Министерство высшего и среднего специального образования
Р С Ф С Р

Горьковский ордена Трудового Красного Знамени
научно-исследовательский радиофизический институт (НИРФИ)

П р е п р и н т № 276

ПРИЛОЖЕНИЕ ТЕОРИИ ОПЕРАТОРОВ К ЗАДАЧЕ СПЕКТРАЛЬНОГО ОЦЕНИВАНИЯ

Р.А.Угриновский

Горький 1989

У г р и н о в с к и й   Р. А.

ПРИЛОЖЕНИЕ ТЕОРИИ ОПЕРАТОРОВ К ЗАДАЧЕ СПЕКТРАЛЬНОГО ОЦЕНИВАНИЯ // Препринт № 276. - Горький: НИРФИ. - 1989 г. - 35 с.

УДК 517.2:681.3

Рассматривается задача оценивания спектральной плотности мощности по конечному числу отсчетов функции корреляции как задача о продолжении положительно-определенной последовательности. Предложен конструктивный метод построения таких продолжений, основанный на теории расширения изометрических операторов. Используя интегральное представление изометрического оператора, получен конструктивный способ построения некоторого семейства спектральных оценок. Приводятся результаты численного моделирования на ЭВМ.

В В Е Д Е Н И Е

В ряде случаев обработка результатов физического эксперимента сводится к оцениванию спектральной плотности мощности (СПМ) стационарного случайного процесса по конечному числу отсчетов функции корреляции. К настоящему времени для решения подобных задач разработаны, помимо традиционного преобразования Фурье, методы, позволяющие по данным эксперимента строить оценку СПМ, обладающую рядом полезных свойств, в частности, сверхразрешением /I-4/. К таким методам относится метод максимального правдоподобия, метод теплового шума, а также группа методов, использующих априорную информацию о неотрицательности СПМ и сохраняющих связь с заданными отсчетами корреляционной функции. Примером метода сверхразрешения из этой группы может служить хорошо известный метод максимальной энтропии (ММЭ) /4-6/.

Математическая постановка задачи предполагает известным набор комплексных чисел $c_0, c_1, \ldots, c_N$ ($c_0 > 0$, $N \in \mathbb{N}$), связанных с неизвестной неотрицательной функцией $S(\theta)$, являющейся СПМ процесса, следующими соотношениями:

$$\int_0^{2\pi} S(\theta)e^{ik\theta}d\theta = c_k, \qquad k = 0,1,\dots,N.$$

Требуется по этому набору чисел, т.е. по $c_0, c_1, \dots, c_N$ найти функцию $\hat{S}(\theta)$ - оценку СПМ (желательно обладающую сверхразрешением), для которой

$$\begin{aligned} &1)\ \hat{S}(\theta) \geq 0, \\ &2)\ \int_0^{2\pi} \hat{S}(\theta)e^{ik\theta}d\theta = c_k, \qquad k = 0,1,\dots,N. \end{aligned} \tag{A}$$

Эта задача известна в литературе под названием тригонометрической проблемы моментов и достаточно полно изучена в /7/. Ниже мы подойдем к этой задаче несколько с иных позиций: используя методику работы /8/ и некоторые дополнительные построения,получим конструктивный способ построения семейства спектральных оценок $\hat{S}(\theta)$ и изучим их свойства.

Будем придерживаться следующей схемы изложения: в разд. I приведем строгую постановку задачи и кратко изложим ряд уже известных в литературе результатов. Затем, в разд. 2-3, используя теорию расширения изометрических операторов, получим эти же результаты и конструкцию для вычисления спектральных оценок. В разд. 4 приведем результаты численного моделирования на ЭВМ.

I. Постановка задачи

Рассмотрим набор комплексных чисел $c_0, c_1, \dots, c_N$, где $c_0 > 0$, $N \in \mathbb{N}$. Дополним его числами $c_{-N}, c_{-N+1}, \dots, c_{-1}$, где

$$c_{-k} = \overline{c}_k, \qquad k = 1,2,\dots,N$$

и образуем теплицевы матрицы $D_k = \| c_{j-m} \|_0^k$ при $k = \overline{0,N}$.

Будем предполагать, что

$$\det D_k \neq 0, \quad k = 0,1,\dots,N,$$

т.е. заданный набор чисел $c_0, c_1, \dots, c_N$ невырожден.

Требуется найти функцию $\hat{S}(\theta)$, определенную и неотрицательную на интервале $[0, 2\pi]$, для которой

$$\int_0^{2\pi} e^{ik\theta}\,\hat{S}(\theta)\,d\theta = c_k, \quad k = \overline{0,N}. \tag{A}$$

Критерий разрешимости этой задачи дает

<u>Теорема I</u> /7/. Для существования решения задачи (A) необходимо и достаточно, чтобы последовательность $\{c_k\}_0^N$ удовлетворяла условию положительной определенности:

$$\sum_{j,k=0}^{N} c_{j-k}\,\xi_j\,\bar{\xi}_k \geq 0, \quad \forall\, \xi \in C^{N+1}. \tag{ПО}$$

Необходимость в положительной определенности последовательности $\{c_k\}_0^N$ очевидным образом следует из тождества

$$\sum_{j,k=0}^{N} c_{j-k}\,\xi_j\,\bar{\xi}_k = \int_0^{2\pi} \hat{S}(\theta)\left|\sum_{k=0}^{N} e^{ik\theta}\xi_k\right|^2 d\theta.$$

справедливого для любых комплексных чисел $\xi_0, \dots, \xi_k$.

Доказательство достаточности несколько сложнее и будет дано в разд. 2 после некоторых вспомогательных построений.

Отметим, что утверждения теоремы остаются в силе и для вырожденных последовательностей $\{c_k\}_0^N$. Как известно /5,6/, в этом случае задача (A) имеет единственное решение. Однако этот случай в данной работе мы затрагивать не будем.

Везде в дальнейшем относительно чисел $c_0, c_1, \dots, c_N$ будем предполагать, что они образуют невырожденную положительно-определенную последовательность.

В такой постановке задача рассматривалась в /5/, где показано, что решение задачи (А) может быть получено путем построения последовательности $\{\hat{c}_k\}_0^\infty$, являющейся положительно-определенным продолжением последовательности $\{c_k\}_0^N$, при этом последовательность $\{\hat{c}_k\}_0^\infty$ строится по индукции:

$$\hat{c}_k = c_k \qquad \text{при} \qquad k = 0,1,\dots,N,$$

а последующие члены строятся по предыдущим исходя из соотношения

$$\hat{c}_{k+1} = \frac{(-1)^{k+1}}{\det \hat{D}_{k-1}} \det \begin{Vmatrix} \hat{c}_1 & \hat{c}_2 \dots & \hat{c}_k & 0 \\ \hat{c}_0 & \hat{c}_1 \dots & \hat{c}_{k-1} & \hat{c}_k \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hat{c}_{-k+1} & \hat{c}_{-k+2} \dots & \hat{c}_0 & \hat{c}_1 \end{Vmatrix} + re^{i\beta} \frac{\det \hat{D}_k}{\det \hat{D}_{k-1}}, \quad k \geq N,$$

где $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \beta \leq 2\pi$ – произвольные числа; $\hat{D}_k = \| \hat{c}_{j-m} \|_0^k$.

Таким образом, каждый последующий член последовательности продолжения строится по предыдущим членам. Точнее, он выбирается внутри некоторого круга, построенного по этим членам; первое слагаемое – это центр круга, а отношение $\dfrac{\det \hat{D}_k}{\det \hat{D}_{k-1}}$ – его радиус; число $re^{i\beta}$ отвечает за выбор конкретного продолжения и на каждом шаге может быть вообще говоря свое.

2. Построение продолжений

I. Рассмотрим пространство $(N+1)$-мерных векторов (более строго вектор-столбцов) C^{N+1} и определим в нем билинейную форму (ξ, η):

$$\forall \xi, \eta \in C^{N+1},$$

$$(\xi,\eta) \overset{def}{=} \sum_{j,k=1}^{N} c_{j-k}\, \xi_j\, \overline{\eta}_k \,. \qquad \text{(БФ)}$$

Утверждение I: Билинейная форма (БФ) задает в C^{N+1} скалярное произведение.

Для доказательства этого утверждения достаточно проверить справедливость аксиом скалярного произведения. Аксиомы линейности и эрмитовой сопряженности проверяются непосредственно; аксиома неотрицательности выражения (ξ,ξ) выполняется в силу условия (ПО), а импликация $(\xi,\xi)=0 \Rightarrow \xi=0$ следует из условия невырожденности последовательности $c_0, c_1, \dots, c_N$. Таким образом, утверждение I доказано.

Поскольку C^{N+1} - полное пространство, то введенная билинейная форма (БФ) превращает C^{N+1} в полное гильбертово пространство H :

2. Рассмотрим в гильбертовом пространстве H следующие множества векторов:

$$G=\{\xi:\xi=(\xi_0,\dots,\xi_{N-1},0)^T\}, \qquad G' \doteq \{\xi':\xi'=(0,\xi_0,\dots,\xi_{N-1})^T\}.$$

Очевидно, введенные множества G и G' являются N -мерными подпространствами $N+1$ -мерного пространства H и определяют в нем два одномерных подпространства D и D', таких что

$$G \oplus D = H, \qquad G' \oplus D' = H.$$

Обозначим нормированные базисные вектора этих подпространств через d и d' соответственно и найдем их компоненты.

Для этого рассмотрим произвольный вектор $\xi=(\xi_0,\dots,\xi_{N-1},0)^T \in G$

и вектор $g=(g_0,\dots,g_N)^T\in D$. В силу ортогональности подпространств G и D $(\xi,g)=0$. Но так как

$$(\xi,g)=\sum_{k=0}^{N-1}\xi_k\sum_{j=0}^{N}c_{k-j}\bar{g}_j\,,$$

то, в силу произвольности вектора ξ,

$$\sum_{j=0}^{N}c_{k-j}\bar{g}_j=0,\quad k=\overline{0,N-1}\,,$$

то есть

$$\sum_{j=0}^{N-1}c_{j-k}g_j=-c_{N-k}g_N\,,\quad k=\overline{0,N-1}.$$

Не уменьшая общности, можно считать, что $g_N=1$. Тогда остальные компоненты вектора g можно найти как решения системы линейных уравнений

$$\sum_{j=0}^{N-1}c_{j-k}g_j=-c_{N-k}\,,\quad k=\overline{0,N-1}\,. \tag{2.I}$$

Нормируя вектор $g\in H$, получим компоненты вектора d, т.е.

$$d=g/\|g\|\,,$$

где $\|g\|=\sqrt{(g,g)}$ - норма в H вектора g. Аналогично находим компоненты вектора d':

$$d'=g'/\|g'\|\,,$$

где $g'=(g'_0,\dots,g'_N)$ - вектор, у которого $g'_0=1$, а остальные компоненты удовлетворяют системе линейных уравнений:

$$\sum_{j=1}^{N}c_{j-k}g'_j=-\bar{c}_k\,,\quad k=\overline{1,N}\,. \tag{2.2}$$

Между компонентами векторов d и d' имеется простая связь:

$$d'_K = \overline{d}_{N-K}, \quad K = \overline{0,N}. \qquad (2.3)$$

Для доказательства этого соотношения сделаем в (2.2) замену индексов K на $N-K$ и j на $N-j$. В результате получим систему линейных уравнений

$$\sum_{j=0}^{N-1} c_{K-j} g'_{N-j} = -\overline{c}_{N-K}, \quad K = \overline{0,N-1},$$

откуда

$$\sum_{j=0}^{N-1} c_{j-K} \overline{g'_{N-j}} = -c_{N-K}, \quad K = \overline{0,N-1}. \qquad (2.4)$$

Сравнивая (2.I) и (2.4) и учитывая невырожденность этих систем (так как $D_{N-1} \neq 0$), заключаем, что при $j = \overline{0,N-1}$

$$g'_{N-j} = \overline{g}_j.$$

Кроме того, $g_N = \overline{g}'_0$, так как $g_N = g'_0 = 1$. Но тогда

$$\|g\|^2 = \sum_{K=0}^{N} g_K \sum_{j=0}^{N} c_{K-j} \overline{g}_j = \sum_{K=0}^{N} \overline{g}'_{N-K} \sum_{j=0}^{N} c_{K-j} g'_{N-j} =$$

$$= \sum_{K=0}^{N} \overline{g}'_K \sum_{j=0}^{N} c_{j-K} g'_j = \sum_{j=0}^{N} g'_j \sum_{K=0}^{N} c_{j-K} \overline{g}'_K = \|g'\|^2,$$

то есть $\|g\|^2 = \|g'\|^2$. Поэтому и

$$d'_K = d_{N-K}, \quad K = 0,N.$$

Соотношение (2.3) доказано.

3. Зададим теперь в пространстве H оператор $V : G \to G'$ следующим соотношением:

$$V\begin{pmatrix}\xi_0\\ \vdots\\ \xi_{N-1}\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \xi_0\\ \vdots\\ \xi_{N-1}\end{pmatrix}. \qquad (0)$$

Действие оператора $V : G \to G'$ можно рассматривать как умноженные матрицы Фробениуса

$$\begin{Vmatrix} 0 & \dots & 0 & p_0 \\ 1 & \dots & 0 & p_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & p_N \end{Vmatrix}$$

с произвольным последним столбцом на элементы из G. Результат этого умножения есть элемент подпространства G'. Таким образом, подпространство G выступает в качестве области определения оператора V, подпространство G' – в качестве его области значений.

Из определения оператора $V : G \to G'$ непосредственно следует, что

$$(V\xi, V\eta) = (\xi, \eta), \qquad \forall\, \xi, \eta \in G,$$

то есть оператор $V : G \to G'$ изометрический.

Рассмотрим теперь введенные в п. 2 подпространства D и D'. Согласно принятой в теории операторов терминологии, они являются дефектными подпространствами изометрического оператора V. Также, следуя терминологии пару чисел $(\dim D, \dim D')$, будем называть индексом дефекта изометрического оператора V.

Очевидно, в нашем случае $\dim D = \dim D' = 1$. Таким образом, имеет место

<u>Утверждение 2</u>: Оператор $V : G \to G'$, определенный соотноше-

нием (0), является изометрическим оператором с индексом дефекта (I,I).

Из общей теории линейных операторов известно, что любой изометрический оператор с равными дефектными числами (т.е. равными размерностями дефектных подпространств) допускает унитарное расширение /9/, т.е. существует гильбертово пространство $H^+ \supset H$ и оператор $U^+ : H^+ \to H^+$ такие, что

I) $\forall f \in G, \quad U^+ f = V f$,

2) $\forall f, g \in H^+, \quad (U^+ f, U^+ g)_+ = (f, g)_+$,

где через $(\cdot, \cdot)_+$ обозначено скалярное произведение в пространстве H^+ .

Учитывая этот факт, можно доказать достаточность условий теоремы I из разд. I.

Действительно, пусть E_θ - спектральная функция унитарного оператора $U^+ : H^+ \to H^+$, являющегося унитарным расширением изометрического оператора $V : G \to G'$. Положим

$$\sigma(\theta) = (E_\theta, \delta_0, \delta_0) \text{, где } \delta_0 = (1,0,\dots,0)^T \in C^{N+1} \text{ и } \hat{S}(\theta) = \frac{d\sigma(\theta)}{d\theta}.$$

Тогда, очевидно,

$$c_k = ((U^+)^k \delta_0, \delta_0) = (V^k \delta_0, \delta_0) = \int_0^{2\pi} e^{ik\theta} d(E_\theta \delta_0, \delta_0) = \int_0^{2\pi} e^{ik\theta} \hat{S}(\theta) d\theta .$$

Таким образом, теорема доказана.

4. Пространство H^+ и оператор $U^+ : H^+ \to H^+$ можно построить и в явном виде.

С этой целью рассмотрим пространство H^+ , состоящее из элементов вида

$$f^+ = [f_1, f_2], \qquad f_1, f_2 \in H.$$

Зададим в нем билинейную форму

$$(f^+, g^+)_+ = (f_1, g_1) + (f_2, g_2).$$

Как легко проверить, эта билинейная форма задает в H^+ скалярное произведение. Элементы пространства H^+ вида $[f_1, 0]$ и $[f_2, 0]$ естественно рассматривать как элементы пространства H^+, тогда, очевидно,

$$H^+ = H \oplus H \quad \text{и} \quad H^+ \supseteq H,$$

где H^+ – полное гильбертово пространство.

Структуру пространства H^+ отражают следующие соотношения:

$$H^+ = G_1 \oplus G_2 \oplus D_1 \oplus D_2 \quad \text{и} \quad H^+ = G_1' \oplus G_2' \oplus D_1' \oplus D_2',$$

где

$$G_1 = \{[f_1, 0],\ f_1 \in G\}, \qquad G_1' = \{[f_1, 0],\ f_1 \in G'\}.$$

$$G_2 = \{[0, f_2],\ f_2 \in G\}, \qquad G_2' = \{[0, f_2],\ f_2 \in G'\}.$$

$$D_1 = \{[f_1, 0],\ f_1 \in D\}, \qquad D_1' = \{[f_1, 0],\ f_1 \in D'\}.$$

$$D_2 = \{[0, f_2],\ f_2 \in D\}, \qquad D_2' = \{[0, f_2],\ f_2 \in D'\}.$$

Обозначим нормированные базисные вектора подпространств D_1, D_2, D_1' и D_2' соответственно через d_1, d_2, d_1' и d_2' (очевидно, по компонентам $d_1 = d_2 = d$, $d_1' = d_2' = d'$) и рассмотрим произвольный вектор $f^+ \in H^+$. Представим его в виде

$$f^+ = [\xi_1, \xi_2] + [\vartheta_1 d_1, \vartheta_2 d_2], \text{ где } [\xi_1, \xi_2] \in G_1 \oplus G_2. \tag{2.5}$$

Зададим теперь оператор $U^{+}_{\varphi,\beta}: H^{+} \to H^{+}$ следующим образом:

$$U^{+}_{\varphi,\beta} f^{+} = [V\xi_1, V\xi_2] + e^{i\beta}[(\nu_1\cos\varphi - \nu_2\sin\varphi)d_1', (\nu_1\sin\varphi + \nu_2\cos\varphi)d_2'] \qquad (2.6)$$

где $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\beta = [0, 2\pi]$. Очевидно, оператор $U^{+}_{\varphi,\beta}$ определен во всем пространстве H^{+}.

<u>Утверждение 3</u>: Оператор $U^{+}_{\varphi,\beta}: H^{+} \to H^{+}$ являются унитарным расширением изометрического оператора V.

Для доказательства достаточно проверить свойства I) и 2) из определения унитарного расширения.

Возьмем произвольный элемент $\xi \in G$. Ему соответствует элемент $\xi^{+} = [\xi, 0] \in H$. Поэтому

$$U^{+}_{\varphi,\beta}\xi = U^{+}_{\varphi,\beta}\xi^{+} = [V\xi, V0] = V\xi,$$

что и составляет содержание свойства I).

Для проверки условия унитарности возьмем два произвольных элемента: f^{+} и g^{+} из H^{+}, представим их в виде (2.5) и затем вычислим два скалярных произведения: $(f^{+}, g^{+})_{+}$ и $(U^{+}_{\varphi,\beta}f^{+}, U^{+}_{\varphi,\beta}g^{+})_{+}$. Имеем

$$f^{+} = [\xi_1, \xi_2] + [\nu_1 d, \nu_2 d], \quad \xi_1, \xi_2 \in G,$$
$$g^{+} = [\eta_1, \eta_2] + [\mu_1 d, \mu_2 d], \quad \eta_1, \eta_2 \in G.$$

Тогда

$$(U^{+}_{\varphi,\beta}f^{+}, U^{+}_{\varphi,\beta}g^{+})_{+} = ([V\xi_1, V\xi_2], [V\eta_1, V\eta_2])_{+} +$$
$$+ e^{i\beta}([(\nu_1\cos\varphi - \nu_2\sin\varphi)d', (\nu_1\sin\varphi + \nu_2\cos\varphi)d'], [V\eta_1, V\eta_2])_{+} +$$
$$+ e^{-i\beta}([V\xi_1, V\xi_2], [(\mu_1\cos\varphi - \mu_2\sin\varphi)d', (\mu_2\cos\varphi + \mu_1\sin\varphi)d'])_{+} +$$

$$+\Big(\big[(\nu_1\cos\varphi-\nu_2\sin\varphi)d',(\nu_1\sin\varphi+\nu_2\cos\varphi)d'\big],\big[(\mu_1\cos\varphi-$$
$$-\mu_2\sin\varphi)d',(\mu_2\cos\varphi+\mu_1\sin\varphi)d'\big]\Big)_+=(V\xi_1,V\eta_1)+$$
$$+(V\xi_2,V\eta_2)+e^{i\beta}\big((\nu_1\cos\varphi-\nu_2\sin\varphi)d',V\eta_1\big)+e^{i\beta}\big((\nu_1\sin\varphi+$$
$$+\nu_2\cos\varphi)d',V\eta_2\big)+e^{-i\beta}\big(V\xi_1,(\mu_1\cos\varphi-\mu_2\sin\varphi)d'\big)+$$
$$+e^{-i\beta}\big(V\xi_2,(\mu_2\cos\varphi+\mu_1\sin\varphi)d'\big)+\big((\nu_1\cos\varphi-\nu_2\sin\varphi)d',$$
$$(\mu_1\cos\varphi-\mu_2\sin\varphi)d'\big)+\big((\nu_1\sin\varphi+\nu_2\cos\varphi)d',(\mu_2\cos\varphi+$$
$$+\mu_1\sin\varphi)d'\big)=(\xi_1,\eta_1)+(\xi_2,\eta_2)+(\nu_1\cos\varphi-\nu_2\sin\varphi)\times$$
$$\times\overline{(\mu_1\cos\varphi-\mu_2\sin\varphi)}\,\|d'\|^2+(\nu_1\sin\varphi+\nu_2\cos\varphi)\times$$
$$\times\overline{(\mu_2\cos\varphi+\mu_1\sin\varphi)}\,\|d'\|^2=\big([\xi_1,\xi_2],[\eta_1,\eta_2]\big)_++\nu_1\bar\mu_1+\nu_2\bar\mu_2;$$

$$(f^+,g^+)_+=\big([\xi_1,\xi_2],[\eta_1,\eta_2]\big)_++\big([\nu_1 d,\nu_2 d],[\mu_1 d,\mu_2 d]\big)_+=$$
$$=\big([\xi_1,\xi_2],[\eta_1,\eta_2]\big)_++(\nu_1 d,\mu_1 d)+(\nu_2 d,\mu_2 d)=$$
$$=\big([\xi_1,\xi_2],[\eta_1,\eta_2]\big)_++\nu_1\bar\mu_1+\nu_2\bar\mu_2 .$$

Сравнивая полученные выражения, приходим к равенству

$$(U^+_{\varphi,\beta}f^+,\ U_{\varphi,\beta}g^+)=(f^+,g^+),\qquad \forall f^+,g^+\in H^+,$$

что и означает унитарность оператора $U_{\varphi,\beta}:H^+\to H^+$. Утверждение 3 доказано.

5. Рассмотрим теперь часть оператора $U^+_{\varphi,\beta}:H^+\to H^+$, дейст-

вующую из пространства H в H. Очевидно, это есть некоторый оператор $U_{\varphi,\beta}: H \to H$, который элементы $f = \xi + \nu_1 d$ пространства H, где $\xi \in G$ преобразует по закону

$$U_{\varphi,\beta}(\xi + \nu_1 d) = V\xi + \nu_1 e^{i\beta}\cos\varphi\, d', \quad \xi \in G.$$

По определению оператор $U_{\varphi,\beta}: H \to H$ является ортогональным расширением оператора V /10/.

Отметим связь этого оператора с последовательностью продолжения $\{\hat{c}_k\}_0$. Обозначим $\delta_k = (\delta_{0k}, \delta_{1k}, \dots, \delta_{Nk})^T$, $k \in \mathbb{N}$.

Утверждение 4: Имеют место соотношения

$$(U^k_{\varphi,\beta}\,\delta_0, \delta_0) = c_k, \quad 0 \le k \le N, \tag{2.7}$$

$$(U^{N+1}_{\varphi,\beta}\delta_0,\delta_0) = \frac{(-1)^{N+1}}{\det D_{N-1}} \det \begin{Vmatrix} c_1, c_2, \dots, c_N, 0 \\ c_0, c_1, \dots, c_{N-1}, c_N \\ \dots\dots\dots\dots \\ c_{-N+1}, c_{-N+2}, \dots, c_0, c_1 \end{Vmatrix} + \cos\varphi\, e^{i\beta}\frac{\det D_N}{\det D_{N-1}}. \tag{2.8}$$

Доказательство: Соотношение (2.7) очевидно и использовалось нами в п. 3 при доказательстве теоремы разд. I. Докажем соотношение (2.8).

Имеем $U^{N+1}_{\varphi,\beta}\delta_0 = U_{\varphi,\beta}\delta_N$. Разложим вектор δ_N по ортогональным составляющим G и D:

$$\delta_N = \xi + g,$$

где $\xi \in G$, а g - вектор из D, введенный в п. 2 при вычислении компонент векторов d и d'. Тогда

$$(U^{N+1}_{\varphi,\beta}\delta_0,\delta_0) = (V\xi,\delta_0) + e^{i\beta}\cos\varphi(g',\delta_0) = -\sum_{k=0}^{N-1} g_k c_{k+1} + e^{i\beta}\cos\varphi\sum_{k=0}^{N} g'_k c_k.$$

Запишем решения систем (2.I) и (2.2) по правилу Крамера:

$$g_K = -\frac{\Delta_K}{\det D_{N-1}}, \qquad K = 0,1,\ldots,N-1;$$

$$g'_K = -\frac{\Delta'_K}{\det D_{N-1}}, \qquad K = 1,2,\ldots,N,$$

где

$$\Delta_K = \det\begin{Vmatrix} C_0,\ldots,C_{K-1}, & C_N, C_{K+1},\ldots,C_{N-1} \\ C_{-1},\ldots,C_{K-2}, & C_{N-1}, C_K,\ldots,C_{N-2} \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ C_{-N+1},\ldots,C_{K-N}, & C_1, C_{K-N+2},\ldots,C_0 \end{Vmatrix},$$

$$\Delta'_K = \det\begin{Vmatrix} C_0,\ldots,C_{K-1}, & \overline{C}_1, & C_{K+1},\ldots,C_{N-1} \\ C_{-1},\ldots,C_{K-2}, & \overline{C}_2, & C_K,\ldots,C_{N-2} \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ C_{-N+1},\ldots,C_{K-N}, & \overline{C}_N, & C_{K-N+2},\ldots,C_0 \end{Vmatrix}.$$

Тогда

$$(U^{N+1}_{\varphi,\beta}\delta_0,\delta_0) = \frac{1}{\det D_{N-1}}\sum_{K=0}^{N-1} C_{K+1}\Delta_K + e^{i\beta}\cos\varphi\left(C_0 - \frac{1}{\det D_{N-1}}\sum_{K=1}^{N} C_K\Delta'_K\right) =$$

$$= \frac{1}{\det D_{N-1}}\sum_{K=0}^{N-1} C_{K+1}\det\begin{Vmatrix} C_0,\ldots,C_{K-1}, & C_N, & C_{K+1},\ldots,C_{N-1} \\ C_{-1},\ldots,C_{K-2}, & C_{N-1}, & C_K,\ldots,C_{N-2} \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ C_{-N+1},\ldots,C_{K-N}, & C_1, & C_{K-N+2},\ldots,C_0 \end{Vmatrix} +$$

$$+ e^{i\beta}\cos\varphi\left(C_0 - \frac{1}{\det D_{N-1}}\sum_{K=1}^{N} C_K\det\begin{Vmatrix} C_0,\ldots,C_{K-1}, & \overline{C}_1, & C_{K+1},\ldots,C_{N-1} \\ C_{-1},\ldots,C_{K-2}, & \overline{C}_2, & C_K,\ldots,C_{N-2} \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ C_{-N+1},\ldots,C_{K-N}, & \overline{C}_N, & C_{K-N+2},\ldots,C_0 \end{Vmatrix}\right) =$$

$$= \frac{1}{\det D_{N-1}}\sum_{K=0}^{N-1} C_{K+1}(-1)^{N+1-K}\det\begin{Vmatrix} C_0,\ldots,C_{K-1}, & C_{K+1},\ldots,C_{N-1}, & C_N \\ C_{-1},\ldots,C_{K-2}, & C_K,\ldots,C_{N-2}, & C_{N-1} \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots \\ C_{-N+1},\ldots,C_{K-N}, & C_{K-N+2},\ldots,C_0, & C_1 \end{Vmatrix} +$$

$$+e^{i\beta}\cos\varphi\frac{1}{\det D_{N-1}}\left(\sum_{k=1}^{N}c_k(-1)^k\det\begin{Vmatrix}c_{-1}, c_0, \dots, c_{k-1}, c_{k+1}, \dots, c_{N-1}\\ c_{-2}, c_{-1}, \dots, c_{k-2}, c_k, \dots, c_{N-2}\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ c_{-N}, c_{-N+1}, \dots, c_{k-N}, c_{k-N+2}, \dots, c_0\end{Vmatrix}+c_0\det\begin{Vmatrix}c_0, c_1, \dots, c_{N-1}\\ c_{-1}, c_0, \dots, c_{N-2}\\ \dots\dots\\ c_{-N+1}, \dots, c_0\end{Vmatrix}\right)=$$

$$=\frac{(-1)^{N+1}}{\det D_{N-1}}\det\begin{Vmatrix}c_1 & , c_2 & , \dots, & c_N & , 0\\ c_0 & , c_1 & , \dots, & c_{N-1}, & c_N\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ c_{-N+1}, & c_{-N+2} & & c_0 & , c_1\end{Vmatrix}+e^{i\beta}\cos\varphi\frac{\det D_N}{\det D_{N-1}}.$$

Соотношение (2.8) доказано.

Из утверждения 4 непосредственно вытекает следствие: продолжение невырожденной положительно-определенной последовательности $\{c_k\}_0^N$ на один шаг полностью определяются ортогональными расширениями введенного в п. 3 оператора $V: G \to G'$.

Очевидно, каждое такое ортогональное расширение определяется параметром $\rho = \cos\varphi\, e^{i\beta}$, $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\beta \in [0, 2\pi]$, т.е. некоторой точкой внутри круга $|\rho| \leq 1$.

Последовательность $\{\hat{c}_k\}_0^\infty$, являющуюся положительно определенным продолжением последовательности $\{c_k\}_0^N$, теперь можно построить по индукции исходя из соотношения

$$\hat{c}_k = (U^k_{\varphi,\beta}\delta_0, \delta_0), \quad k = 0, 1, \dots, N+1.$$

Отметим, что на каждом шаге параметры (φ, β) могут быть различными.

Построив таким путем бесконечную последовательность $\{\hat{c}_k\}$, мы можем теперь определить спектральную оценку $\hat{S}(\theta)$:

$$\hat{S}(\theta) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\hat{c}_k e^{-ik\theta}.$$

3. Описание спектральных оценок

В этом параграфе, используя интегральное представление изометрического оператора, мы получим конструктивный способ вычисления спектральных оценок, отвечающих последовательности $\{\hat{c}_k\}_0^\infty$, построенной по числам $c_0, c_1, \ldots, c_N$ $(c_0>0)$ и некоторому фиксированному числу $\rho=\cos\varphi\, e^{i\beta}$, $\varphi\in[0,\pi/2]$, $\beta\in[0,2\pi]$.

I. Возьмем произвольную точку круга $|\rho|\le 1$. Представим ее в виде $\rho=\cos\varphi\, e^{i\beta}$, где φ,β - некоторые числа из интервалов $[0,\pi/2]$ и $[0,2\pi]$ соответственно. Воспользуемся интегральным представлением изометрического оператора $V: G\to G'$ /9/:

$$\forall f\in G,\ \forall g\in H \quad (Vf,g)=\int_0^{2\pi} e^{i\theta} d(E_\theta f,g),$$

где E_θ - спектральная функция оператора V.

Поскольку

$$c_k=(V^k\delta_0,\delta_0)=\int_0^{2\pi} e^{ik\theta} d(E_\theta\delta_0,\delta_0),\quad k=0,1,\ldots,N,$$

то спектральная оценка $\hat{S}(\theta)$ связана со спектральной функцией изометрического оператора $V: G\to G'$ соотношением

$$d(E_\theta\delta_0,\delta_0)=\hat{S}(\theta)d\theta.$$

Таким образом, для нахождения спектральной оценки $\hat{S}(\theta)$ достаточно вычислить спектральную функцию оператора V, отвечающую оператору унитарного расширения $U^+_{\varphi,\beta}: H^+\to H^+$.

Оператор E_θ строится следующим образом /9,II/:

$$E_\theta=\lim_{v\to 1}\int_0^{\theta} P(v,\theta)\,d\theta,$$

где

$$P(v,\theta)=\frac{1}{2\pi}\left[\varsigma R_{\varsigma}-\varsigma' R_{\varsigma'}\right]\Big|_{\varsigma=ve^{i\theta},\ \varsigma'=\frac{1}{v}e^{i\theta},\ 0<v<1}.$$

Здесь R_{ς} - есть обобщенная резольвента оператора V , т.е.

$$R_{\varsigma}=P^{+}R_{\varsigma}^{+},$$

где P^{+} - оператор проектирования гильбертова пространства H^{+} на гильбертово пространство H ; R_{ς}^{+} - резольвента оператора $U_{\varphi,\beta}^{+}$: $H^{+}\to H^{+}$.

2. Найдем закон, по которому оператор R_{ς} преобразует элементы пространства H в элементы этого же пространства.

Возьмем произвольный элемент $f^{+}\in H^{+}$ и найдем вектор $a^{+}(\varsigma)\in H^{+}\ (|\varsigma|\neq 1)$, такой что

$$a^{+}(\varsigma)=R_{\varsigma}^{+}f^{+},$$

где $R_{\varsigma}^{+}=(U_{\varphi,\beta}^{+}-\varsigma I^{+})^{-1}$, $(|\varsigma|\neq 1)$- резольвента оператора $U_{\varphi,\beta}^{+}$: $H^{+}\to H^{+}$; I^{+}- единичный оператор в пространстве H^{+}. .

Так как

$$(U_{\varphi,\beta}^{+}-\varsigma I^{+})^{-1}f^{+}=a^{+}(\varsigma),$$

то

$$f^{+}=(U_{\varphi,\beta}^{+}-\varsigma I^{+})a^{+}(\varsigma).$$

Вектор $a^{+}(\varsigma)=[a_{1}(\varsigma),a_{2}(\varsigma)]$, очевидно, можно представить в виде

$$a^{+}(\varsigma)=[\xi_{1},\xi_{2}]+[\nu_{1}d,\nu_{2}d],$$

где

$$\xi_i = (\xi_{i0}, \xi_{i1}, \dots, \xi_{i\,N-1}, 0)^T \in G, \quad i = 1,2 ,$$

$$\nu_i = \frac{a_{iN}(\varsigma)}{d_N}, \quad i = 1,2 ,$$

d_N – N-я компонента базисного вектора d из D. Тогда

$$[f_1, f_2] = [V\xi_1, V\xi_2] + e^{i\beta}[\rho_1 d', \rho_2 d'] - \varsigma[a_1(\varsigma), a_2(\varsigma)],$$

где

$$\rho_1 = \nu_1 \cos\varphi - \nu_2 \sin\varphi, \quad \rho_2 = \nu_1 \sin\varphi + \nu_2 \cos\varphi,$$

а d' – базисный вектор из D'. Следовательно,

$$\begin{aligned} f_1 &= V\xi_1 + e^{i\beta}\rho_1 d' - \varsigma a_1(\varsigma), \\ f_2 &= V\xi_2 + e^{i\beta}\rho_2 d' - \varsigma a_2(\varsigma). \end{aligned} \tag{3.I}$$

Определим вектора $q = (q_0, \dots, q_N)^T$ и $r = (r_0, \dots, r_N)^T$ соотношениями

$$q_K = \begin{cases} e^{i\beta}\cos\varphi\, d'_K / d_N, & K = 0 \\ (e^{i\beta}\cos\varphi\, d'_K - d_{K-1})/d_N, & K = 1,2,\dots,N \end{cases},$$

$$r_K = e^{i\beta}\sin\varphi\, d'_K / d_N, \quad K = 0,1,\dots,N$$

и введем матрицу

$$A(\varsigma) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & q_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & q_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & q_N \end{bmatrix} - \varsigma \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}.$$

Тогда систему (3.I) можно переписать в виде

$$\begin{cases} f_1 + a_{2N}(\varsigma) r = A(\varsigma) a_1(\varsigma), \\ f_2 - a_{1N}(\varsigma) r = A(\varsigma) a_2(\varsigma), \end{cases}$$

где $a_{1N}(\varsigma)$ и $a_{2N}(\varsigma)$ - последние компоненты векторов $a_1(\varsigma)$ и $a_2(\varsigma)$. Поэтому

$$\begin{aligned} a_1(\varsigma) &= S_1 + a_{2N}(\varsigma) S', \\ a_2(\varsigma) &= S_2 - a_{1N}(\varsigma) S', \end{aligned} \tag{3.2}$$

где

$$S_i = \left[A(\varsigma)\right]^{-1} f_i, \quad i = 1,2;$$

$$S' = \left[A(\varsigma)\right]^{-1} r.$$

Записывая соотношения (3.2) для последних компонент векторов $a_1(\varsigma)$ и $a_2(\varsigma)$, получим систему для определения $a_{1N}(\varsigma)$ и $a_{2N}(\varsigma)$:

$$\begin{cases} a_{1N}(\varsigma) - a_{2N}(\varsigma) S'_N = S_{1N}, \\ a_{1N}(\varsigma) S'_N + a_{2N}(\varsigma) = S_{2N}, \end{cases}$$

откуда

$$a_{1N}(\varsigma) = \frac{S_{1N} + S_{2N} S'_N}{1 + (S'_N)^2}, \quad a_{2N}(\varsigma) = \frac{S_{2N} - S_{1N} S'_N}{1 + (S'_N)^2}.$$

Зная N-е компоненты векторов $a_1(\varsigma)$ и $a_2(\varsigma)$, из (3.2) определяем остальные компоненты этих векторов, а значит, и компоненты вектора $a^+(\varsigma)$.

Итак, оператор $R^+_{\varsigma} = (U^+_{\varphi,\beta} - \varsigma I^+)$, $|\varsigma| \neq 1$ преобразует элементы пространства H^+ по следующему закону:

$$\forall f^+ = [f_1, f_2] \in H, \quad R^+_\varsigma f^+ = [a_1(\varsigma), a_2(\varsigma)],$$

где
$$a_1(\varsigma)=B(\varsigma)f_1+\frac{S_{2N}-S_{1N}\,S'_N}{1+(S'_N)^2}\,B(\varsigma)r,$$

$$a_2(\varsigma)=B(\varsigma)f_2-\frac{S_{1N}+S_{2N}\,S'_N}{1+(S'_N)^2}\,B(\varsigma)r,$$

а $B(\varsigma)=\left[A(\varsigma)\right]^{-1}.$

Теперь легко найти обобщенную резольвенту R_ς оператора V. Действительно, так как

$$R_\varsigma = P^+R_\varsigma^+$$

и

$$P^+f^+=f_1, \quad \forall f^+=[f_1,f_2]\in H^+,$$

то для любого $f\in H$ (т.е. элемента $[f,0]$ пространства H^+)

$$R_\varsigma f = B(\varsigma)f-\frac{S_{1N}\,S'_N}{1+(S'_N)^2}\,B(\varsigma)r.$$

3. Найдем в явном виде матрицу $B(\varsigma)=\left[A(\varsigma)\right]^{-1}$. Возьмем произвольный элемент $f\in H$ и определим вектор $b\in H$ равенством

$$b=B(\varsigma)f.$$

Тогда, так как

$$A(\varsigma)=A-\varsigma I,$$

где

$$A=\begin{bmatrix}0 & 0 & \dots & q_0\\ 1 & 0 & \dots & q_1\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & q_N\end{bmatrix}, \qquad I=\begin{bmatrix}1 & & 0\\ & 1 & \\ & & \ddots \\ 0 & & 1\end{bmatrix},$$

то

$$Ab - \rho b = f, \tag{3.3}$$

откуда получаем рекурентное соотношение для определения компонент вектора b:

$$b_{k-1} = f_k + \rho b_k - b_N q_k, \quad k = 0,1,\ldots,N,$$

из которого находим

$$b_{k-1} = \sum_{j=k}^{N} f_j \rho^{j-k} - b_N \sum_{j=k}^{N+1} q_j \rho^{j-k}, \quad k = 1,2,\ldots,N, \tag{3.4}$$

где дополнительно положено $q_{N+1} = -1$. В частности,

$$b_0 = \sum_{j=1}^{N} f_j \rho^{j-1} - b_N \sum_{j=1}^{N+1} q_j \rho^{j-1}.$$

Но из (3.3) следует

$$f_0 = q_0 b_N - \rho b_0 .$$

Поэтому

$$f_0 = q_0 b_N - \sum_{j=1}^{N} f_j \rho^j + b_N \sum_{j=1}^{N+1} q_j \rho^j .$$

откуда находим b_N :

$$b_N = \frac{\sum\limits_{j=0}^{N} f_j \rho^j}{\sum\limits_{j=0}^{N+1} q_j \rho^j} . \tag{3.5}$$

Подставляя последнее соотношение в (3.4), находим выражение для первых N компонент вектора b:

$$b_{k-1}=\sum_{j=k}^{N} f_j \varsigma^{j-k}-\frac{\sum_{j=0}^{N} f_j \varsigma^j}{\sum_{j=0}^{N+1} q_j \varsigma^j}\sum_{j=k}^{N+1} q_j \varsigma^{j-k}, \quad k=1,2,\dots,N . \tag{3.6}$$

Полагая теперь в (3.5) и (3.6) $f=\delta_m$, находим компоненты m -го столбца матрицы $B(\varsigma)$:

$$b_{k-1,m}=\begin{cases} \varsigma^{m-k}\dfrac{\sum_{j=0}^{k-1} q_j \varsigma^j}{\sum_{j=0}^{N+1} q_j \varsigma^j}, & m \geqq k \\ -\varsigma^{m-k}\dfrac{\sum_{j=k}^{N+1} q_j \varsigma^j}{\sum_{j=0}^{N+1} q_j \varsigma^j}, & m < k \end{cases}, \quad \begin{matrix} m=0,1,\dots,N, \\ k=1,2,\dots,N \end{matrix}$$

и

$$b_{N,m}=\frac{\varsigma^m}{\sum_{j=0}^{N+1} q_j \varsigma^j}, \quad m=0,1,\dots,N .$$

Следовательно,

$$B(\varsigma)=\frac{1}{\Sigma_0}\begin{Vmatrix} -\varsigma^{-1}\Sigma_1, & \Sigma_0', \dots, & \varsigma^{N-1}\Sigma_0' \\ -\varsigma^{-2}\Sigma_2, & -\varsigma^{-1}\Sigma_2, \dots, & \varsigma^{N-2}\Sigma_1' \\ \dots & \dots & \dots \\ -\varsigma^{-N}\Sigma_N, & -\varsigma^{-N+1}\Sigma_N, \dots, & \Sigma_{N-1}' \\ 1, & \varsigma, \dots, & \varsigma^N \end{Vmatrix},$$

где $\Sigma_k=\sum_{j=k}^{N+1} q_j \varsigma^j, \quad \Sigma_k'=\sum_{j=0}^{k} q_j \varsigma^j .$

4. Подведем итог изложенному в пп. I–3.

<u>Теорема 2</u>. Спектральная оценка $\hat{S}(\theta)$ совпадает в точках дифференцируемости с производной функции $\sigma(\theta)=(E_\theta\delta_0,\delta_0)$, где спектральная функция E_θ определяется из соотношений:

$$E_\theta=\lim_{v\to 1}\int_0^\theta P(v,\theta)d\theta,$$

$$P(v,\theta)=\frac{1}{2\pi}\left[\varsigma R_\varsigma-\varsigma' R_{\varsigma'}\right]\Big|_{\varsigma=ve^{i\theta},\ \varsigma'=\frac{1}{v}e^{i\theta},\quad 0<v<1}.$$

Обобщенная резольвента R_ς оператора V преобразует произвольный элемент f пространства H в элемент

$$R_\varsigma f=B(\varsigma)f-\frac{S_N' S_N}{1+(S_N')^2}B(\varsigma)r,$$

где $r=(r_0,r_1,\ldots,r_N)^T$, $r_k=e^{i\beta}\sin\varphi\, g_k'$, $k=0,1,\ldots,N$,

$S_N=(B(\varsigma)f)_N$ – последняя компонента вектора $B(\varsigma)f$,

$S_N'=(B(\varsigma)r)_N$ – последняя компонента вектора $B(\varsigma)r$;

$$B(\varsigma)=\frac{1}{\Sigma_0}\left\|\begin{matrix}-\varsigma^{-1}\Sigma_1, & \Sigma_0', & \ldots, & \varsigma^{N-1}\Sigma_0'\\ -\varsigma^{-2}\Sigma_2, & -\varsigma^{-1}\Sigma_2, & \ldots, & \varsigma^{N-2}\Sigma_1'\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ -\varsigma^{-N}\Sigma_N, & -\varsigma^{N+1}\Sigma_N, & \ldots, & \Sigma_{N-1}'\\ 1, & \varsigma, & \ldots, & \varsigma^N\end{matrix}\right\|$$

где

$$\Sigma_k=\sum_{j=k}^{N+1}q_j\varsigma^j,\quad \Sigma_k'=\sum_{j=0}^{k}q_j\varsigma^j;\quad k=0,1,\ldots,N,$$

$$q_l=e^{i\beta}\cos\varphi\, g_l'-g_{l-1},\quad l=0,1,\ldots,N+1,$$

а величины $g_{-1}, g_0, \dots, g_N$ и $g'_0, \dots, g'_N, g'_{N+1}$ определяются следующим образом:

$$g_{-1} = 0, \quad g_N = 1,$$

$g_0, g_1, \dots, g_{N-1}$ – решения системы линейных уравнений

$$D_{N-1}\begin{pmatrix} g_0 \\ \vdots \\ g_{N-1} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} c_N \\ \vdots \\ c_1 \end{pmatrix}, \quad D_{N-1} = \| c_{j-m} \|_0^{N-1},$$

а

$$g'_K = \overline{g}_{N-K}, \qquad K = 0, 1, \dots, N+1.$$

Величины $\beta \in [0, 2\pi]$ и $\varphi \in [0, \pi/2]$ могут быть выбраны из указанных интервалов произвольно.

Очевидно, спектральная оценка $\hat{S}(\theta)$, вычисленная по указанному в теореме пути, будет зависеть от параметров φ и β. Тем самым теорема дает описание некоторого множества спектральных оценок.

4. Численное моделирование

Указанная в предыдущем параграфе процедура вычисления спектральной оценки достаточно конструктивна и легко реализуется на ЭВМ.

Действительно возьмем некоторое число $0 < \vartheta < 1$ и определим функцию

$$W(\theta) = \sum_{m=0}^{N} c_m P_m(\vartheta, \theta),$$

где $P_m(\vartheta, \theta)$ – m-я компонента вектора $P(\vartheta, \theta)$, определенного в предыдущем параграфе. Очевидно, $W(\theta)$ зависит от параметра ϑ и является некоторым приближением к соответствующей спектральной оценке $\hat{S}(\theta)$, зависящей, в свою очередь, от величины ρ $(|\rho|\leq 1)$.

На практике, при обработке конкретных экспериментальных данных параметры ϑ и ρ, очевидно, должны выбираться однозначно. Поэтому важно знать поведение $W(\theta)$ от параметра ϑ $(0<\vartheta<1)$ и параметра ρ, определяющего конкретную спектральную оценку.

Изучение этого вопроса проводилось численным моделированием на ЭВМ.

В качестве исходных данных использовались 2I момент функции $S(\theta)$, изображенной на рис. I. Ей соответствует последовательность $\{c_k\}_0^{21}$ вида

$$c_k = \sum_{j=1}^{4} p_j e^{-r_j k + i æ_j k}, \quad k=\overline{0,21},$$

где p_j, r_j и $æ_j$ $(j=\overline{1,4})$ - некоторые фиксированные числа.

Примеры функции $W(\theta)$, полученной при некоторых значениях параметров ϑ и ρ изображены на рис. 2,3.

Как показало численное моделирование с ростом ϑ $(0<\vartheta<1)$ $W(\theta)$ сходится к некоторой функции $\hat{S}(\theta)$, и среди таких функций (которые отвечают описанным в теореме 2 оценкам СПМ) имеются спектральные оценки двух типов:

а) оценки, достаточно точно отражающие характер поведения "истинной" СПМ;

б) оценки, не отражающие поведения "истинной" СПМ.

Принадлежность спектральной оценки к соответствующему типу определяется в существенном параметром $\beta = \arg\rho$. Динамику изменения спектральной оценки от параметра β при фиксированных значениях $|\rho|$ и ϑ наглядно иллюстрируют рис. 2-7, из которых видно, что спектр наиболее достоверно восстанавливается при $\beta\approx\pi$ и совсем неверно при $\beta\approx 0$.

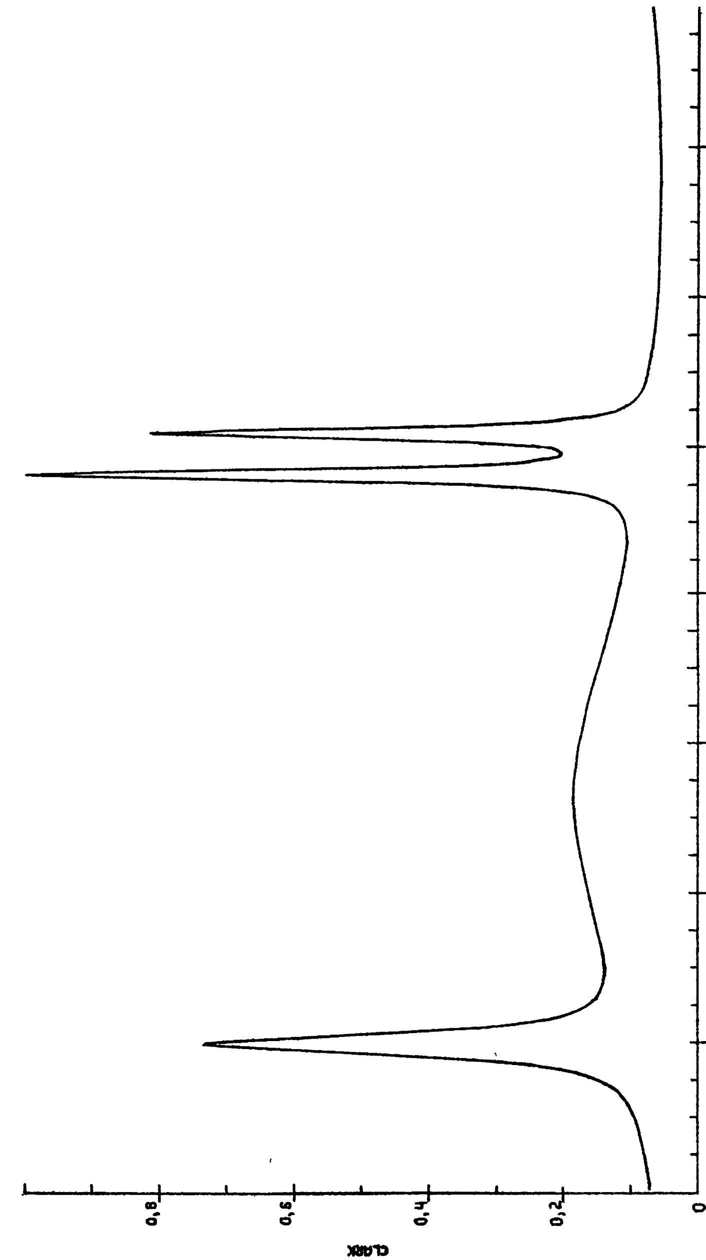
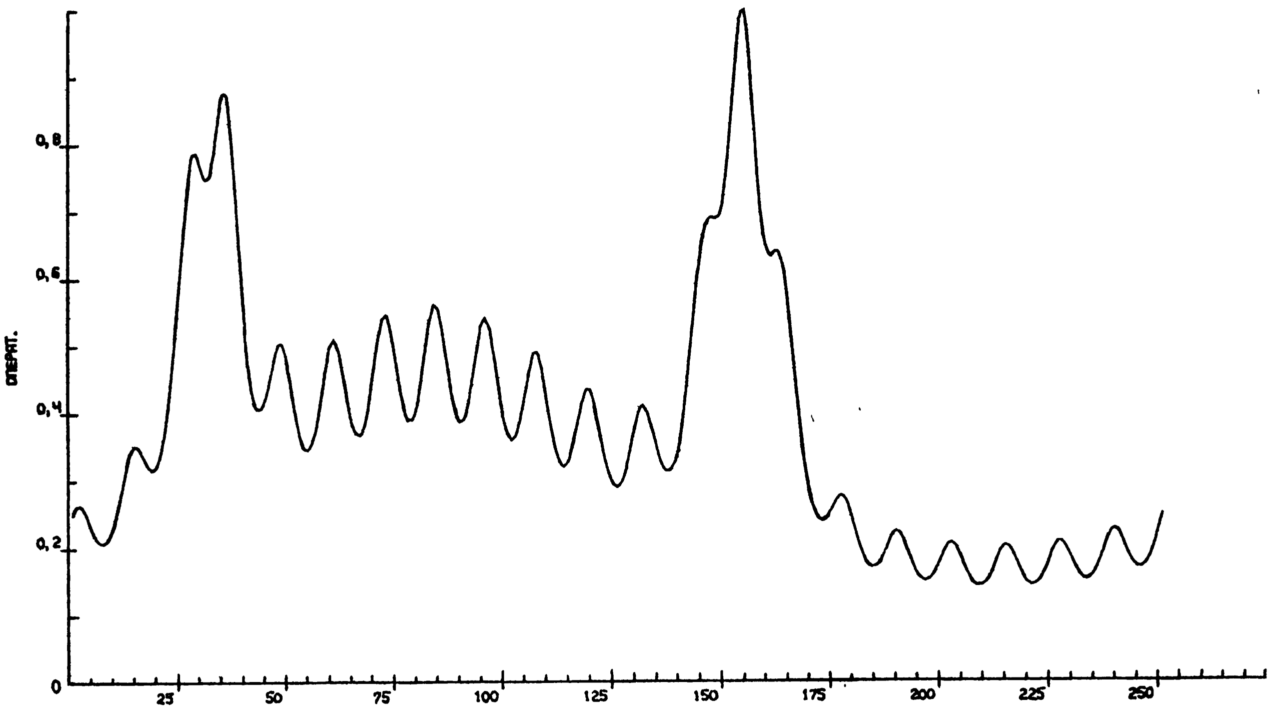
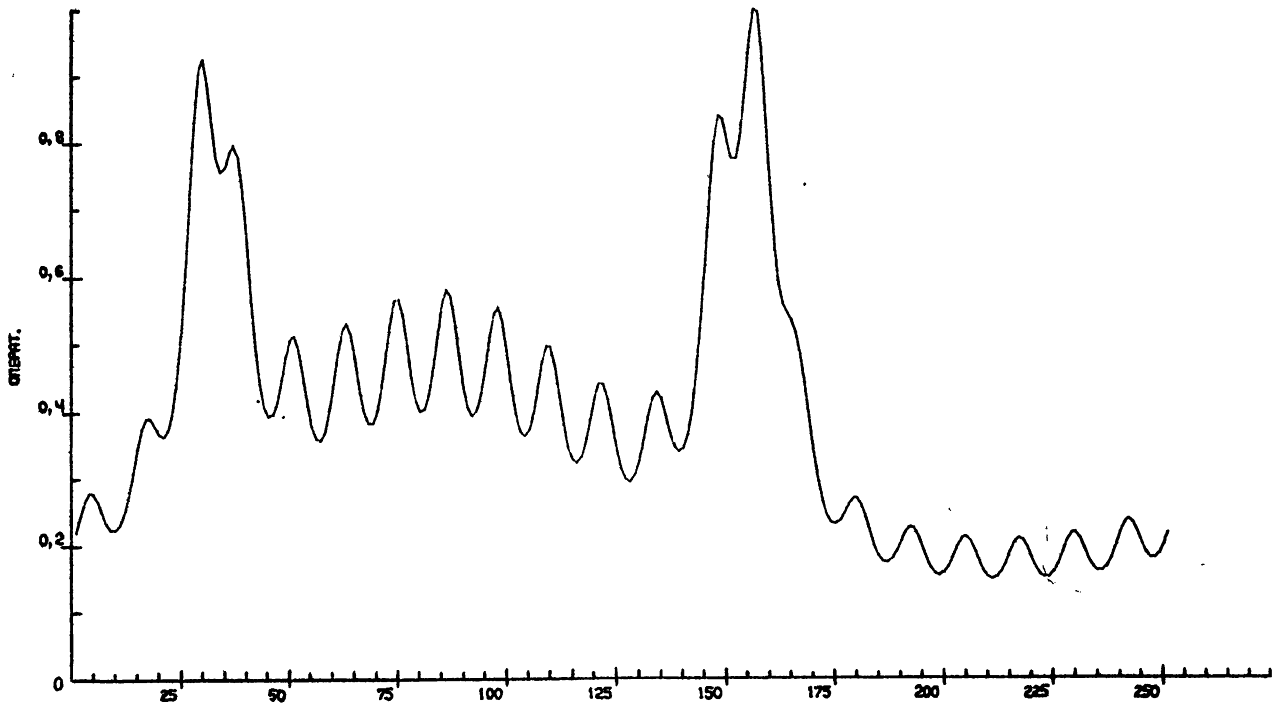


Рис. I



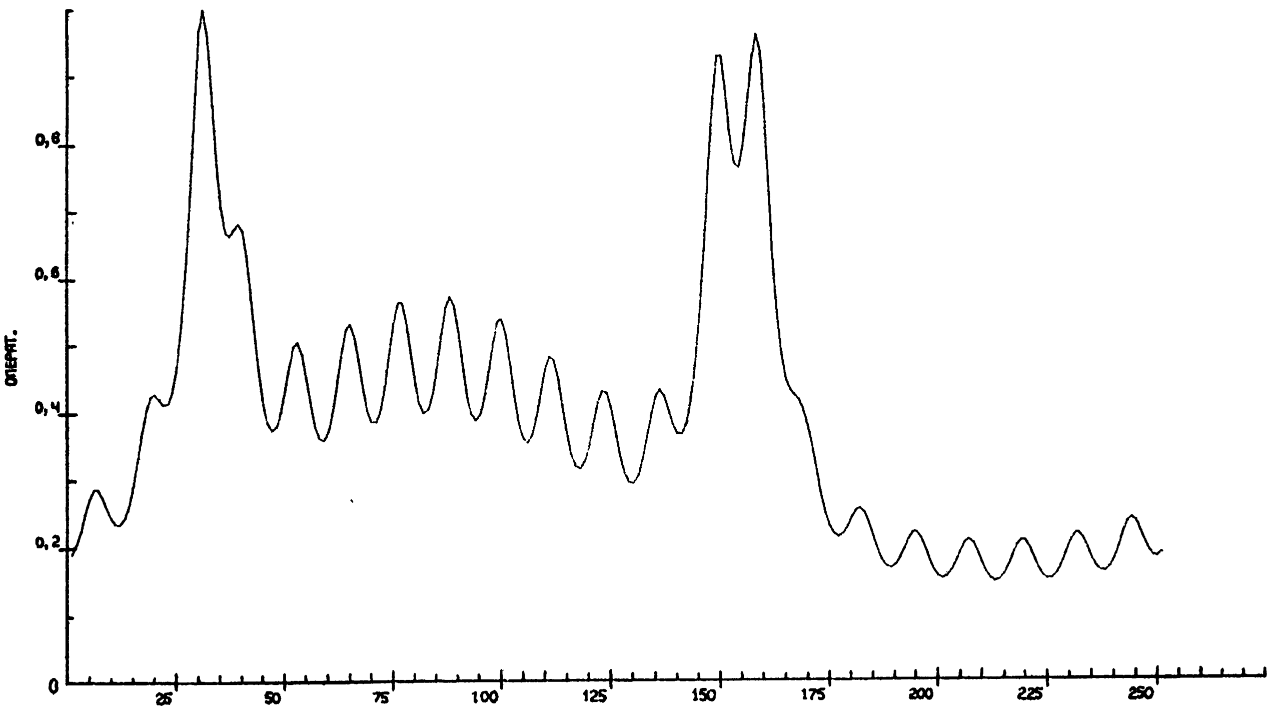
MAX 4,214 PO 0,02 φ 0,524 ϑ 0,90 β 0,000

Рис. 2



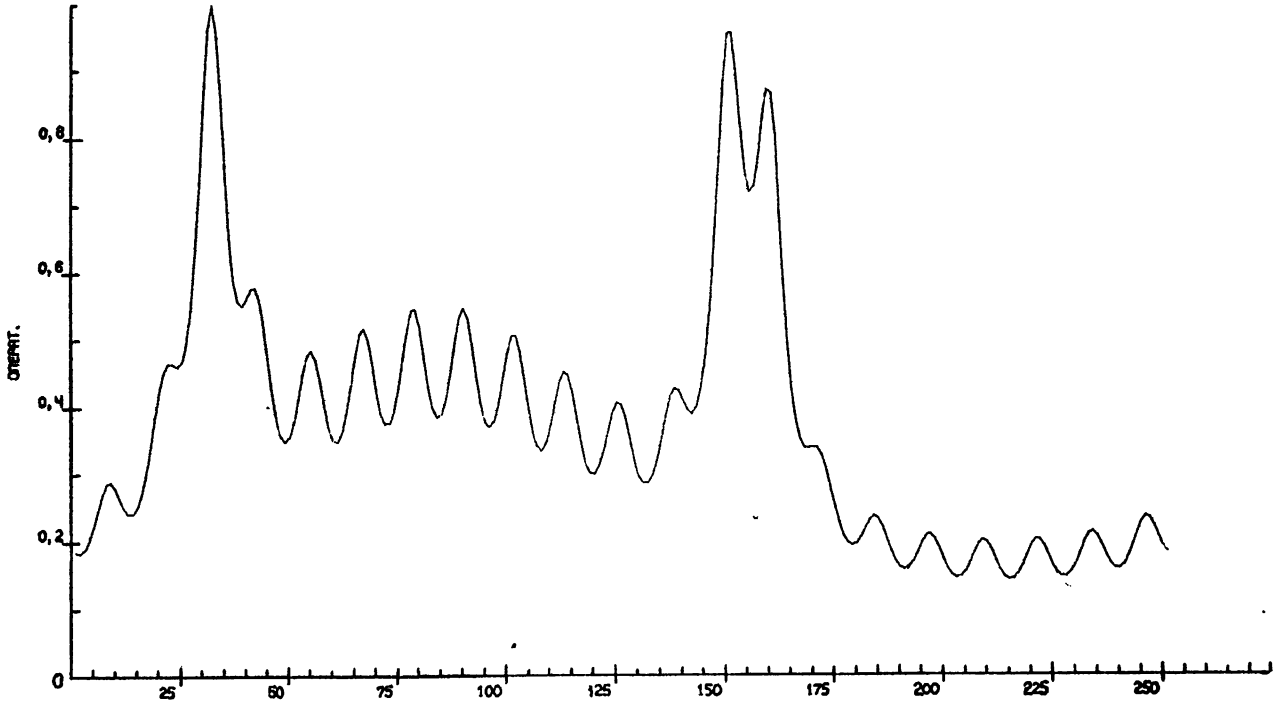
MAX 4,089   PO 0,02   φ 0,524   σ 0,90   β 1,047

Рис. 3



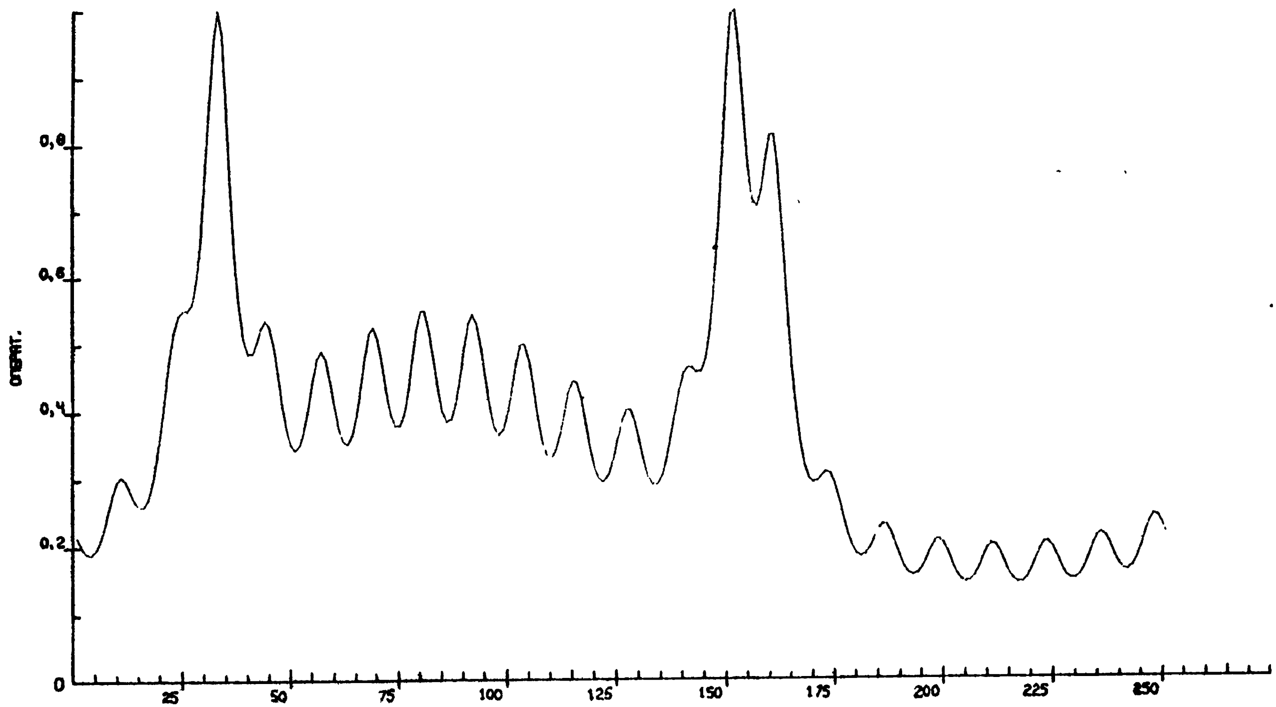
MAX 4,130 PO 0,02 φ 0,524 ϑ 0,90 β 2,094

Рис. 4



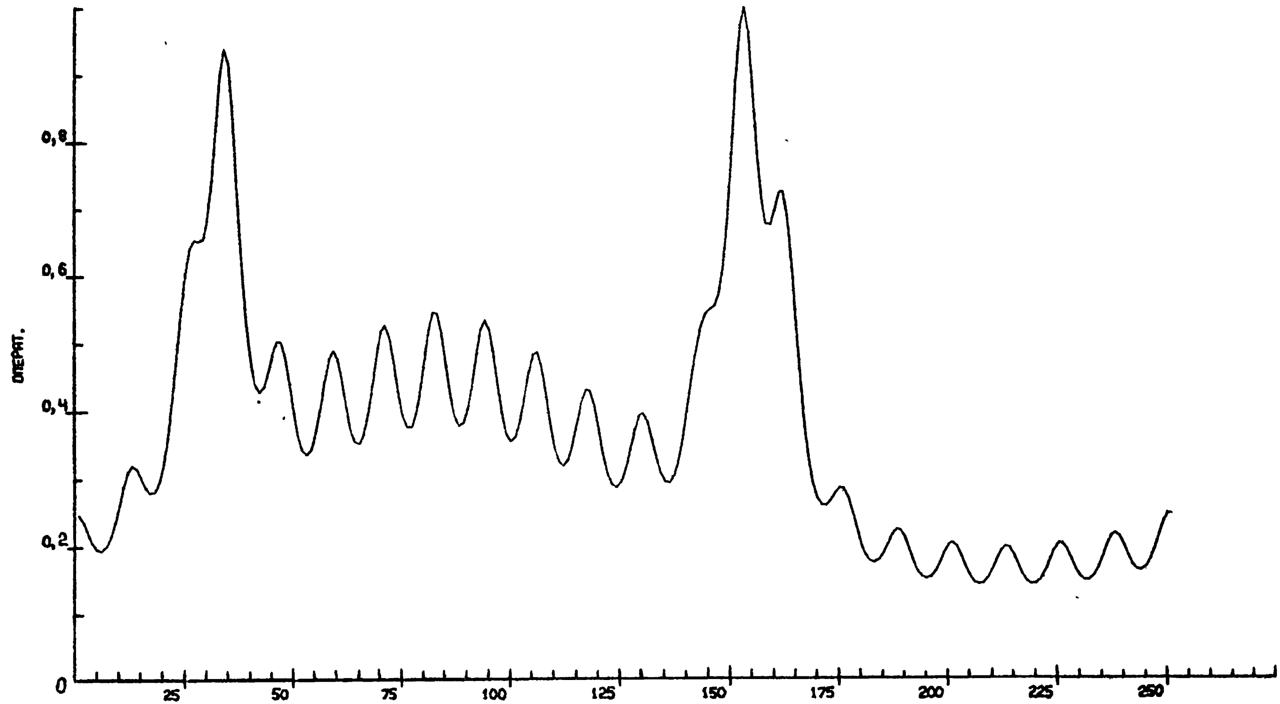
MAX. 4,293   PO 0,02   φ 0,524   σ 0,90   β 3,142

Рис. 5



MAX 4,276 PO 0,02 φ 0,524 ϑ 0,90 β 4,189

Рис. 6



MAX 4,329 PO 0,02 ψ 0,524 ϑ 0,90 β 5,236

Рис. 7

В заключение выражаю благодарность В.И.Турчину за постоянное внимание к работе и Л.Р. Семеновой, выполнившей все необходимые вычисления на ЭВМ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кейпон Дж. // ТИИЭР.-1969.-Т.57, № 8.-С.69.
2. Гейбриэл У.Ф. // ТИИЭР.-1980.-Т.68, № 6.-С.19.
3. Кей С.М., Марпл С.Л. // ТИИЭР.-1981.-Т.69, № 11.-С.5.
4. Burg J.P. // Proc.37-th Annual Intern.Meeting Soc.of Explor. Geophys., 1967, Oclahoma City.
5. Антонец М.А., Кнафель А.И., Нотик А.И., Турчин В И. // Препринт № 154.-Горький: НИРФИ, 1982.-17 с.
6. Антонец М.А., Кнафель А.И., Нотик А.И., Турчин В.И. // Изв. вузов.-Радиофизика.-1983.-Т.26, № 11.-С.1457.
7. Ахиезер Н.И., Крейн М.Г. О некоторых вопросах теории моментов.-Харьков: ДНТВУ, 1938.
8. Крейн М.Г., Красносельский М.А. // УМН.-1947.-Т.II, в.3(19).-С.60.
9. Ахиезер Н.И., Глазман И.М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. - М.-Л.: Гостехиздат, 1950.
10. Лившиц М.С.// Мат.сб.-1950.-Т.26(68), № 2.-С.247.
11. Плеснер А.И. Спектральная теория линейных операторов.-М.: Наука, 1965.

Дата поступления статьи
14 февраля 1989 г.

Угриновский Роман Аронович

ПРИЛОЖЕНИЕ ТЕОРИИ ОПЕРАТОРОВ К ЗАДАЧЕ СПЕКТРАЛЬНОГО ОЦЕНИВАНИЯ

Подписано в печать 13.07.89 г. МЦ 05188. Формат 60x84/16.
Бумага писчая. Печать офсетная. Объем 2,25 усл.п. л.
Заказ 4927. Тираж 120. Бесплатно

Отпечатано на ротапринте НИРФИ