)^2\sqrt{\alpha_\ell^2-\theta^2}\,\theta\,d\theta}{G_1(\theta)\,\varepsilon_1(\theta)}+\right.$$

$$\left.+4\int\limits_{\alpha_t}^{q^{(1)}_{\gamma_1}}\frac{\left[\widetilde{W}_1(\theta)-2\varepsilon^2 n_t^8(\alpha_\ell^2-\theta^2)\right](1-\theta^2)(\alpha_\ell^2-\theta^2)\sqrt{\alpha_t^2-\theta^2}\,\theta\,d\theta}{G_1(\theta)\;\varepsilon_1(\theta)}+\text{K.C.}\right\}-$$

$$-\frac{8\mathcal{P}\varepsilon^2 n_t^8 H(t-R/c_1)H(\alpha_t-\mathrm{Re}\,q^{(1)}_{\gamma_1})}{\pi^2\rho_1\,R}\int\limits_{\alpha_\ell}^{\alpha_t}\frac{(2\theta^2-2+n_t^2)^2(1-\theta^2)\sqrt{\theta^2-\alpha_t^2}(\alpha_\ell^2-\theta^2)^{\frac{3}{2}}\theta^2\,d\theta}{G_1(\theta)\,\varepsilon_1(\theta)}. \tag{50}$$

Из (46), (48) нетрудно получить асимптотику потенциала скоростей вблизи фронта боковой волны, соответствующей продольной волне в твердом теле:

$$\varphi_{б\ell}\Big|_{t\gtrsim t_{б\ell}} \approx \frac{\mathcal{P}\varepsilon n_t^4(q^{(1)}_{\gamma_1}-\alpha_\ell)}{2\pi\rho_1 R(n_t^2-2n_\ell^2)^2\sqrt{\alpha_\ell}\sqrt{\frac{r}{R}\sqrt{1-c_1^2t^2/R^2}}}. \tag{51}$$

Как следует из (46), (47) давление в боковой и в сферической волнах в области II ($\theta_{0t} < \delta < \theta_{0\ell}$) дается выражениями:

$$p^{\text{II}}_{б\ell} = \frac{\mathcal{P}\varepsilon n_t^4 c_1 H(R/c_1 - t) H(\alpha_\ell - q_1^{(1)})}{\pi^2 R^3} \int\limits_{\alpha_\ell}^{q_1^{(1)}} \frac{1}{\varepsilon_1(\theta)} \frac{d}{d\theta} \times$$

$$\times \left\{ \frac{c_1 t - |z|\theta}{G_1(\theta)\left(\theta - c_1 t|z|/R^2\right)} \sqrt{\alpha_\ell^2 - \theta^2}(2\theta^2 - 2 + n_t^2)^2 \theta \left[\widetilde{W}_1(\theta) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + 8H\left(|z|/R - \alpha_t\right)\varepsilon n_t^4 \theta(\theta^2 - \alpha_\ell^2)(1-\theta^2)\sqrt{\theta^2 - \alpha_t^2}\right]\right\} d\theta \; ; \qquad (52)$$

$$p^{\text{II}}_{Rс\varphi} = \frac{\mathcal{P}\delta(t - R/c_1)}{4\pi R G_1(|z|/R)} \left\{ \frac{z^4}{R^4} W_1^2\left(\frac{|z|}{R}\right) - \varepsilon^4 n_t^{16}\left(\frac{z^2}{R^2} - \alpha_\ell^2\right)^2 + \right.$$

$$\left. + 8H\left(\frac{|z|}{R} - \alpha_t\right)\varepsilon n_t^4 \left[\widetilde{W}_1\left(\frac{|z|}{R}\right) + 2\varepsilon^2 n_t^8\left(\frac{z^2}{R^2} - \alpha_\ell^2\right)\right] \frac{r^2|z|}{R^3}\left(\frac{z^2}{R^2} - \alpha_\ell^2\right)\sqrt{\frac{z^2}{R^2} - \alpha_t^2} \right\} +$$

$$+ \frac{i\mathcal{P} c_1 H\left(t - \frac{R}{c_1}\right)}{8\pi^2 R^3} \oint\limits_{L_\theta} \frac{c_1 t - |z|\theta}{G_1(\theta)\varepsilon_1^3(\theta)} \left\{ \theta^4 W_1^2(\theta) - \varepsilon^4 n_t^{16}(\theta^2 - \alpha_\ell^2)^2 + 8H\left(\frac{|z|}{R} - \alpha_t\right) \times \right.$$

$$\times \varepsilon n_t^4 \left[\widetilde{W}_1(\theta) + 2\varepsilon^2 n_t^8 (\theta^2 - \alpha_\ell^2)\right](1-\theta^2)(\theta^2 - \alpha_\ell^2)\sqrt{\theta^2 - \alpha_t^2}\,\theta - 2H(\alpha_\ell - \operatorname{Re} q_1^{(1)})\varepsilon n_t^4 \left[\widetilde{W}_1(\theta) + \right.$$

$$\left.\left. + 8H\left(\frac{|z|}{R} - \alpha_t\right)\varepsilon n_t^4 \theta(\theta^2 - \alpha_\ell^2)(1-\theta^2)\sqrt{\theta^2 - \alpha_t^2}\right]\sqrt{\theta^2 - \alpha_\ell^2}(2\theta^2 - 2 + n_t^2)^2\theta \right\} d\theta. \qquad (53)$$

Вблизи фронта сферической волны интеграл в (53) описывает распределенное возмущение /2/ в области II:

$$p_p^{\mathrm{II}} \approx -\frac{\mathcal{P}\varepsilon n_t^4|z|\left(n_t^2-\frac{2r^2}{R^2}\right)^2\sqrt{\alpha_\ell^2-\frac{z^2}{R^2}}}{2\pi^2R^2G_1\left(\frac{|z|}{R}\right)}\left[\tilde{W}_1\left(\frac{|z|}{R}\right)+8H\left(\frac{|z|}{R}-\alpha_t\right)\times\right.$$

$$\left.\times\,\varepsilon n_t^4\,\frac{r^2|z|}{R^3}\left(\frac{z^2}{R^2}-\alpha_\ell^2\right)\sqrt{\frac{z^2}{R^2}-\alpha_t^2}\right]H\left(\alpha_\ell-\frac{|z|}{R}\right)\cdot\frac{P}{t-\frac{R}{c_1}}, \tag{54}$$

где P – символ главного значения.

В области III ($\delta > \theta_{0t}$) давление в боковых и сферической отраженной волнах описывается соответственно формулами:

$$p_Б^{\mathrm{III}} = p_{Б\ell}^{\mathrm{III}} + p_{Б(\ell+t)}^{\mathrm{III}},$$

$$p_{Бt}^{\mathrm{III}} = \frac{\mathcal{P}\varepsilon n_t^4 c_1 H(\alpha_\ell - q_1^{(1)})H(q_1^{(1)}-\alpha_t)}{\pi^2R^3}\int\limits_{\alpha_\ell}^{q_1^{(1)}}\frac{1}{\varepsilon_1(\theta)}\frac{d}{d\theta}\left\{\frac{\sqrt{\alpha_\ell^2-\theta^2}(c_1t-|z|\theta)}{G_1(\theta)\left(\theta-c_1t|z|/R^2\right)}\times\right.$$

$$\left.\times\left(2\theta^2-2+n_t^2\right)^2\theta\left[\tilde{W}_1(\theta)+8\varepsilon n_t^4\theta(\theta^2-\alpha_\ell^2)(1-\theta^2)\sqrt{\theta^2-\alpha_t^2}\right]\right\}d\theta; \tag{55}$$

$$p^{\overline{III}}_{s(\ell+t)} = \frac{\mathcal{P}\varepsilon n_t^4 c_1 H\left(\frac{R}{c_1}-t\right)H\left(\alpha_t - q_1^{(1)}\right)}{\pi^2 R^3}\left\{\int_{\alpha_\ell}^{q_1^{(1)}} \frac{1}{\varepsilon_1(\theta)}\frac{d}{d\theta}\times\right.$$

$$\times\left[\frac{\sqrt{\alpha_\ell^2-\theta^2}\,(c_1 t-|z|\theta)}{G_1(\theta)(\theta - c_1 t|z|/R^2)}\left(2\theta^2-2+n_t^2\right)^2\theta\,\tilde{W}_1(\theta)\right]d\theta\, +$$

$$+\,4\int_{\alpha_t}^{q_1^{(1)}}\frac{1}{\varepsilon_1(\theta)}\frac{d}{d\theta}\left\{\frac{\sqrt{\alpha_t^2-\theta^2}\,(c_1 t-|z|\theta)}{G_1(\theta)\,(\theta-c_1 t|z|/R^2)}\times\right.$$

$$\left.\times\left[\tilde{W}_1(\theta)+2\varepsilon^2 n_t^8\left(\theta^2-\alpha_\ell^2\right)\right](1-\theta^2)\theta\left(\alpha_\ell^2-\theta^2\right)\right\}d\theta\, - \tag{56}$$

$$\left.-\,8\varepsilon n_t^4\int_{\alpha_\ell}^{\alpha_t}\frac{(2\theta^2-2+n_t^2)^2(1-\theta^2)(\alpha_\ell^2-\theta^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\theta^2-\alpha_t^2}\,\theta^2\,(c_1 t-|z|\theta)}{G_1(\theta)\;\varepsilon_1^3(\theta)}d\theta\right\}$$

$$p^{\overline{III}}_{R_{c\varphi}} = \frac{\mathcal{P}}{4\pi R_1 G_1(|z|/R)}\left[\frac{z^4}{R^4}W_1^2\left(\frac{|z|}{R}\right)-\varepsilon^4 n_t^{16}\left(\alpha_\ell^2-\frac{z^2}{R^2}\right)^2-\right.$$

$$\left.-\,16\varepsilon^2 n_t^8\left(\frac{r^2 z^2}{R^4}\right)\left(n_t^2-\frac{2r^2}{R^2}\right)^2\left(\alpha_\ell^2-\frac{z^2}{R^2}\right)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\alpha_t^2-\frac{z^2}{R^2}}\right]\delta\left(t-\frac{R}{c_1}\right)+$$

$$+\frac{i\mathcal{P}c_1 H\left(t-\frac{R}{c_1}\right)}{8\pi^2 R^3}\oint\limits_{L_\theta}\frac{c_1 t-|z|\theta}{G_1(\theta)\,\varepsilon_1^3(\theta)}\left\{\theta^4 W_1^2(\theta)-\varepsilon^4 n_t^{16}(\theta^2-\alpha_\ell^2)^2+\right.$$

$$+2H(\alpha_t-\operatorname{Re}q_1^{(1)})\varepsilon n_t^4\left[4\left[\tilde{W}_1(\theta)+2\varepsilon^2 n_t^8(\theta^2-\alpha_\ell^2)\right](1-\theta^2)\times\right.$$

$$\times(\theta^2-\alpha_\ell^2)\sqrt{\theta^2-\alpha_t^2}\,\theta-\left[\tilde{W}_1(\theta)+8\varepsilon n_t^4\theta(\theta^2-\alpha_\ell^2)(1-\theta^2)\sqrt{\theta^2-\alpha_t^2}\right]\times$$

$$\left.\left.\times\sqrt{\theta^2-\alpha_\ell^2}\,(2\theta^2-2+n_t^2)^2\theta\right]\right\}d\theta. \qquad (57)$$

Распределенное возмущение в области Ш, получаемое путем вычисления интеграла в (57) при $t\approx R/c_1$, имеет вид:

$$p_p^{\text{Ш}}\approx-\frac{\mathcal{P}\varepsilon n_t^4|z|H\left(\alpha_t-\frac{|z|}{R}\right)}{2\pi^2R^2G_1(|z|/R)}\left\{\left(n_t^2-\frac{2r^2}{R^2}\right)^2\tilde{W}_1\left(\frac{|z|}{R}\right)\sqrt{\alpha_\ell^2-\frac{z^2}{R^2}}+\right.$$

$$\left.+\frac{4r^2}{R^2}\left(\alpha_\ell^2-\frac{z^2}{R^2}\right)\left[\tilde{W}_1\left(\frac{|z|}{R}\right)-2\varepsilon^2 n_t^8\left(\alpha_\ell^2-\frac{z^2}{R^2}\right)\right]\sqrt{\alpha_t^2-\frac{z^2}{R^2}}\right\}\frac{P}{t-R/c_1}. \qquad (58)$$

Выражения (44), (5I), (53), (54), (57), (58) позволяют делать аналитические оценки акустического давления в отраженном импульсе вблизи фронтов боковой и сферической волн. Более полное исследование поля отраженной волны может быть проведено путем численного интегрирования в (44), (52), (53), (55) - (57). Точное аналитическое выражение (45) для отраженного акустического сигнала при $r = 0$ может быть использовано для контроля правильности работы численных схем расчета нестационарных волновых процессов при наличии границы раздела газ - твердое тело.

Если источник звука расположен над границей на некоторой высоте $h \neq 0$, то в выражениях для поля отраженного импульса следует заменить z на $z + h$.

3.3. Исследование поля упругих волн, генерируемых импульсным звуковым источником, расположенным на границе раздела газ - твердое тело

Вначале рассмотрим определяемое скалярным потенциалом поле преломленной продольной волны. Из (3), (40) следует, что

$$u_z^{(\ell)} = -\frac{\mathcal{P}}{4\pi^2 \rho_2 c_t^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_0^{\infty} \frac{\varkappa_\ell (\kappa_t^2 - 2\kappa^2)}{\varkappa_1 S(\omega,\kappa)} e^{-i\omega t + iz\varkappa_\ell - \lambda\kappa} J_0(\kappa r)\kappa \, d\kappa , \quad (59)$$

$$u_r^{(\ell)} = -\frac{i\mathcal{P}}{4\pi^2 \rho_2 c_t^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_0^{\infty} \frac{\kappa_t^2 - 2\kappa^2}{\varkappa_1 S(\omega,\kappa)} e^{-i\omega t + iz\varkappa_\ell - \lambda\kappa} J_1(\kappa r)\kappa^2 \, d\kappa . \quad (60)$$

Делая в (59), (60) замену $\omega = c_\ell \kappa x$, а затем $x = (1-\theta^2)^{-1/2}$, для вертикальной и горизонтальной компонент вектора смещений в продольной волне получаем:

$$u_z^{(l)} = -\frac{i\mathcal{P} c_l}{4\pi^2 \rho_2 c_t^2 R} \oint\limits_{L_\theta} \frac{(2\theta^2 + a^2 - 2)\theta^2\, d\theta}{\sqrt{\theta^2 + \eta^2}\; S_l(\theta)\; E_l(\theta)}\,, \tag{61}$$

$$u_r^{(l)} = -\frac{i\mathcal{P} c_l r}{4\pi^2 \rho_2 c_t^2 R} \oint\limits_{L_\theta} \frac{(2\theta^2 + a^2 - 2)(1-\theta^2)\theta\, d\theta}{\sqrt{\theta^2 + \eta^2}\; S_l(\theta)\; E_l(\theta)\; D_l(\theta)}\,, \tag{62}$$

где

$$D_l(\theta) = c_l t - z\theta - R E_l(\theta) - i\lambda\sqrt{1-\theta^2}\,.$$

В предельном случае точечного источника, $\lambda \to 0$, выражения (61) и (62) принимают вид:

$$u_z^{(l)} = -\frac{i\mathcal{P} c_l H\left(t - \frac{R}{c_l}\right)}{4\pi^2 \rho_2 c_t^2 R} \oint\limits_{L_\theta} \frac{(2\theta^2 + a^2 - 2)\theta^2\, d\theta}{\sqrt{\theta^2 + \eta^2}\; S_l(\theta)\; \varepsilon_l(\theta)}\,, \tag{63}$$

$$u_r^{(l)} = -\frac{i\mathcal{P} c_l r H\left(t - \frac{R}{c_l}\right)}{4\pi^2 \rho_2 c_t^2 R} \oint\limits_{L_\theta} \frac{(2\theta^2 + a^2 - 2)(1-\theta^2)\theta\, d\theta}{\sqrt{\theta^2 + \eta^2}\; S_l(\theta)\; \varepsilon_l(\theta)\; d_l(\theta)}\,, \tag{64}$$

$$d_\ell(\theta) = c_\ell t - z\theta - R\varepsilon_\ell(\theta).$$

Смещения вблизи фронта продольной сферической волны, когда $c_\ell t z \gg r\sqrt{c_\ell^2 t^2 - R^2}$, пропорциональны вычетам в полюсе $\theta = z/R$:

$$u_z^{(\ell)}\Big|_{R \lessapprox c_\ell t} \approx \frac{\mathcal{P} c_\ell z^2 (a^2 - 2r^2/R^2)\, H(t - R/c_\ell)}{2\pi \rho_2 c_t^2 R^3 \sqrt{z^2/R^2 + \eta^2}\; S_\ell(z/R)}, \qquad (65)$$

$$u_r^{(\ell)}\Big|_{R \lessapprox c_\ell t} \approx \frac{\mathcal{P} c_\ell r z (a^2 - 2r^2/R^2)\, H(t - R/c_\ell)}{2\pi \rho_2 c_t^2 R^3 \sqrt{z^2/R^2 + \eta^2}\; S_\ell(z/R)}. \qquad (66)$$

На вертикали под источником, где $r = 0$, смещения пропорционально вычету в полюсе $\theta = c_\ell t / z$:

$$u_z^{(\ell)}\Big|_{r=0} = \frac{\mathcal{P} c_\ell^3 t^2 (2c_\ell^2 t^2/z^2 + a^2 - 2)\, H(t - z/c_\ell)}{2\pi \rho_2 c_t^2 z^2 \sqrt{c_\ell^2 t^2 + \eta^2 z^2}\; S_\ell(c_\ell t/z)}. \qquad (67)$$

Перейдем к рассмотрению определяемых векторным потенциалом смещений в поперечной преломленной волне. Вертикальные и горизонтальные компоненты смещений можно представить в виде следующих контурных интегралов:

$$u_z^{(t)} = -\frac{i\varphi}{2\pi^2 \rho_2 c_t R} \oint\limits_{L_\theta} \frac{\sqrt{\theta^2-\alpha^2}\,(1-\theta^2)\,\theta\, d\theta}{\sqrt{\theta^2+\beta^2}\, S_t(\theta)\, E_t(\theta)}, \tag{68}$$

$$u_r^{(t)} = \frac{i\varphi r}{2\pi^2 \rho_2 c_t R} \oint\limits_{L_\theta} \frac{\sqrt{\theta^2-\alpha^2}\,(1-\theta^2)\,\theta^2\, d\theta}{\sqrt{\theta^2+\beta^2}\, S_t(\theta)\, E_t(\theta)\, D_t(\theta)} \tag{69}$$

В области углов $\delta < \theta_0$, где коническая волна отсутствует , из (68), (69) в пределе $\lambda \to 0$ получаем:

$$u_z^{(t)} = -\frac{i\varphi H\left(t-\frac{R}{c_t}\right)}{2\pi^2 \rho_2 c_t R} \oint\limits_{L_\theta} \frac{\sqrt{\theta^2-\alpha^2}\,(1-\theta^2)\,\theta\, d\theta}{\sqrt{\theta^2+\beta^2}\, S_t(\theta)\, \varepsilon_t(\theta)}, \tag{70}$$

$$u_r^{(t)} = \frac{i\varphi r H\left(t-\frac{R}{c_t}\right)}{2\pi^2 \rho_2 c_t R} \oint\limits_{L_\theta} \frac{\sqrt{\theta^2-\alpha^2}\,(1-\theta^2)\,\theta^2\, d\theta}{\sqrt{\theta^2+\beta^2}\, S_t(\theta)\, \varepsilon_t(\theta)\, d_t(\theta)}. \tag{71}$$

Вблизи фронта поперечной сферической волны (70) и (71) можно приближенно записать в виде ($\alpha < z/R$):

$$u_z^{(t)}\Big|_{R\le c_t t} \approx \frac{\mathcal{P} r^2 z\sqrt{z^2/R^2-\alpha^2}\; H(t-R/c_t)}{\pi\rho_2 c_t R^4\sqrt{z^2/R^2+\beta^2}\; S_t(z/R)}\,, \tag{72}$$

$$u_r^{(t)}\Big|_{R\le c_t t} \approx -\frac{\mathcal{P} r z^2\sqrt{z^2/R^2-\alpha^2}\; H(t-R/c_t)}{\pi\rho_2 c_t R^4\sqrt{z^2/R^2+\beta^2}\; S_t(z/R)} \tag{73}$$

В области углов $\delta > \theta_0$ во временном интервале $t_\kappa < t < \frac{R}{c_t}$ определяемые векторным потенциалом смещения соответствуют конической волне:

$$u_{z\kappa} = \frac{2\mathcal{P} H(\alpha - q_1^{(t)}) H\left(\frac{R}{c_t} - t\right)}{\pi^2 \rho_2 c_t R}\int_{\alpha}^{q_1^{(t)}} \frac{(1-2\theta^2)^2(1-\theta^2)\theta\sqrt{\alpha^2-\theta^2}\,d\theta}{\sqrt{\theta^2+\beta^2}\;\tilde{W}_t(\theta)\,\varepsilon_t(\theta)}\,, \tag{74}$$

$$u_{r\kappa} = -\frac{2\mathcal{P} H(\alpha - q_1^{(t)}) H\left(\frac{R}{c_t} - t\right)}{\pi^2 \rho_2 c_t R}\int_{\alpha}^{q_1^{(t)}} \frac{(1-2\theta^2)^2(1-\theta^2)\theta^2\sqrt{\alpha^2-\theta^2}\,d\theta}{\sqrt{\theta^2+\beta^2}\;\tilde{W}_t(\theta)\,\varepsilon_t(\theta)\,d_t(\theta)}\,. \tag{75}$$

Асимптотики величин $u_{z\kappa}$ и $u_{r\kappa}$ вблизи переднего фронта конической волны, где $t \approx t_\kappa$, имеют вид:

$$u_{zк}\Big|_{t \geq t_к} \approx - \frac{\mathcal{P} n^2 \alpha^{3/2} (\alpha - q_1^{(t)})\, H\left(\frac{R}{c_t} - t\right) H(\alpha - q_1^{(t)})}{\pi \rho_2 c_t R \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\, (1 - 2\alpha^2)^2 \sqrt{\frac{r}{R}\sqrt{1 - \frac{c_t^2 t^2}{R^2}}}}, \quad (76)$$

$$u_{rк}\Big|_{t \geq t_к} \approx \frac{\mathcal{P} n \alpha^{5/2} (\alpha - q_1^{(t)})\, H\left(\frac{R}{c_t} - t\right) H(\alpha - q_1^{(t)})}{\pi \rho_2 c_t R \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\, (1 - 2\alpha^2)^2 \sqrt{\frac{r}{R}\sqrt{1 - \frac{c_t^2 t^2}{R^2}}}} \quad (77)$$

При $t > R/c_t$, $\delta > \theta_0$ смещения соответствуют сферической поперечной волне:

$$u_z^{(t)} = \frac{i \mathcal{P} H\left(t - \frac{R}{c_t}\right)}{2\pi^2 \rho_2 c_t R} \oint_{L_\theta} \frac{(1 - \theta^2)\theta}{\sqrt{\theta^2 + \beta^2}\, \tilde{W}_t(\theta) \varepsilon_t(\theta)} \times$$

$$\times \left\{ \left[4\theta(1 - \theta^2) + \frac{\varepsilon}{\sqrt{\theta^2 + \beta^2}} \right] (\theta^2 - \alpha^2) - H(\alpha - \operatorname{Re} q_1^{(t)})(1 - 2\theta^2)^2 \sqrt{\theta^2 - \alpha^2} \right\} d\theta, \quad (78)$$

$$u_r^{(t)} = - \frac{2 \mathcal{P} H\left(t - \frac{R}{c_t}\right)}{2\pi^2 \rho_2 c_t R} \oint_{L_\theta} \frac{(1 - \theta^2)\theta^2}{\sqrt{\theta^2 + \beta^2}\, \tilde{W}_t(\theta) \varepsilon_t(\theta) d_t(\theta)} \times$$

$$\times\left\{\left[4\theta(1-\theta^2)+\frac{\varepsilon}{\sqrt{\theta^2+\beta^2}}\right](\theta^2-\alpha^2)-H(\alpha-\mathrm{Re}\,q_1^{(t)})(1-2\theta^2)^2\sqrt{\theta^2-\alpha^2}\right\}d\theta\,. \qquad (79)$$

Вблизи фронта поперечной сферической волны компоненты смещений описываются приближенными формулами:

$$u_z^{(t)}\Big|_{R\approx c_t t}\approx\frac{\mathcal{P}r^2z\left(\alpha^2-\frac{z^2}{R^2}\right)H\left(t-\frac{R}{c_t}\right)}{\pi\rho_2 c_t R^4\sqrt{\frac{z^2}{R^2}+\beta}\;\widetilde{W}_t\left(\frac{z}{R}\right)}\left(4\,\frac{r^2z}{R^3}+\frac{\varepsilon}{\sqrt{z^2/R^2+\beta^2}}\right)+$$

$$+\frac{2\mathcal{P}r^2z\,(1-2z^2/R^2)^2\sqrt{\alpha^2-z^2/R^2}\,H(\alpha-z/R)}{\pi^2\rho_2 c_t R^4\sqrt{z^2/R^2+\beta}\;\;\widetilde{W}_t(z/R)}\ln\left|\frac{r}{R}\sqrt{1-\frac{c_t^2t^2}{R^2}}\right|, \qquad (80)$$

$$u_r^{(t)}\Big|_{R\approx c_t t}\approx-\frac{\mathcal{P}rz^2\left(\alpha^2-\frac{z^2}{R^2}\right)H\left(t-\frac{R}{c_t}\right)}{\pi\rho_2 c_t R^4\sqrt{\frac{z^2}{R^2}+\beta}\;\widetilde{W}_t\left(\frac{z}{R}\right)}\left(4\,\frac{r^2z}{R^3}+\frac{\varepsilon}{\sqrt{z^2/R^2+\beta^2}}\right)-$$

$$-\frac{2\mathcal{P}rz^2(1-2z^2/R^2)^2\sqrt{\alpha^2-z^2/R^2}\,H(\alpha-z/R)}{\pi^2\rho_2 c_t R^4\sqrt{z^2/R^2+\beta^2}\;\;\widetilde{W}(z/R)}\ln\left|\frac{r}{R}\sqrt{1-\frac{c_t^2t^2}{R^2}}\right|\,. \qquad (81)$$

Полученные в настоящем разделе результаты могут быть использованы в сейсморазведке и неразрушающем контроле материалов для расчетов формы зондирующего импульса. Выражения (65), (66), (72), (73), (76), (77), (80), (81) представляют собой аналитические формулы для вертикальных и горизонтальных компонент смещений вблизи фронтов конической волны и продольной и поперечной сферических волн. Для точек наблюдения, лежащих на вертикали под источником, получено точное аналитическое выражение для смещений (67). Более полное исследование поля смещений в преломленных упругих волнах в произвольных точках твердого полупространства может быть проведено путем численного интегрирования в (63), (64), (70), (71), (74), (75), (78), (79).

4.1. Постановка задачи III и интегральные выражения для потенциалов

Переходное излучение сейсмоакустических волн на границе раздела атмосфера – Земля впервые, по-видимому, было рассмотрено в работе /6/, где для вычисления двойных интегралов Фурье, описывающих нестационарные звуковые и упругие волны, использовался метод перевала, что позволило вычислить поле переходного излучения только вблизи фронтов сферических волн. Между тем, представляет интерес рассмотрение поля переходного излучения во всем пространстве.

В этом разделе задача о переходном излучении сейсмоакустических волн точечным изотропным источником массы постоянной производительности, равномерно движущимся в газе по нормали к границе раздела однородных газообразного и упругого полупространств и исчезающим в момент касания твердого тела, решена методом контурного интегрирования /2/. Этот метод оказался весьма эффективным при рассмотрении излучения звука источником массы, пересекающим границу раздела двух однородных газообразных сред /7, 8/. Ниже получены новые представления для поля переходного сейсмоакустического излучения в виде однократного интеграла по замкнутому контуру, интегральные выражения для полей боковых и конической волн, а также асимптотические формулы, справедливы вблизи фронтов волн. Для точек наблюдения, расположенных на траектории движения источника и на ее продолжении в твердом теле получены точные аналитические выражения для полей акустической и упругих волн.

Итак, пусть источник массы с постоянной производительностью Q равномерно движется в газе с дозвуковой скоростью v из области $z = -\infty$ в положительном направлении оси z и исчезает в момент касания поверхности твердого тела. Как в задачах I, II в газе введем потенциал скоростей φ_1, а в твердом теле – скалярный ψ_2 и векторный $\vec{A}$ потенциалы смещений. Потенциал скоростей в газе удовлетворяет волновому уравнению с правой частью:

$$\Delta\varphi_1 - \frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial t^2} = \frac{Q}{\rho_1} H(-t) \frac{\lambda}{2\pi(\lambda^2+r^2)^{3/2}} \delta(z-vt)$$

(λ – характерный поперечный размер источника), а потенциалы смещений в твердом теле – однородным волновым уравнениям. Их решения с граничными условиями (38) при $z = 0$ можно представить в следующем интегральном виде:

$$\varphi_1 = \varphi_1^{(1)} + \varphi_1^{(2)},$$

$$\varphi_1^{(1)} = \frac{Q}{4\pi^2\rho_1 v}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_0^{\infty} \frac{k J_0(kr)\, e^{i\frac{\omega}{v}(z-vt)-\lambda k}}{k_1^2 - k^2 - \frac{\omega^2}{v^2}}\, dk, \qquad (82)$$

$$\varphi_1^{(2)} = \frac{Q}{4\pi^2\rho_1 v}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_0^{\infty} \frac{R_{s3}\, e^{-i\omega t - i\varkappa_1 z - \lambda k}}{k_1^2 - k^2 - \frac{\omega^2}{v^2}} J_0(kr)\, k\, dk, \qquad (83)$$

$$\psi_2 = \frac{Q}{4\pi^2 \rho_1 v} \int\limits_{\infty}^{\infty} d\omega \int\limits_0^{\infty} \frac{T_{\ell 3}\, e^{-i\omega t + i\varkappa_\ell z - \lambda k}}{k_1^2 - k^2 - \frac{\omega^2}{v^2}} J_0(kr)\, k\, dk ; \tag{84}$$

$$A = \frac{Q}{4\pi^2 \rho_1 v} \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega \int\limits_0^{\infty} \frac{T_{t 3}\, e^{-i\omega t + i\varkappa_t z - \lambda k}}{k_1^2 - k^2 - \frac{\omega^2}{v^2}} J_1(kr)\, k\, dk , \tag{85}$$

$$R_{s3}(\omega,k) = \frac{(\omega/v)\, R_0(\omega,k) - \varepsilon k_t^4 \varkappa_\ell}{\varkappa_1\, S(\omega,k)} ,$$

$$T_{\ell 3}(\omega,k) = \frac{i\omega\varepsilon(\varkappa_1 + \omega/v)(\varkappa_t^2 - k^2)}{c_t^2\, \varkappa_1\, S(\omega,k)} ,$$

$$T_{t3}(\omega,k) = -\frac{2\omega\varepsilon k\, \varkappa_\ell(\varkappa_1 + \omega/v)}{c_t^2\, \varkappa_1\, S(\omega,k)} .$$

Потенциал $\varphi_1^{(1)}$ соответствует статическим возмущениям, создаваемым в однородной безграничной среде движущимся источником массы. Вычисляя интеграл (82) в предельном случае точечного источ - ника, $\lambda \to 0$, получаем:

$$\varphi_1^{(1)} = \frac{Q}{4\pi\rho_1 \sqrt{r^2(1 - M_1^2) + (z - vt)^2}}$$

где $M_1 = v/c_1$ – число Маха.

Потенциал $\varphi_1^{(2)}$ (83) описывает акустическое поле, связанное с наличием границы раздела сред. Именно эта часть поля представляет наибольший интерес.

4.2. Исследование поля переходного излучения в газе

Рассмотрим звуковое поле, связанное с наличием границы раздела сред, в полупространстве $z < 0$, заполненном газом. В интеграле Фурье (83) сделаем замену переменной интегрирования $\omega = c_1 k x$, а затем $x = (1 - \theta^2)^{-1/2}$ /2/. Это позволяет представить потенциал скоростей $\varphi_1^{(2)}$ в виде однократного интеграла по замкнутому контуру L_θ:

$$\varphi_1^{(2)} = \frac{iQ}{4\pi^2 \rho_1 R M_1} \oint\limits_{L_\theta} \frac{\left[\frac{R_1(\theta)}{M_1} - \varepsilon n_t^4 \sqrt{\theta^2 - \alpha_\ell^2}\right] \theta\, d\theta}{S_1(\theta) E_1(\theta) \left(\theta^2 - \frac{1}{M_1^2}\right)} . \quad (86)$$

Особые точки подынтегрального выражения в (86) показаны на рис.I. Если $|z| > c_1 t$, то аналитическая функция $E_1(\theta)$ не имеет точек ветвления /2/, и потенциал $\varphi_1^{(2)}$ пропорционален вычету в полюсе $\theta = 1/M_1$ $(\lambda \to 0)$:

$$\varphi_{ст} = -\frac{Q}{4\pi\rho_1 \sqrt{r^2(1-M_1^2) + (z+vt)^2}} \cdot \frac{R_1\left(\frac{1}{M_1}\right) - \varepsilon n_t^4 \sqrt{1 - M_1^2 \alpha_\ell^2}}{R_1\left(\frac{1}{M_1}\right) + \varepsilon n_t^4 \sqrt{1 - M_1^2 \alpha_\ell^2}} \quad (87)$$

Потенциал (87) описывает статическое поле изображения источника, которое движется в направлении, противоположном направлению оси z.

Если $|z| < c_1 t$, то внутри контура интегрирования L_θ лежат точки ветвления функции $E_1(\theta)$: $\theta = q^{(1)}_{1,2}$. В области углов $\delta < \theta_{0\ell}$ (область I на рис.2), где отсутствует эффект полного внутреннего отражения, в предельном случае точечного источника потенциал переходного излучения дается выражением:

$$\varphi_n = \frac{iQH\left(t-\frac{R}{c_1}\right)}{4\pi^2\rho_1 RM_1}\oint\limits_{L(q_1^{(1)},q_2^{(1)})} \frac{\left[\frac{R_1(\theta)}{M_1}-\varepsilon n_t^4\sqrt{\theta^2-\alpha_\ell^2}\right]\theta\, d\theta}{S_1(\theta)\varepsilon_1(\theta)\left(\theta^2-\frac{1}{M_1^2}\right)}. \tag{88}$$

Из (88) следует, что вблизи фронта сферической звуковой волны, когда $c_1 t|z| \gg r\sqrt{c_1^2t^2-R^2}$, поле переходного излучения описывается приближенной формулой:

$$\varphi_n\Big|_{R\approx c_1 t} \approx -\frac{QH\left(t-\frac{R}{c_1}\right)|z|\left[R_1\left(\frac{|z|}{R}\right)/M_1-\varepsilon n_t^4\sqrt{\frac{z^2}{R^2}-\alpha_\ell^2}\right]}{2\pi\rho_1 R^2 S_1\left(\frac{|z|}{R}\right)M_1\left(\frac{z^2}{R^2}-\frac{1}{M_1^2}\right)}. \tag{89}$$

На траектории источника, где $r = 0$, интеграл (88) вычисляется точно:

$$\varphi_n\Big|_{r=0} = -\frac{QH\left(t-\frac{|z|}{c_1}\right)c_1 t\left[R_1\left(\frac{c_1 t}{|z|}\right)/M_1-\varepsilon n_t^4\sqrt{\frac{c_1^2t^2}{z^2}-\alpha_\ell^2}\right]}{2\pi\rho_1 z^2 S_1\left(\frac{c_1 t}{|z|}\right)M_1\left(\frac{c_1^2t^2}{z^2}-\frac{1}{M_1^2}\right)}. \tag{90}$$

Во временном интервале $t_{5\ell} < t < R/c_1$ переходное излучение в области углов $\theta_{0\ell} < \delta < \theta_{0t}$ определяется боковой волной, связанной с продольной волной в твердом теле:

$$\varphi^{\text{II}}_{\text{пб}\ell} = \frac{Q\varepsilon n_t^4\, H\left(\frac{R}{c_1} - t\right) H(\alpha_\ell - q_1^{(1)})}{\pi^2 \rho_1 R} \int\limits_{\alpha_\ell}^{q_1^{(1)}} \frac{(2\theta^2 - 2 + n_t^2)^2\, \theta \sqrt{\alpha_\ell^2 - \theta^2}}{G_1(\theta)\, \varepsilon_1(\theta)\, (M_1\theta - 1)} \times$$

$$\times \left[\tilde{W}_1(\theta) + 8\varepsilon n_t^4\, H\left(\frac{|z|}{R} - \alpha_t\right)\theta(1-\theta^2)(\theta^2 - \alpha_\ell^2)\sqrt{\theta^2 - \alpha_t^2}\right] d\theta. \qquad (91)$$

Вблизи переднего фронта боковой волны, когда $\alpha_\ell \approx q_1^{(1)}$, интеграл (91) вычисляется аналитически:

$$\left.\varphi^{\text{II}}_{\text{пб}\ell}\right|_{t \approx t_{б\ell}} \approx \frac{\varepsilon n_t^4 Q H(R/c_1 - t)(\alpha_\ell - q_1^{(1)})(q_1^{(1)} - \alpha_\ell)}{2\pi \rho_1 R \sqrt{\alpha_\ell}\,(n_t^2 - 2n_\ell^2)^2 \sqrt{\frac{r}{R}\sqrt{1 - \frac{c_1^2 t^2}{R^2}}}\,(M_1\alpha_\ell - 1)}. \qquad (92)$$

Сферическая звуковая волна в области II описывается выражением:

$$\varphi^{\text{II}}_{\text{лсф}} = \frac{iQH\left(t - \frac{R}{c_1}\right)}{4\pi^2 \rho_1 R} \oint\limits_{L(q_1^{(1)}, q_2^{(1)})} \frac{\theta}{(M_1^2\theta^2 - 1)\, G_1(\theta)\, \varepsilon_1(\theta)} \times$$

$$\times \Big\{\theta \tilde{W}_1(\theta) W_1(\theta) + M_1 \varepsilon^2 n_t^8\, \tilde{W}_1(\theta)(\theta^2 - \alpha_\ell^2) -$$

$$- 32\varepsilon^2 n_t^8\, \theta (1-\theta^2)^2 (\theta^2 - \alpha_\ell^2)^2 (\theta^2 - \alpha_t^2)(1 - M_1\theta) +$$

$$+4\varepsilon n_t^4 H\left(\frac{|z|}{R}-\alpha_t\right)(1-\theta^2)(\theta^2-\alpha_\ell^2)\left[\tilde{W}_1(\theta)+2\varepsilon n_t^8(\theta^2-\alpha_\ell^2)\right](1+M_1\theta)\sqrt{\theta^2-\alpha_t^2}\Bigg\}d\theta+$$

$$+\frac{\varepsilon n_t^4 H\left(t-\frac{R}{c_1}\right)H\left(\alpha_\ell-\mathrm{Re}\,q_1^{(1)}\right)}{2\pi^2\rho_1 R}\left\{\int\limits_{\alpha_\ell}^{q_1^{(1)}}\frac{(2\theta^2-2+n_t^2)^2\theta\sqrt{\alpha_\ell^2-\theta^2}}{(M_1\theta-1)G_1(\theta)\,\varepsilon_1(\theta)}\times\right.$$

$$\left.\times\left[\tilde{W}_1(\theta)+8\varepsilon n_t^4 H\left(\frac{|z|}{R}-\alpha_t\right)\theta(1-\theta^2)(\theta^2-\alpha_\ell^2)\sqrt{\theta^2-\alpha_t^2}\right]d\theta+\text{к.с.}\right\}. \qquad (93)$$

Соответствующее потенциалу (93) давление имеет вблизи фронта сферической волны вид

$$p_n^{\mathrm{II}}\Big|_{R\approx c_1 t}\approx\frac{Q|z|\,\delta\left(t-\frac{R}{c_1}\right)}{2\pi R^2 G_1\left(\frac{|z|}{R}\right)\left(\frac{M_1^2 z^2}{R^2}-1\right)}\times$$

$$\times\left\{\frac{|z|}{R}\tilde{W}_1\left(\frac{|z|}{R}\right)W_1\left(\frac{|z|}{R}\right)+M_1\varepsilon^2 n_t^8\tilde{W}_1\left(\frac{|z|}{R}\right)\left(\frac{z^2}{R^2}-\alpha_\ell^2\right)-\right.$$

$$-32\varepsilon^2 n_t^8\frac{r^4|z|}{R^5}\left(\frac{z^2}{R^2}-\alpha_\ell^2\right)^2\left(\frac{z^2}{R^2}-\alpha_t^2\right)\left(1-\frac{M_1|z|}{R}\right)+$$

$$+4\varepsilon n_t^4 H\left(\frac{|z|}{R}-\alpha_t\right)\frac{r^2}{R^2}\left(\frac{z^2}{R^2}-\alpha_\ell^2\right)\left[\tilde{W}_1\left(\frac{|z|}{R}\right)+2\varepsilon^2 n_t^8\left(\frac{z^2}{R^2}-\alpha_\ell^2\right)\right]\times$$

$$\times\left(1+\frac{M_1|z|}{R}\right)\sqrt{\frac{z^2}{R^2}-\alpha_t^2}\Bigg\}-\frac{\varepsilon n_t^4 Q H\left(\alpha_\ell-\frac{|z|}{R}\right)|z|\left(n_t^2-\frac{2r^2}{R^2}\right)^2\sqrt{\alpha_\ell^2-\frac{z^2}{R^2}}}{2\pi^2 R\left(\frac{M_1|z|}{R}-1\right)G_1\left(\frac{|z|}{R}\right)}\times$$

$$\times\left[\tilde{W}_1\left(\frac{|z|}{R}\right)+8\varepsilon n_t^4 H\left(\frac{|z|}{R}-\alpha_t\right)\frac{r^2|z|}{R^3}\left(\frac{z^2}{R^2}-\alpha_\ell^2\right)\sqrt{\frac{z^2}{R^2}-\alpha_t^2}\right]\cdot\frac{P}{t-R/c_1} \qquad (94)$$

и представляет собой сумму сосредоточенного и распределенного импульсов.

Перейдем к рассмотрению поля переходного излучения в области углов $\delta > \theta_{0t}$ (область III). Во временном интервале $t_{\ell\ell} < t < t_{\ell t}$ звуковое поле определяется боковой волной, соответствующей продольной волне в упругом полупространстве, и описывается потенциалом вида:

$$\varphi^{III}_{n\ell\ell}=\frac{Q\varepsilon n_t^4 H(q_1^{(1)}-\alpha_t)H(\alpha_\ell-q_1^{(1)})}{\pi^2\rho_1 R}\int\limits_{\alpha_\ell}^{q_1^{(1)}}\frac{(2\theta^2-2+n_t^2)^2\theta\sqrt{\alpha_\ell^2-\theta^2}}{G_1(\theta)\,\varepsilon_1(\theta)(M_1\theta-1)}\times$$

$$\times\left[\tilde{W}_1(\theta)+8\varepsilon n_t^4\theta(1-\theta^2)(\theta^2-\alpha_\ell^2)\sqrt{\theta^2-\alpha_t^2}\right]d\theta\,. \qquad (95)$$

Если $t_{бt} < t < R/C_1$, то переходное излучение представляет собой сумму полей двух боковых волн, связанных с продольными и поперечными волнами в твердом теле:

$$\varphi^{\overline{III}}_{пб(l+t)} = \frac{\varepsilon n_t^4 Q H\left(\frac{R}{C_1}-t\right)H(\alpha_t - q_1^{(1)})}{\pi^2 \rho_1 R}\int\limits_{\alpha_l}^{q_1^{(1)}} \frac{(2\theta^2-2+n_t^2)^2 \tilde{W}_1(\theta)\sqrt{\alpha_l^2-\theta^2}\,\theta\, d\theta}{(M_1\theta-1)G_1(\theta)\,\varepsilon_1(\theta)} -$$

$$- \frac{4\varepsilon n_t^4 Q H\left(\frac{R}{C_1}-t\right)H(\alpha_t - q_1^{(1)})}{\pi^2 \rho_1 R}\int\limits_{\alpha_t}^{q_1^{(1)}} \frac{[\tilde{W}_1(\theta)+2\varepsilon^2 n_t^8(\theta^2-\alpha_l^2)](1-\theta^2)(\theta^2-\alpha_l^2)\sqrt{\alpha_t^2-\theta^2}\,\theta\, d\theta}{(M_1\theta-1)G_1(\theta)\,\varepsilon_1(\theta)} -$$

$$- \frac{8\varepsilon^2 n_t^8 Q H\left(\frac{R}{C_1}-t\right)H(\alpha_t - q_1^{(1)})}{\pi^2 \rho_1 R}\int\limits_{\alpha_l}^{\alpha_t} \frac{(2\theta^2-2+n_t^2)^2(1-\theta^2)\theta^2(\alpha_l^2-\theta^2)^{3/2}\sqrt{\theta^2-\alpha_t^2}\, d\theta}{(M_1\theta-1)G_1(\theta)\,\varepsilon_1(\theta)} \qquad (96)$$

Сферическая звуковая волна в области III описывается выражением:

$$\varphi^{\overline{III}}_{псф} = \frac{iQH\left(t-\frac{R}{C_1}\right)}{4\pi^2\rho_1 R M_1^2}\oint\limits_{L(q_1^{(1)},q_2^{(1)})}\left[\left(\theta^2-\frac{1}{M^2}\right)G_1(\theta)\varepsilon_1(\theta)\right]^{-1}\Big[\theta\tilde{W}_1(\theta)W_1(\theta) +$$

$$+M_1\varepsilon^2 n_t^8\tilde{W}_1(\theta)(\theta^2-\alpha_l^2)-32\varepsilon^2 n_t^8\theta(1-\theta^2)^2(\theta^2-\alpha_l^2)^2(\theta^2-\alpha_t^2)(1-M_1\theta)\Big]\theta\, d\theta -$$

$$-\frac{2i\varepsilon^2 n_t^8 Q H\left(t-\frac{R}{c_1}\right) H\left(\alpha_t - \operatorname{Re} q_1^{(1)}\right)}{\pi^2 \rho_1 R} \oint\limits_{L(q_1^{(1)},q_2^{(1)})} \frac{(2\theta^2-2+n_t^2)^2(1-\theta^2)(\alpha_\ell^2-\theta^2)^{3/2}\sqrt{\alpha_t^2-\theta^2}\,\theta^2 d\theta}{(M_1\theta-1)\,G_1(\theta)\,\varepsilon_1(\theta)} +$$

$$+\frac{\varepsilon n_t^4 Q H\left(t-\frac{R}{c_1}\right) H\left(\alpha_t - \operatorname{Re} q_1^{(1)}\right)}{2\pi^2 \rho_1 R} \left\{ \int\limits_{\alpha_\ell}^{q_1^{(1)}} \frac{(2\theta^2-2+n_t^2)^2 \tilde{W}_1(\theta)\sqrt{\alpha_\ell^2-\theta^2}\,\theta\, d\theta}{(M_1\theta-1)\,G_1(\theta)\,\varepsilon_1(\theta)} -\right.$$

$$\left. -4\int\limits_{\alpha_t}^{q_1^{(1)}} \frac{\left[\tilde{W}_1(\theta)+2\varepsilon^2 n_t^8(\theta^2-\alpha_\ell^2)\right](1-\theta^2)(\theta^2-\alpha_\ell^2)\sqrt{\alpha_t^2-\theta^2}\,\theta\, d\theta}{(M_1\theta-1)\,G_1(\theta)\,\varepsilon_1(\theta)} + \text{к.с.}\right\} -$$

$$-\frac{8\varepsilon^2 n_t^8 Q H\left(t-\frac{R}{c_1}\right) H\left(\alpha_t - \operatorname{Re} q_1^{(1)}\right)}{\pi^2 \rho_1 R} \int\limits_{\alpha_\ell}^{\alpha_t} \frac{(2\theta^2-2+n_t^2)^2(1-\theta^2)(\alpha_\ell^2-\theta^2)^{3/2}\sqrt{\theta^2-\alpha_t^2}\,\theta^2 d\theta}{(M_1\theta-1)\,G_1(\theta)\,\varepsilon_1(\theta)} \quad (97)$$

причем асимптотика акустического давления при $R \approx c_1 t$ имеет вид:

$$p_n^{\text{III}}\Big|_{R\approx c_1 t} \approx \frac{Q\,|z|\,\delta(t-R/c_1)}{2\pi R^2\left(\frac{M_1^2 z^2}{R^2}-1\right) G_1\left(\frac{|z|}{R}\right)} \times$$

$$\times\left[\frac{|z|}{R}\tilde{W}_1\left(\frac{|z|}{R}\right) W_1\left(\frac{|z|}{R}\right) + M_1\varepsilon^2 n_t^8 \tilde{W}_1\left(\frac{|z|}{R}\right)\left(\frac{z^2}{R^2}-\alpha_i^2\right) -\right.$$

$$\left. -32\varepsilon^2 n_t^8 \frac{r^4|z|}{R^5}\left(\frac{z^2}{R^2}-\alpha_\ell^2\right)^2\left(\frac{z^2}{R^2}-\alpha_t^2\right)\left(1-\frac{M_1|z|}{R}\right)\right] -$$

$$-\frac{4\varepsilon^2 n_t^8 Q r z^2 H\left(\alpha_t-\frac{|z|}{R}\right)}{\pi R^5 G_1\left(\frac{|z|}{R}\right)\left(\frac{M_1|z|}{R}-1\right)}\left(n_t^2-2\frac{r^2}{R^2}\right)^2\left(\alpha_\ell^2-\frac{z^2}{R^2}\right)^{3/2}\sqrt{\alpha_t^2-\frac{z^2}{R^2}}\,\delta\left(t-\frac{R}{c_1}\right)-$$

$$-\frac{\varepsilon n_t^4 Q|z|H\left(\alpha_t-\frac{|z|}{R}\right)\sqrt{\alpha_\ell^2-\frac{z^2}{R^2}}}{2\pi^2\rho_1 R^2 G_1\left(\frac{|z|}{R}\right)\left(\frac{M_1|z|}{R}-1\right)}\left\{\left(n_t^2-\frac{2r^2}{R^2}\right)^2\tilde{W}_1\left(\frac{|z|}{R}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{4r^2}{R^2}\left[\tilde{W}_1\left(\frac{|z|}{R}\right)+2\varepsilon^2 n_t^8\left(\frac{z^2}{R^2}-\alpha_\ell^2\right)\right]\sqrt{\alpha_\ell^2-\frac{z^2}{R^2}}\sqrt{\alpha_t^2-\frac{z^2}{R^2}}\right\}\cdot\frac{\rho}{t-\frac{R}{c_1}}\cdot \quad (98)$$

4.3. Исследование поля переходного излучения в твердом теле

Из (84), (85), (3) следует, что вертикальные и горизонталь - ные компоненты смещений в продольных и поперечных волнах можно представить в виде следующих интегралов Фурье:

$$u_z^{(\ell)}=-\frac{Q}{4\pi^2\rho_2 c_t^2 v}\int_{-\infty}^{\infty}\omega\,d\omega\int_0^{\infty}\frac{\left(\varkappa_1+\frac{\omega}{v}\right)(\varkappa_t^2-k^2)\varkappa_\ell e^{-i\omega t+i\varkappa_\ell z-\lambda k}}{(\varkappa_1^2-\omega^2/v^2)\,\varkappa_1 S(\omega,k)}J_0(kr)k\,dk, \quad (99)$$

$$u_r^{(l)}=-\frac{iQ}{4\pi^2\rho_2 c_t^2 v}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\omega d\omega\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\left(\varkappa_1+\frac{\omega}{v}\right)(\varkappa_t^2-\kappa^2)e^{-i\omega t+i\varkappa_t z-\lambda\kappa}}{\left(\varkappa_1^2-\frac{\omega^2}{v^2}\right)\varkappa_1 S(\omega,\kappa)}J_1(\kappa r)\kappa^2 d\kappa, \quad (100)$$

$$u_z^{(t)}=-\frac{Q}{2\pi^2\rho_2 c_t^2 v}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\omega d\omega\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\varkappa_l\left(\varkappa_1+\frac{\omega}{v}\right)e^{-i\omega t+i\varkappa_t z-\lambda\kappa}}{\left(\varkappa_1^2-\frac{\omega^2}{v^2}\right)\varkappa_1 S(\omega,\kappa)}J_0(\kappa r)\kappa^3 d\kappa, \quad (101)$$

$$u_r^{(t)}=\frac{iQ}{2\pi^2\rho_2 c_t^2 v}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\omega d\omega\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\varkappa_l\varkappa_t\left(\varkappa_1+\frac{\omega}{v}\right)e^{-i\omega t+i\varkappa_t z-\lambda\kappa}}{\left(\varkappa_1^2-\frac{\omega^2}{v^2}\right)\varkappa_1 S(\omega,\kappa)}J_1(\kappa r)\kappa^2 d\kappa. \quad (102)$$

В интегралах (99), (100), описывающих смещения в продольных волнах, сделаем замену $\omega=c_l\kappa x$, а затем $x=(1-\theta^2)^{-1/2}$. Это позволяет переписать $u_z^{(l)}$ и $u_z^{(t)}$ в виде однократных интегралов по замкнутому контуру L_θ (см.рис.3):

$$u_z^{(l)}=-\frac{iQc_l}{4\pi^2\rho_2 c_t^2 RM_l}\oint\limits_{L_\theta}\frac{(2\theta^2-2+a^2)\theta^2\left(\sqrt{\theta^2+\eta^2}+1/M_l\right)d\theta}{\sqrt{\eta^2+\theta^2}\,S_l(\theta)\,E_l(\theta)\,(\theta^2-\gamma_l^2)}, \quad (103)$$

$$u_r^{(l)}=-\frac{iQrc_l}{4\pi^2\rho_2 c_t^2 RM_l}\oint\limits_{L_\theta}\frac{(2\theta^2-2+a^2)\theta(1-\theta^2)\left(\sqrt{\theta^2+\eta^2}+\frac{1}{M_l}\right)d\theta}{\sqrt{\eta^2+\theta^2}\,S_l(\theta)\,E_l(\theta)\,D_l(\theta)(\theta^2-\gamma_l^2)}. \quad (104)$$

В (103), (104) введены обозначения $M_\ell = v/C_\ell$, $\gamma_\ell^2 = 1 + (1/M_t^2 - 1)/n_\ell^2$.

При $z > C_\ell t$ аналитическая функция $E_\ell(\theta)$ не имеет точек ветвления. При этом интегралы (103), (104) пропорциональны вычетам в полюсе $\theta = \gamma_\ell$ и описывают статические возмущения в твердой среде ($\lambda \to 0$):

$$U^{(\ell)}_{z\,\text{стат}} = \frac{Q\, c_\ell (2\gamma_\ell^2 - 2 + a^2)\gamma_\ell}{2\pi \rho_2 c_t^2 R\, M_\ell S_\ell(\gamma_\ell)\, \varepsilon_\ell(\gamma_\ell)},$$

$$U^{(\ell)}_{r\,\text{стат}} = \frac{Q\, c_\ell r (2\gamma_\ell^2 - 2 + a^2)(1 - \gamma_\ell^2)}{2\pi \rho_2 c_t^2 R\, M_\ell S_\ell(\gamma_\ell)\, \varepsilon_\ell(\gamma_\ell)\, d_\ell(\gamma_\ell)}.$$

В области $z < C_\ell t$ аналитическая функция $E_\ell(\theta)$ имеет точки ветвления $\theta = \theta^{(\ell)}_{1,2}$. Интегралы по берегам разреза, проведенного между этими точками ветвления, описывают вертикальные и горизонтальные смещения в продольной волне, которые в предельном случае точечного источника имеют вид:

$$U^{(\ell)}_z = -\frac{iQc_\ell H\left(t - \frac{R}{c_\ell}\right)}{4\pi^2 \rho_2 c_t^2 R M_\ell} \oint\limits_{L(q_1^{(\ell)}, q_2^{(\ell)})} \frac{(2\theta^2 - 2 + a^2)\theta^2\left(\sqrt{\theta^2 + \eta^2} + \frac{1}{M_\ell}\right) d\theta}{\sqrt{\theta^2 + \eta^2}\, S_\ell(\theta)\, \varepsilon_\ell(\theta)(\theta^2 - \gamma_\ell^2)}, \quad (105)$$

$$U^{(\ell)}_r = -\frac{iQrc_\ell H\left(t - \frac{R}{c_\ell}\right)}{4\pi^2 \rho_2 c_t^2 R M_\ell} \oint\limits_{L(q_1^{(\ell)}, q_2^{(\ell)})} \frac{(2\theta^2 - 2 + a^2)(1 - \theta^2)\theta\left(\sqrt{\theta^2 + \eta^2} + \frac{1}{M_\ell}\right) d\theta}{\sqrt{\theta^2 + \eta^2}\, S_\ell(\theta)\, \varepsilon_\ell(\theta)\, d_\ell(\theta)(\theta^2 - \gamma_\ell^2)}. \quad (106)$$

Интегралы (I05), (I06) вычисляются аналитически вблизи фронта сферической продольной волны, когда $c_\ell t z >> r\sqrt{c_\ell^2 t^2 - R^2}$:

$$\left. u_z^{(\ell)} \right|_{R \lessapprox c_\ell t} \approx \frac{Q c_\ell z^2 H\left(t - \frac{R}{c_\ell}\right)\left(a^2 - \frac{2r^2}{R^2}\right)\left(\sqrt{\frac{z^2}{R^2} + \eta^2} + \frac{1}{M_\ell}\right)}{2\pi \rho_2 c_t^2 R^3 \sqrt{z^2/R^2 + \eta^2}\, S_\ell(z/R)\, M_\ell(z^2/R^2 - \gamma_\ell^2)}, \tag{I07}$$

$$\left. u_r^{(\ell)} \right|_{R \lessapprox c_\ell t} \approx \frac{Q c_\ell r z H\left(t - \frac{R}{c_\ell}\right)\left(a^2 - \frac{2r^2}{R^2}\right)\left(\sqrt{\frac{z^2}{R^2} + \eta^2} + \frac{1}{M_\ell}\right)}{2\pi \rho_2 c_t^2 R^3 \sqrt{z^2/R^2 + \eta^2}\, S_\ell(z/R)\, M_\ell(z^2/R^2 - \gamma_\ell^2)}. \tag{I08}$$

На продолжении траектории источника в твердом теле, т.е. при $r = 0$, из (I05) получаем точное аналитическое выражения для вертикальных смещений:

$$\left. u_z^{(\ell)} \right|_{r=0} = \frac{Q c_\ell^3 t^2 H\left(t - \frac{z}{c_\ell}\right)\left(\frac{2c_\ell^2 t^2}{z^2} - 2 + a^2\right)\left(\sqrt{\frac{c_\ell^2 t^2}{z^2} + \eta^2} + \frac{1}{M_\ell}\right)}{2\pi \rho_2 c_t^2 z^2 \sqrt{c_\ell^2 t^2 + z^2 \eta^2}\, S_\ell\left(\frac{c_\ell t}{z}\right) M_\ell\left(\frac{c_\ell^2 t^2}{z^2} - \gamma_\ell^2\right)}. \tag{I09}$$

Перейдем к вычислению интегралов (I0I), (I02), которые последовательными заменами $\omega = c_t k x$, $x = (1-\theta^2)^{-1/2}$ приводятся к виду:

$$u_z^{(t)} = -\frac{iQ}{2\pi^2 \rho_2 c_t R M_t} \oint\limits_{L_\theta} \frac{\sqrt{\theta^2-\alpha^2}(1-\theta^2)\theta\left(\sqrt{\theta^2+\beta^2}+1/M_t\right)d\theta}{\sqrt{\theta^2+\beta^2}\, S_t(\theta) E_t(\theta)(\theta^2-\gamma_t^2)}, \quad (110)$$

$$u_r^{(t)} = \frac{iQr}{2\pi^2 \rho_2 c_t R M_t} \oint\limits_{L_\theta} \frac{\sqrt{\theta^2-\alpha^2}(1-\theta^2)\theta^2\left(\sqrt{\theta^2+\beta^2}+1/M_t\right)d\theta}{\sqrt{\theta^2+\beta^2}\, S_t(\theta) E_t(\theta) D_t(\theta)(\theta^2-\gamma_t^2)}. \quad (111)$$

где $M_t = v/c_t$, $\gamma_t^2 = 1 + \left(1/M_1^2 - 1\right)/n_t^2$.

В области $z > c_t t$ существуют только статические возмущения, которые в пределе $\lambda \longrightarrow 0$ описываются формулами:

$$u_{z\,стат}^{(t)} = \frac{Q\sqrt{\gamma_t^2-\alpha^2}(1-\gamma_t^2)}{\pi \rho_2 c_t R M_t S_t(\gamma_t) \varepsilon_t(\gamma_t)},$$

$$u_{r\,стат}^{(t)} = -\frac{Qr\sqrt{\gamma_t^2-\alpha^2}(1-\gamma_t^2)}{\pi \rho_2 c_t R M_t S_t(\gamma_t) \varepsilon_t(\gamma_t) d_t(\gamma_t)}.$$

В области $z < c_t t$ смещения в поперечной волне описываются интегралами типа (110), (111) по берегам разреза, проведенного между точками ветвления $\theta = Q_{1,2}^{(t)}$ аналитической функции $E_t(\theta)$. Рассматривать эти интегралы следует отдельно для случаев $\delta < \theta_0$ и $\delta > \theta_0$.

В области IУ (см.рис.2), где $\delta < \theta_0$ и коническая волна отсутствует, смещения в поперечной волне, генерируемой при останов ке и выключении точечного источника масс, имеют следующий интегральный вид:

$$u_z^{(t)} = -\frac{iQH\left(t-\frac{R}{c_t}\right)}{2\pi^2\rho_2 c_t R M_t} \oint\limits_{L(q_1^{(t)},q_2^{(t)})} \frac{\sqrt{\theta^2-\alpha^2}(1-\theta^2)\theta\left(\sqrt{\theta^2+\beta^2}+\frac{1}{M_t}\right)d\theta}{\sqrt{\theta^2+\beta^2}\,S_t(\theta)\,\varepsilon_t(\theta)\,(\theta^2-\gamma_t^2)}, \quad (II2)$$

$$u_r^{(t)} = \frac{iQrH\left(t-\frac{r}{c_t}\right)}{2\pi^2\rho_2 c_t R M_t} \oint\limits_{L(q_1^{(t)},q_2^{(t)})} \frac{\sqrt{\theta^2-\alpha^2}(1-\theta^2)\theta^2\left(\sqrt{\theta^2+\beta^2}+\frac{1}{M_t}\right)d\theta}{\sqrt{\theta^2+\beta^2}\,S_t(\theta)\,\varepsilon_t(\theta)\,d_t(\theta)(\theta^2-\gamma_t^2)}. \quad (II3)$$

Вблизи фронта поперечной сферической волны смещения описыются аналитическими формулами ($\delta < \theta_0$):

$$u_z^{(t)}\Big|_{R \lessapprox c_t t} \approx \frac{Qr^2z\sqrt{z^2/R^2-\alpha^2}\left(\sqrt{z^2/R^2-\alpha^2}+\frac{1}{M_t}\right)H\left(t-\frac{R}{c_t}\right)}{\pi\rho_2 c_t R^4\sqrt{z^2/R^2+\beta^2}\,S_t(z/R)\,M_t\,(z^2/R^2-\gamma_t^2)}, \quad (II4)$$

$$u_r^{(t)}\Big|_{R \lessapprox c_t t} \approx -\frac{Qrz^2\sqrt{z^2/R^2-\alpha^2}\left(\sqrt{z^2/R^2-\alpha^2}+\frac{1}{M_t}\right)H\left(t-\frac{R}{c_t}\right)}{\pi\rho_2 c_t R^4\sqrt{z^2/R^2+\beta^2}\,S_t(z/R)\,M_t(z^2/R^2-\gamma_t^2)}. \quad (II5)$$

В области У, где $\delta > \theta_0$, во временном интервале $t_к < t < R/c_t$ переходное излучение, описываемое векторным потенциалом, представляет собой коническую волну:

$$u_{zк} = \frac{2QH\left(\frac{R}{c_t}-t\right)H(\alpha_t-q_1^{(t)})}{\pi^2\rho_2 c_t R M_t}\int\limits_{\alpha_t}^{q_1^{(t)}}\frac{\sqrt{\alpha^2-\theta^2}(1-2\theta^2)^2(1-\theta^2)\theta\left(\sqrt{\theta^2+\beta^2}+\frac{1}{M_t}\right)d\theta}{\sqrt{\theta^2+\beta^2}\,\tilde{W}_t(\theta)\,\varepsilon_t(\theta)\,(\theta^2-\gamma_t^2)} \quad (II6)$$

$$u_{rк} = -\frac{2QrH\left(\frac{R}{c_t}-t\right)H(\alpha_t-q_1^{(t)})}{\pi^2\rho_2 c_t R M_t}\int\limits_{\alpha_t}^{q_1^{(t)}}\frac{\sqrt{\alpha^2-\theta^2}(1-2\theta^2)^2(1-\theta^2)\theta^2\left(\sqrt{\theta^2+\beta^2}+\frac{1}{M_t}\right)d\theta}{\sqrt{\theta^2+\beta^2}\,\tilde{W}_t(\theta)\,\varepsilon_t(\theta)\,d_t(\theta)(\theta^2-\gamma_t^2)} \quad (II7)$$

Интегралы (II6), (II7) нетрудно вычислить вблизи фронта конической волны:

$$u_{zк}\Big|_{t\gtrsim t_к} \approx -\frac{QH(\alpha-q_1^{(t)})H\left(\frac{R}{c_t}-t\right)n^2\alpha^{3/2}(\alpha-q_1^{(t)})\left(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}+1/M_t\right)}{\pi\rho_2 c_t R\sqrt{\alpha^2+\beta^2}(1-2\alpha^2)^2\sqrt{\frac{r}{R}\sqrt{1-c_t^2t^2/R^2}}\;M_t(\alpha^2-\gamma_t^2)} \quad (II8)$$

$$u_{rк}\Big|_{t\gtrsim t_к} \approx \frac{QH(\alpha-q_1^{(t)})H\left(\frac{R}{c_t}-t\right)n\alpha^{5/2}(\alpha-q_1^{(t)})\left(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}+1/M_t\right)}{\pi\rho_2 c_t R\sqrt{\alpha^2+\beta^2}(1-2\alpha^2)^2\sqrt{\frac{r}{R}\sqrt{1-c_t^2t^2/R^2}}\;M_t(\alpha^2-\gamma_t^2)} \quad (II9)$$

При $t > R/c_t$ смещения в области У соответствуют сферической поперечной волне:

$$u_z^{(t)} = \frac{iQH\left(t - \frac{R}{c_t}\right)}{2\pi^2 \rho_2 c_t R M_t} \oint\limits_{L(q_1^{(t)}, q_2^{(t)})} \frac{(1-\theta^2)\theta\left(\sqrt{\theta^2+\beta^2} + 1/M_t\right)}{\sqrt{\theta^2+\beta^2}\, \tilde{W}_t(\theta)\varepsilon_t(\theta)(\theta^2-\gamma_t^2)} \times$$

$$\times \left\{ \left[4\theta(1-\theta^2) + \frac{\varepsilon}{\sqrt{\theta^2+\beta^2}} \right](\theta^2-\alpha^2) - H(\alpha - \operatorname{Re} q_1^{(t)})(1-2\theta^2)^2 \sqrt{\theta^2-\alpha^2} \right\} d\theta, \qquad (120)$$

$$u_r^{(t)} = -\frac{iQrH\left(t - \frac{R}{c_t}\right)}{2\pi^2 \rho_2 c_t R M_t} \oint\limits_{L(q_1^{(t)}, q_2^{(t)})} \frac{(1-\theta^2)\theta^2\left(\sqrt{\theta^2+\beta^2} + 1/M_t\right)}{\sqrt{\theta^2+\beta^2}\, \tilde{W}_t(\theta)\varepsilon_t(\theta)d_t(\theta)(\theta^2-\gamma_t^2)} \times$$

$$\times \left\{ \left[4\theta(1-\theta^2) + \frac{\varepsilon}{\sqrt{\theta^2+\beta^2}} \right](\theta^2-\alpha^2) - H(\alpha - \operatorname{Re} q_1^{(t)})(1-2\theta^2)^2 \sqrt{\theta^2-\alpha^2} \right\} d\theta. \qquad (121)$$

Вблизи фронта поперечной сферической волны, когда $c_t t z \gg r\sqrt{c_t^2 t^2 - R^2}$, вертикальная и горизонтальная компоненты смещений при $\delta > \theta_0$ описываются приближенными формулами:

$$
u_z^{(t)}\Bigg|_{R\approx c_t t} \approx \left[\frac{Q r^2 z(\alpha^2 - z^2/R^2)\, H(t - R/c_t)}{\pi \rho_2 c_t R^4 \sqrt{z^2/R^2+\beta^2}\ \ \tilde{W}_t(z/R)}\left(4\frac{r^2 z}{R^3} + \frac{\varepsilon}{\sqrt{z^2/R^2+\beta^2}}\right) + \right.
$$

$$
\left. + \frac{2Q r^2 z\,(1-2z^2/R^2)^2 \sqrt{\alpha^2 - z^2/R^2}\, H(\alpha - z/R)}{\pi^2 \rho_2 c_t R^4 \sqrt{z^2/R^2+\beta^2}\ \ \tilde{W}_t(z/R)} \ln\left|\frac{r}{R}\sqrt{1-\frac{c_t^2 t^2}{R^2}}\right|\right] \times
$$

$$
\times\ \frac{\sqrt{z^2/R^2+\beta^2} + 1/M_t}{M_t\,(z^2/R^2 - \gamma_t^2)} \tag{I22}
$$

$$
u_r^{(t)}\Bigg|_{R\approx c_t t} \approx -\left[\frac{Q r z^2(\alpha^2 - z^2/R^2)\, H(t - R/c_t)}{\pi \rho_2 c_t R^4 \sqrt{z^2/R^2+\beta^2}\ \ \tilde{W}_t(z/R)}\left(4\frac{r^2 z}{R^3} + \frac{\varepsilon}{\sqrt{z^2/R^2+\beta^2}}\right) + \right.
$$

$$
\left. + \frac{2Q r z^2(1-2z^2/R^2)^2 \sqrt{\alpha^2 - z^2/R^2}\, H(\alpha - z/R)}{\pi^2 \rho_2 c_t R^4 \sqrt{z^2/R^2+\beta^2}\ \ \tilde{W}_t(z/R)} \ln\left|\frac{r}{R}\sqrt{1-\frac{c_t^2 t^2}{R^2}}\right|\right] \times
$$

$$
\times\ \frac{\sqrt{z^2/R^2+\beta^2} + 1/M_t}{M_t(z^2/R^2 - \gamma_t^2)}\ . \tag{I23}
$$

Анализ выражений для полей звуковой волны в газе и упругих волн в твердом теле показывает, что сейсмоакустическое излучение существует при нулевой скорости источника. Оно связано с выключением неподвижного источника, находящегося на границе раздела газ – твердое тело /6/, и должно описываться формулами, аналогичными полученным в разделе 3 при рассмотрении отражения и преломления звукового импульса. Действительно, в (9I)-(98) члены, описывающие эффекты полного внутреннего отражения переходят в пределе $M_1 \to 0$ в соответствующие части выражений (46), (51), (47), (53), (54), (48)-(50), (57), (58) (с точностью до знака перед коэффициентом, характеризующим источник). В полученных в разделе 3.2 формулах сферическая волна содержит только отраженный звуковой сигнал, тогда как формулы раздела 4.2 описывают при $M_1 \to 0$ сумму падающего и отраженного сферических импульсов.

Полученные в разделе 4.3 выражения для смещений в упругих волнах (105)-(109), (112)-(123) переходят в пределе $M_{\ell,t} \to 0$ соответственно в формулы (63)-(67), (70)-(81) раздела 3.3, описывающие волновое поле преломленного импульса.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе получены функции Грина задач о возбуждении сейсмоакустических волн источниками в виде нормальной к границе раздела однородный газ - однородное твердое тело силы и звукового импульса. Рассмотрено также переходное тормозное излучение акустических и упругих волн точечным изотропным источником массы, равномерно движущимся в газе по нормали к границе раздела однородных газообразного и упругого полупространств и исчезающим в момент касания поверхности твердого тела. Подробно проанализированы формы сигналов в окрестностях фронтов сферических акустической и упругих волн, а также боковых волн в газе и конической волны в твердом теле. На проходящей через источник нормали к границе раздела сред получены точные аналитические выражения для полей акустических и упругих волн.

Практическая ценность результатов работы обусловлена тем, что получены удобные выражения для функций Грина трех рассмотренных выше задач. Эти выражения необходимы при численном моделировании (например, для целей сейсморазведки) сейсмоакустических полей поверхностных источников различных конфигураций. Результаты подобных расчетов требуются при разработке сейсмических антенн, позволяющих формировать сигналы с наперед заданными амплитудой, длительностью, спектром и характеристиками направленности.

Использованный в работе подход к рассмотрению возбуждения упру -

гих волн импульсными источниками, основанный на методе контурного интегрирования /2/, отличается простотой и наглядностью и может быть применен для решения более сложных задач о генерации упругих волн в дискретно-слоистых средах.

При глубинном сейсмическом зондировании Земли и дистанционном (по акустическому сигналу) определении параметров грунта необходимо знать волновые поля на вертикали под или над источником. Соответствующие расчеты легко провести с помощью полученных в работе точных аналитических выражений для функций Грина в точках, лежащих на проходящей через источник нормали к границе раздела газообразной и твердой сред. Кроме того, точные аналитические результаты необходимы для проверки правильности работы и контроля точности алгоритмов численного решения задач о генерации сейсмоакустических волн в упругих и газообразных средах.

Автор благодарен Б.Е.Немцову за обсуждение ряда возникших в процессе выполнения работы вопросов и просмотр рукописи, а также В.В.Гущину и Ю.В.Петухову за доброжелательную критику.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lamb H. On the propagation of tremors over the surface of an elastic solid. // Philos.Trans.Roy.Soc.London. - 1904. - V. A203. - P. 1-42.

2. Курин В.В., Немцов Б.Е., Эйдман В.Я. Предвестник и боковые волны при отражении импульсов от границы раздела двух сред.// УФН. - 1985. - Т.147, Вып.1. - С.157-180.

3. Иванов И.Д. Об отражении сферического импульса от границы раздела жидкой и твердой сред.//Акуст.ж. - 1975. - Т.21, Вып.3. - С.415-420.

4. Иванов И.Д. Отражение единичного сферического импульса от границы раздела жидкой и твердой сред.//Акуст.ж. - 1975. - Т.21, Вып.4. - С.551-558.

5. De Hoop A.T., van der Hijden J.H.M.T. Generation of acoustic waves by an impulsive point source in a fluid/solid configuration with a plane boundary. // J.Acoust.Soc.Amer. - 1984. - V.75, N 6. - P.1709-1715.

6. Докучаев В.П., Разин А.В. Переходное тормозное излучение поверхностных волн на границе раздела атмосфера - Земля.//Изв.АН СССР. Физика Земли. - 1987. - № 8. - С.56-61.

7. Немцов Б.Е., Эйдман В.Я. Переходное излучение в акустике. Точные решения.//Акуст.ж. - 1987. - Т.33, № 2. - С.362-363.

8. Немцов Б.Е., Разин А.В. Излучение звука источником массы, пересекающим границу раздела сред.//Препринт № 221. - Горький: НИРФИ. - 1986. - 37 с.

Андрей Владимирович Разин

ВОЗБУЖДЕНИЕ СЕЙСМОАКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН
ИМПУЛЬСНЫМИ ПОВЕРХНОСТНЫМИ ИСТОЧНИКАМИ

Подписано в печать 25.05.89 г. Мц 00708. Формат 60х84/16
Бумага писчая. Печать офсетная. Объем 4,25 усл.п.л.
Заказ 4905. Тираж 100. Бесплатно

Отпечатано на ротапринте НИРФИ