Министерство высшего и среднего специального образования
Р С Ф С Р
Горьковский ордена Трудового Красного Знамени
научно-исследовательский радиофизический институт (НИРФИ)

П р е п р и н т № 291

# НЕУСТОЙЧИВОСТЬ РАВНОМЕРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТВЕРДЫХ ЧАСТИЦ В ПОТОКЕ ГАЗА

А.Н. Котюсов
Б.Е. Немцов

Горький 1989

Котюсов А. Н., Немцов Б. Е.

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ РАВНОМЕРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТВЕРДЫХ ЧАСТИЦ В ПОТОКЕ ГАЗА // Препринт № 291 – Горький: НИРФИ -1989 - 12 с.

УДК 534.29

Рассмотрена задача о поведении твердых частиц (капель), находящихся в потоке газа. Показано, что в данной системе развивается неустойчивость, найден ее инкремен. Проведена количественная оценка характерного времени развития неустойчивости. Отмечено, что исследуемый механизм неустойчивости может приводить к динамической коагуляции аэрозолей.

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ РАВНОМЕРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТВЁРДЫХ ЧАСТИЦ В ПОТОКЕ ГАЗА

---

Подписано в печать 27.09.89 г. МЦ 05263 . Формат 60x84/16.
Бумага писчая. Печать офсетная. Объем 0,45 усл.п.л.
Заказ 4955. Тираж 120. Бесплатно.

---

Отпечатано на ротапринте НИРФИ

Круг вопросов, связанных с исследованиями в области механики гетерогенных сред, достаточно широк. Одной из важных проблем этого направления представляется проблема коагуляции аэрозолей, т.е. явление слияния дисперсных частиц. Вопросам коагуляции посвящено значительное количество работ [I-3]. Поскольку сближение частиц может быть вызвано самыми различными причинами (броуновское движение, наличие градиента скорости в движущейся среде, турбулизация потока, электрическое взаимодействие частиц, гидродинамическое взаимодействие и т.д.), то в соответствии с этим существует целый ряд гипотез о механизме коагуляции, ни одна из которых, однако, полностью не объясняет процесса.

При изучении динамических механизмов коагуляции в литературе [I-3] макроскопическое движение гетерогенных смесей рассматривается обычно при выполнении ряда допущений. Эти допущения позволяют выделить исследование поведения единичных включений или неоднородностей и процессов около них, проводя их независимо с помощью классических в механике сплошной среды методов и уравнений. Таким образом, как правило, проводится исследование динамических характеристик одиночных частиц с последующей попыткой учесть их парное взаимодействие друг с другом. В то же время существует и другая возможность взаимодействия частиц и их коллективной динамики, связанная с когерентным характером длинноволновых возмущений, в формировании которых участвует сразу большое число твердых тел. Исследованию данного механизма посвящена настоящая работа. Рассмотрение проводится на примере простой модели газа, заполненного твердыми частицами одного радиуса, движущимися с некоторой постоянной скоростью. Считается, что энергией парного взаимодействия и другими эффектами хаотического и внутреннего движения твердых включений, а также столкновениями частиц можно пренебречь. Полагается также, что отсутствуют процессы дробления, слипания (коагуляции) и образования новых дисперсных частиц.

При анализе было установлено, что в присутствии твердых включений формируется мода, неустойчивая по отношению к малым возмущениям объемного содержания твердых частиц. Обнаруженная неустойчивость приводит к сближению твердых частиц и их дальнейшему слиянию. В работе вычислен инкремент неустойчивости, а также проведена количественная оценка характерного времени развития неустойчивости.

При описании коллективных эффектов взаимодействия потока твердых частиц с газом будем исходить из уравнения непрерывности для твердой компоненты

$$\partial n/\partial t + \operatorname{div} n\vec{v}_T = 0 \qquad (I)$$

и газа [I]

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{4}{3}\pi R^3 \left(\frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div} n\vec{v}\right), \qquad (2)$$

где $\vec{v}_T$ - скорость твердых частиц радиуса $R$, $\vec{v}$ - скорость газа.

Для вывода этих уравнений необходимо представление смеси как совокупности двух континуумов, каждый из которых относится к своей составляющей смеси и заполняет один и тот же объем, занятый смесью. Для каждого из этих составляющих континуумов в каждой точке определяются обычным образом приведенная плотность (масса соответствующей составляющей в единице объема среды) и скорость. Таким образом, в каждой точке объема, занятого смесью, определена пара значений плотности и скорости [I]. Уравнение (I) представляет собой фактически закон сохранения количества твердой фазы. Уравнение (2) также имеет простой физический смысл. Первое слагаемое в правой части (2) обусловлено тем, что при внесении в некоторый объем твердых частиц газ выталкивается из этого объема, второе слагаемое связано с тем обстоятельством, что в области повышенного содержания твердых частиц должна возрастать скорость газовой компоненты. Особенно нагляден этот вывод для случая стационарного одномерного течения газа, когда $v \sim \left(1-\frac{4}{3}\pi R^3 n\right)^{-1}$, и $v$ обращается в бесконечность, если твердая фаза занимает весь объем смеси.

Если частицы распределены по радиусам, нужно ввести концентрацию шаров с радиусом от $R$ до $R+dR$ : $dn' = f(r,R,t)\,dR$ и тогда уравнения принимают вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + div\, f \vec{v}_T = 0 \,, \tag{3}$$

$$div\, \vec{v} = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{\partial}{\partial t}\int_0^\infty R^3 f\,dR + div\left(\int_0^\infty R^3 f\,dR\right)\vec{v}\right), \tag{4}$$

где $\vec{v}_T$ имеет смысл гидродинамической скорости частиц радиуса $R$. Эти уравнения следует дополнить уравнением движения твердых частиц.

Уравнение движения твердого тела, погруженного в колеблющуюся жидкость, для случая потенциального обтекания получено в [4] и имеет вид

$$\rho_T \frac{d_2 \vec{v}_T}{dt} = \rho \frac{d_1 \vec{v}}{dt} + \frac{\rho}{2}\frac{d_2}{dt}(\vec{v}-\vec{v}_T)\,. \tag{5}$$

Первое слагаемое правой части соответствует так называемой силе Архимеда, обусловленной действием среднего давления газа на частицу без учета влияния самой частицы на поле скоростей газа [I]. Второе слагаемое обусловлено тем фактом, что в действительности тело не увлекается полностью жидкостью; возникает движение тела относительно жидкости, в результате чего сама жидкость приобретает некоторый дополнительный импульс. Таким образом, можно говорить, что второе слагаемое уравнения (5) определяется микрополями, возникающими вокруг движущейся твердой частицы. Замечательно здесь то, что действие собственных полей частицы может быть выражено через средние значения скорости газа $v$ и частицы $v_T$. По очевидным причинам второе слагаемое отражает эффект присоединенной массы. Уравнение (5) получено в книге [4] для случая пространственно однородного течения газа. Обобщение на случай неоднородного течения сделано в книге [I]. При этом оказалось, что полную производную $d_2/dt$ следует понимать как $\partial/\partial t + (\vec{v}_T\nabla)$, в отличие от $d_1/dt = \partial/\partial t + (\vec{v}\nabla)$ [I]. Этот результат физически достаточно ясен, поскольку, как уже говорилось, второе слагаемое в (5) обусловлено ближним полем твердой частицы и должно определяться субстанциональными производными, связанными с ней.

По поводу (5) следует сделать еще одно замечание. Если характерные масштабы возмущений достаточно велики по сравнению с расстоянием между частицами, то можно рассматривать твердые частицы как сплошную среду.

При наличии вязкости уравнения неразрывности имеют тот же вид, а уравнение движения усложняется [1,6]:

$$\rho_T \frac{d_2 \vec{v}_T}{dt} = \rho \frac{d_1 \vec{v}}{dt} + \frac{\rho}{2} \frac{d_2}{dt}(\vec{v} - \vec{v}_T) - \frac{9}{2} \frac{\eta \varphi}{R^2} (\vec{v}_T - \vec{v}) -$$

$$- \frac{9}{2R} \sqrt{\frac{\eta \rho}{\pi}} \int_{-\infty}^{t} (t - t')^{-1/2} \frac{d_2}{dt} (\vec{v}_T - \vec{v}) dt' + \vec{f}. \qquad (6)$$

Здесь первые два слагаемых в правой части имеют тот же смысл, что и в случае потенциального обтекания, третье слагаемое есть известная сила Стокса или сила вязкого трения, четвертое - так называемая сила Бассэ, зависящая от предыстории движения твердых частиц и жидкости. Она выражает собой мгновенное гидродинамическое сопротивление и начинает играть важную роль, когда твердая частица приобретает большое ускорение. Пятое слагаемое $\vec{f}$ - сторонняя плотность силы, действующей на твердые частицы.

При нахождении сил считалось, что частицы удалены на достаточно большое расстояние, т.е. $R^3 n \ll 1$ . Кроме того, в уравнения (5),(6) входит усредненная по объему величина $v$ , которая должна мало меняться на расстояниях, сравнимых с $n^{-1/3}$ . Таким образом, для справедливости приведенных уравнений должно выполняться условие

$$R \ll n^{-1/3} \ll \lambda, \qquad (7)$$

где $\lambda$ - характерный пространственный масштаб возмущений. Уравнение (6) получено в предположении о "ползущем" обтекании, когда число Рейнольдса $Re = vR/\nu \ll 1$ [4].

В уравнении (6) сила Стокса записана с учетом "эффекта стесненности", заключающегося в том, что в области с повышенной концентрацией частиц возрастает стоксовское сопротивление. Очевидно, что зависимость от концентрации обусловлена взаимодействием между частицами, осуществляющимся посредством полей скоростей, порождаемых каждой частицей в окружающей жидкости. Эта зависимость учтена в (6) коэффициентом $\varphi = \varphi(n)$. Остановимся здесь несколько подробнее на выяснении вида функции $\varphi(n)$, который может быть определен из зависимости скорости оседания твердых сфер от концентрации частиц в вязкой жидкости. Определению данной зависимости посвящено много работ, обзор которых содержится в книге [5].

Все теоретические исследования стесненного движения разделяются на три группы. К первой группе [5] относятся расчеты, в которых предполагается, что центры сфер расположены геометрически правильным образом, например по кубической решетке, с характерной длиной порядка $R\alpha^{-1/3}$, где $R$ - радиус сферы, $\alpha = \frac{4}{3}\pi R^3 n$ - объемная концентрация сферических частиц. Расчеты показали, что для малоконцентрированной дисперсной системы ( $\alpha \ll 1$ ) относительное снижение скорости осаждения сфер с учетом взаимодействия пропорционально $\alpha^{1/3}$ с коэффициентом пропорциональности порядка единицы.

Вторая группа расчетов основана на ячеистой модели взаимодействия частиц [I]. В такого рода работах среднее гидродинамическое воздействие на какую-либо сферу всех других сфер заменяется воздействием границы, обычно принимаемой сферической, окружающей рассматриваемую частицу. Радиус внешней сферической границы выбирается равным $R\alpha^{-1/3}$. Движение жидкости в ячейке удовлетворяет условиям прилипания на поверхности твердой частицы. Все расчеты, проведенные в рамках такой модели, показали, что относительное изменение скорости осаждения пропорционально $\alpha^{1/3}$. Коэффициент пропорциональности здесь также порядка единицы.

К третьей группе относятся исследования, в которых на основе статистических аналитических методов рассчитано "стесненное осаждение" случайно распределенных сфер в малоконцентрированной суспензии [7,8]. Показано, что изменение средней скорости осаждения твердых сфер в суспензии пропорционально $\alpha$, с коэффициентом пропорциональности равным $5 \div 6$. Зависимости такого рода подтверждаются экспериментально [2].

Необходимо отметить, что в первой и второй группах расчеты "стесненного оседания" основаны на том, что каждая оседающая сфера заменяется некоторой сосредоточенной силой, приложенной к жидкости в центре сферы. Из закона Стокса скорость жидкости при движении изолированной сферы изменяется с расстоянием $r$ как $v_0 R/r$, где $v_0$ - скорость сферы. Из сказанного следует, что дополнительная скорость жидкости в окрестности каждой сферы, обусловленная влиянием всех остальных, пропорциональна $v_0 R/l$, где $l$ - некоторая длина, связанная с расположением частиц. В случае регулярного расположения сфер за $l$ можно принять расстояние между соседними сферами. В итоге изменение скорости жидкости в точке расположения некоторой сферы, эквивалентное изменению скорости движения выбранной сферы, дается соотношением $v - v_0 \sim v_0 R n^{1/3}$. Аналогично в случае ячеистой модели за $l$ можно выбрать размер ячейки, также пропорциональный $\alpha^{-1/3}$. Вместе с тем необходимо отметить, что в отличие от ячеистой модели и модели регулярного расположения, при произвольном расположении сфер, нельзя указать ни точного, ни преимущественного среднего расстояния между частицами. В этом смысле третья модель выглядит более правдоподобно, поскольку в реальной дисперсной системе поддержание регулярного расположения частиц невозможно.

Кроме того при изучении движения твердых частиц в жидкости необходимо учитывать появление зависимости коэффициента вязкости от концентрации частиц, определяемое формулой Эйнштейна [4]. Для сферических частиц $\eta = \eta_0 (1 + 5\alpha/2)$.

Сделаем еще одно важное замечание. Дело в том, что расчет скорости оседания частиц в суспензии основан на применении известного решения Стокса для полей скоростей жидкости, обтекающей сферу. Это решение применимо лишь на расстояниях $r \ll \nu/v_0$ от движущейся частицы. На больших расстояниях стоксовское распределение скоростей оказывается неверным и необходимо пользоваться решением Осеена [4]. Оценок для изменения скорости в этом случае произведено не было, однако ввиду быстрого экспоненциального спада поля скоростей на больших расстояниях в решении Осеена поправка, обусловленная стесненным движением, экспоненциально мала и зависимость силы Стокса от концентрации определяется лишь поправкой Эйнштейна.

В итоге, обобщая все сказанное, выпишем существующие зависимости $\varphi(\alpha)$:

$$\varphi(\alpha) = 1 + k_1 \alpha^{1/3} \quad , \quad k_1 \sim 1{,}5 \quad , \quad n^{-1/3} \ll \nu/v_0 \; ,$$
$$\varphi(\alpha) = 1 + k_2 \alpha \quad , \quad k_2 \sim 5 \div 6 \quad , \quad n^{-1/3} \ll \nu/v_0 \; ,$$
$$\varphi(\alpha) = 1 \quad , \quad n^{-1/3} \gtrsim \nu/v_0 \; .$$

Исследуем устойчивость однородного распределения твердых частиц в потоке газа. Начнем с потенциального обтекания. Как видно из (6), приближение потенциального обтекания справедливо, если для характерной частоты колебаний выполняется

$$\omega \gg \nu/R^2 , \tag{8}$$

т.е. когда сила, действующая на частицу, определяется фактически силой присоединенных масс, как в идеальной жидкости. Такой предельный инерционный режим характерен для маловязких жидкостей с достаточно крупными частицами.

При выполнении (8) в качестве исходной системы следует брать уравнения (3) - (5). Поскольку в уравнение движения размеры частиц не входят явным образом, результат будет зависеть лишь от удельного объема твердой фазы $\alpha = \int_0^\infty \frac{4}{3}\pi R^3 f(\vec r, R)\, dR$. Считая, что невозмущенная скорость газа $\vec v_0$, а возмущения зависят от координат и времени по закону $exp(-i\omega t + i\vec k\vec r)$, из (3) - (5) получим для мнимой части частоты:

$$Im\, \omega \simeq \pm \sqrt{\alpha_0 \rho/\rho_T}\, \vec k \vec v_0 , \tag{9}$$

где $\alpha_0 = \frac{4}{3}\pi R^3 n_0$ - невозмущенный удельный объем твердой фазы. Из полученного выражения видно, что система неустойчива. Инкремент растет с ростом $k$.

При выполнении указанных приближений (8) должно соблюдаться условие

$$kR \gg (\sqrt{\alpha\rho/\rho_T}\, Re)^{-1} . \tag{10}$$

С учетом того, что $kR \ll 1$, неравенство (10) может быть реализовано лишь при $Re \gg 1$. Однако возможность применимости приближения потенциального обтекания при больших числах Рейнольдса не-достаточно ясна. Для более точного анализа неустойчивости в (6) необходим учет членов, содержащих вязкость. Откажемся от неравенства (8). Тогда после линеаризации уравнений (I),(2) на фоне невозмущенных значений $n_0$, $v_0 = 2fR^2/9\eta$ получим для возмущений концентрации и скорости газа

$$\alpha' = \alpha_0 \vec{k}\vec{v}_T/\omega , \tag{II}$$

$$\vec{k}\vec{v} = -\alpha_0 \frac{\omega - \vec{k}\vec{v}_0}{1-\alpha_0} \frac{\vec{k}\vec{v}_T}{\omega} \tag{I2}$$

Уравнение (6) будем рассматривать в приближении малости силы Бассэ по сравнению с силой Стокса. Такое приближение справедливо для случая $\omega \ll \nu/R^2$ [I], где $\omega$ - характерная частота изменения скорости движения частицы.

После линеаризации (6) имеем

$$\rho_T \frac{\partial \vec{v}_T}{\partial t} = \rho\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}_0\nabla)\vec{v}\right) + \frac{\rho}{2}\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - \beta_0(\vec{v}_T - \vec{v}) + \alpha'\beta'\vec{v}_0 , \tag{I3}$$

где $\beta_0 = 9\eta/2R^2$, $\beta = 9\eta(\alpha)\varphi(\alpha)/2R^2$, $\beta' = \partial\beta/\partial\alpha$. При выводе (I3) было учтено, что $\rho_T \gg \rho$, а также то, что невозмущенные частицы покоятся.

Считая, что возмущения скоростей и концентрации зависят от координат и времени по закону $exp(-i\omega t + i\vec{k}\vec{r})$, из уравнения (I3) получим

$$\vec{v}_T(-i\omega\rho_T + \beta_0) = \vec{v}(i\vec{k}\vec{v}_0\rho - \tfrac{3}{2}i\omega\rho + \beta_0) + \alpha'\beta'\vec{v}_0 , \tag{I4}$$

$$\beta' = \beta_0\left(\tfrac{5}{2} + \varphi'_\alpha\right) . \tag{I5}$$

Умножая скалярно обе части (I4) на $\vec{k}$ и воспользовавшись (II),(I2), (I5), получим для $\omega$ следующее уравнение:

$$\omega^2 + \omega\left(i\nu_k - \frac{5}{2}\frac{\rho}{\rho_T}\alpha_0\vec{k}\vec{v}_0\right) + \frac{\rho}{\rho_T}\alpha_0(\vec{k}\vec{v}_0)^2 - i\alpha_0\nu_k\vec{k}\vec{v}_0\left(\frac{7}{2} + \varphi'_\alpha\right) = 0 \tag{I6}$$

Здесь $\nu_k = \beta_0/\rho_T$. При выводе (I6) были учтены неравенства $\alpha_0 \ll 1$, $\rho_T \gg \rho$. Решение (I6) элементарно и имеет вид:

$$\omega \approx -\frac{i\nu_k}{2} + \frac{5}{4}\frac{\rho}{\rho_T}\alpha_0\vec{k}\vec{v}_0 \pm \frac{i\nu_k}{2}\sqrt{1 + \frac{4\alpha\rho}{\rho_T\nu_k^2}(\vec{k}\vec{v}_0)^2 - \frac{4i\alpha_0}{\nu_k}\vec{k}\vec{v}_0\left(\frac{7}{2} + \varphi'_\alpha\right)} . \tag{I7}$$

Будем полагать, что в формуле (I7) в подкоренном выражении второй и третий члены малы по сравнению с единицей. Подобное приближение действительно для подавляющего большинства физических объектов (движение капель тумана в воздухе, движение частиц пыли и аэрозолей в трубах и т.п.). Это дает возможность произвести некоторые упрощения (I7) с помощью разложения подкоренного выражения в ряд.

Поскольку в дальнейшем нас будет интересовать лишь мнимая часть (I7), то, выполняя несложные вычисления и пренебрегая малыми членами, получим

$$Im\,\omega = \frac{\alpha_0 (\vec{k}\vec{v}_0)^2}{\nu_k}\left(\frac{\rho}{\rho_T} + \alpha_0\left(\frac{7}{2} + \varphi'_\alpha\right)\right), \qquad (I8)$$

откуда видно, что система неустойчива.

Механизм данной неустойчивости может быть объяснен двумя причинами. Во-первых, при возрастании в некоторой области количества твердых частиц увеличивается скорость газа в этой области, так как эффективное сечение, через которое проходит газ, уменьшается. Увеличение скорости вызывает уменьшение давления (закон Бернулли), что приводит к дальнейшему сближению твердых частиц, а значит - к развитию неустойчивости. Во-вторых, при определенных условиях более существенную роль играет механизм, связанный с эффектом стесненности, т.е. увеличением силы Стокса в области с повышенной концентрацией твердых частиц. При этом частицы из области с повышенной концентрацией твердой фазы сильнее увлекаются потоком и догоняют частицы в области с пониженной концентрацией твердой фазы. Это приводит к росту плотности числа частиц, что способствует дальнейшему развитию процесса. Кроме того, необходимо отметить, что аналогичный вклад в неустойчивость вносит зависимость коэффициента вязкости от концентрации частиц, определяемая формулой Эйнштейна [I,5].

Приведем численную оценку выражения (I8). Для характерных значений параметров частиц, движущихся в воздухе под действием силы тяжести, имеем: $n \sim 10^6$ см$^{-3}$, $R = 10^{-3}$ см, $\nu = 0{,}15$ см$^2$с$^{-1}$, $\rho_T/\rho = 10^3$, $v_0 = 2R^2 g\rho_T / 9\nu\rho$, $k \sim n^{1/3}$. Будем считать, что частицы аэрозоля распределены хаотически. Тогда согласно [7] $\varphi = 1 + 5\alpha$. В итоге для величины инкремента неустойчивости получим $Im\,\omega \sim 10^{-1}$ с$^{-1}$. Характерное время увеличения концентрации $\tau \sim 10$ с. Описанная неустойчивость приводит к увеличению концентрации, т.е. к сближению мелких частиц аэрозоля и их дальнейшему слипанию. Подобный эффект может наблюдаться при оседании искусственных туманов, пыли и аэрозолей.

## Литература


1. Нигматулин Р.И. Основы механики гетерогенных сред. М.: Наука, 1978. 336 с.
2. Бусройд Р. Течение газа со взвешенными частицами. М.: Мир, 1975. 378 с.
3. Физические основы ультразвуковой технологии. Под ред. Л.Д.Розенберга. М.: Наука, 1970. 716 с.
4. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736с.
5. Хаппель Дж., Бреннер Г. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М.: Мир, 1976. 632 с.
6. Соу С. Гидродинамика многофазных систем. М.: Мир, 1971. 536 с.
7. Головин А.М., Чижов В.Е. К расчету скорости осаждения однородной суспензии // Прикладная математика и механика. 1978. Т.42. Вып.1. С.105-113.
8. Batchelor G.K. Sedimentation in a dilute dispersion of spheres.//Journal of Fluid Mechanics. 1972. V.52, pt.2. P.245 - 268.



Дата поступления статьи
28 июля 1989 г.