

Министерство высшего и среднего специального образования
Р С Ф С Р

Горьковский ордена Трудового Красного Знамени
научно-исследовательский радиофизический институт (НИРФИ)

П р е п р и н т № 293

АСИМПТОТИКИ ПОЛЕЙ
И ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВОЛН,
ВОЗБУЖДАЕМЫХ В УПРУГОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ
ПОВЕРХНОСТНЫМИ ИСТОЧНИКАМИ

В.П.Докучаев
А.В.Разин

Горький 1989

Докучаев В. П. , Разин А. В.

АСИМПТОТИКИ ПОЛЕЙ И ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВОЛН, ВОЗБУЖДАЕМЫХ В УПРУГОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ ПОВЕРХНОСТНЫМИ ИСТОЧНИКАМИ//
Препринт № 293. - Горький: НИРФИ, 1989. - 12 с.

УДК 534.232

С помощью преобразований Фурье в интегральном виде получено решение задачи о возбуждении гармоническими поверхностными силовыми источниками упругих волн в однородном твердом полупространстве. Распределение сил, действующих на поверхность полупространства, произвольным образом зависит от координат. Получены выражения для смещений частиц среды в волновой зоне, а также для потоков энергии и мощностей излучения продольных, поперечных (S_V - и S_H - поляризаций) и рэлеевских волн. Эти результаты могут быть использованы для численного моделирования сейсмических полей.

АСИМПТОТИКИ ПОЛЕЙ И ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВОЛН,
ВОЗБУЖДАЕМЫХ В УПРУГОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ
ПОВЕРХНОСТНЫМИ ИСТОЧНИКАМИ

Подписано к печати 01.11.89 г. МЦ 00928. Формат 60 x 84 / 16.
Бумага писчая. Печать офсетная. Объем 0,84 усл.л.
Заказ 4979. Тираж 120. Бесплатно.

Отпечатано на ротапринте НИРФИ

В разработке сейсмических антенн, предназначенных для вибрационного просвечивания Земли, важное место занимают расчеты смещений в упругих волнах на больших расстояниях от излучающей системы, а также исследование энергетических характеристик излучения — диаграмм направленности, полной излучаемой мощности и ее распределения по различным типам волн. Несмотря на то, что проблемам вибрационного возбуждения сейсмических волн посвящено значительное количество статей и монографий (см., например, [1-3]), вопросы, связанные с расчетом волновых полей в дальней зоне и энергетического баланса излучения для произвольных распределений по — поверхностных источников остались неисследованными. Целью настоящей работы является восполнение этого пробела.

Пусть полупространство $z > 0$ прямоугольной системы координат занимает однородная изотропная идеально упругая среда, характеризующаяся плотностью ρ и скоростями продольных и поперечных волн C_l и C_t соответственно. На единицу площади границы полупространства действуют силовые источники $\vec{f}(x, y) \exp(-i\omega t)$ и, следовательно, при $z=0$ выполняются граничные условия (и в же временной фактор $\exp(-i\omega t)$ будем опускать):

$$\sigma_{xz} = -f_x(x, y), \quad \sigma_{yz} = -f_y(x, y), \quad \sigma_{zz} = -f_z(x, y), \quad (I)$$

где σ_{ij} — тензор напряжений.

Введем скалярный ϕ и векторный \vec{A} потенциалы так, чтобы смещения частиц в среде определялись соотношением

$$\vec{u} = \text{grad } \psi + \text{rot } \vec{A}, \quad \text{div } \vec{A} = 0. \quad (2)$$

Наличие в среде границы является причиной существования поперечных волн двух типов - вертикальной (SV) и горизонтальной (SH) поляризаций. В соответствии с этим векторный потенциал представим в виде суммы $\vec{A} = \vec{A}_{SV} + \vec{A}_{SH}$.

Применение преобразований Фурье позволяет получить решения волновых уравнений для потенциалов с граничными условиями (I) в виде [4]:

$$\psi = \frac{1}{\rho c_t^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{(k_t^2 - 2k^2) F_z + 2\alpha_t \vec{k} \vec{F}}{D(k)} e^{i(\vec{k} \vec{r} + \alpha_t z)} d\vec{k}, \quad (3)$$

$$\vec{A}_{SV} = \frac{1}{\rho c_t^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{(k_t^2 - 2k^2) \vec{k} \vec{F} - 2\alpha_t k^2 F_z}{k^2 D(k)} (\vec{k} \times \vec{e}_z) e^{i(\vec{k} \vec{r} + \alpha_t z)} d\vec{k}, \quad (4)$$

$$\vec{A}_{SH} = \frac{1}{\rho \omega^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\alpha_t \vec{k} - k^2 \vec{e}_z)(k_x F_y - k_y F_x)}{\alpha_t k^2} e^{i(\vec{k} \vec{r} + \alpha_t z)} d\vec{k}. \quad (5)$$

В соотношениях (3) - (5) $k_{l,t} = \omega / c_{l,t}$ - волновые числа продольной и поперечной волн,

$$\alpha_{l,t} = (k_{l,t}^2 - k^2)^{1/2} = i |k^2 - k_{l,t}^2|^{1/2} \text{ при } k > k_{l,t},$$

$$\vec{k} \vec{F} = k_x F_x + k_y F_y, \quad \vec{k} \times \vec{e}_z = k_y \vec{e}_x - k_x \vec{e}_y,$$

$\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ - орты осей координат, $D(k) = (k_t^2 - 2k^2)^2 + 4k^2 \alpha_t^2$

$$\vec{F}(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} \vec{f}(x, y) e^{-i\vec{k} \vec{r}} dx dy \quad (6)$$

- пространственный спектр силовых источников.

Сложная структура подынтегральных функций в (3) - (5) затрудняет полный количественный анализ полей смещений в произвольных точках полупространства. Поэтому ниже будут рассмотрены асимп-

тотики полей упругих волн в дальней зоне.

Перейдем от прямоугольной системы координат к сферической: $R = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$, $\theta = \arccos \frac{z}{R}$, $\varphi = \arccos \frac{y}{x}$. Это позволяет записать точки стационарной фазы входящих в (3) - (5) экспонент в виде $\vec{K}_{l,t}^s = k_{l,t} \sin \theta (\vec{e}_x \cos \varphi + \vec{e}_y \sin \varphi)$. Вычисление интегралов (3) - (5) двумерным методом стационарной фазы [5] и последующее использование соотношения (2) дает выражения для смещений в волновой зоне:

$$U_R \approx - \frac{2\pi \cos \theta}{\rho c_l^2 R} e^{ik_l R} \times$$

$$\times \frac{2n \sin \theta (1 - n^2 \sin^2 \theta) F_r(\vec{K}_l^s) + (1 + 2n^2 \sin^2 \theta) F_z(\vec{K}_l^s)}{(1 - 2n^2 \sin^2 \theta)^2 + 4n^3 \cos \theta \sin^3 \theta (1 - n^2 \sin^2 \theta)^{1/2}}, \quad (7)$$

$$U_\theta \approx - \frac{2\pi \cos \theta}{\rho c_t^2 R} e^{ik_t R} \times \quad (8)$$

$$\times \frac{\cos 2\theta F_r(\vec{K}_t^s) - 2\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta} \sin \theta F_z(\vec{K}_t^s)}{\cos^2 2\theta + 4 \cos \theta \sin^2 \theta \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}},$$

$$U_\varphi \approx \frac{2\pi}{\rho c_t^2 R} F_\varphi(\vec{K}_t^s) e^{ik_t R}. \quad (9)$$

Смещения в Р-волне имеют только R-компоненту, а в SV- и SH- волнах - соответственно θ - и φ -компоненты. В (7) - (9) введено обозначение $n = c_t / c_l$, и вектор пространственного спектра силы, взятый в стационарных точках $\vec{k} = \vec{K}_{l,t}^s$, записан в цилиндрической системе координат: $F_r = F_x \cos \varphi + F_y \sin \varphi$ - горизонтальная радиальная составляющая, $F_\varphi = F_y \cos \varphi - F_x \sin \varphi$ - азимутальная составляющая.

Для вычисления смещений в волне Рэлея перейдем к полярным координатам на плоскости $K_x O K_y$. Интегрирование по полярному углу проведем методом стационарной фазы, а затем в интеграле по мо-

дулю волнового числа возьмем вычет в резонансном полюсе $K = K_r$. В результате этих операций получим выражения для вертикальных и горизонтальных смещений в резонансной волне:

$$u_{Rz} = -(\alpha_l \psi_0 e^{-\alpha_l z} + i k_R A_0 e^{-\alpha_t z}) e^{i k_R r}, \quad (I)$$

$$u_{Rr} = (i k_R \psi_0 e^{-\alpha_l z} - \alpha_t A_0 e^{-\alpha_t z}) e^{i k_R r}. \quad (II)$$

В (I), (II) использованы обозначения:

$$r = (x^2 + y^2)^{1/2}, \quad \alpha_l = (k_R^2 - k_l^2)^{1/2}, \quad \alpha_t = (k_R^2 - k_t^2)^{1/2},$$

$$\psi_0 = V \left[2 k_R \alpha_t F_r(k_R \cos \varphi, k_R \sin \varphi) + i \gamma F_z(k_R \cos \varphi, k_R \sin \varphi) \right]$$

$$A_0 = V \left[i \gamma F_r(k_R \cos \varphi, k_R \sin \varphi) - 2 k_R \alpha_l F_z(k_R \cos \varphi, k_R \sin \varphi) \right]$$

$$V = - \frac{2\pi}{\rho c_t^2 D'(k_R)} \sqrt{\frac{2\pi k_R}{r}} e^{-i \frac{\pi}{4}}, \quad \gamma = 2 k_R^2 - k_t^2,$$

$$D'(k_R) = \left. \frac{dD(k)}{dk} \right|_{k=k_R} = \frac{2}{k_R (2k_R^2 - k_t^2)^2} \left[k_t^6 (4k_R^2 - k_t^2) - 8k_R^6 (k_t^2 - k_l^2) \right]$$

Выражения (7) - (II) для смещений позволяют вычислить потоки энергии в упругих волнах. В сферической системе координат вектор потока энергии \vec{I} в P-, SV- и SH- волнах имеет только радиальную составляющую, формулы для которой имеют соответственно вид:

$$I_p = \frac{2\pi^2 \omega^2 \cos^2 \theta}{\rho c_t^3 R^2 \left[(1-2n^2 \sin^2 \theta)^2 + 4n^3 \cos \theta \sin^2 \theta \sqrt{1-n^2 \sin^2 \theta} \right]^2} \times \left| 2F_r(\vec{k}_t^s) n \sin \theta \sqrt{1-n^2 \sin^2 \theta} + (1-2n^2 \sin^2 \theta) F_z(\vec{k}_t^s) \right|^2, \quad (I2)$$

$$I_{sv} = \frac{2\pi^2 \omega^2 \cos^2 \theta}{\rho c_t^3 R^2 \left| \cos^2 2\theta + 4 \cos \theta \sin^2 \theta \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta} \right|^2} \times \left| \cos 2\theta F_r(\vec{k}_t^s) - 2 \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta} \sin \theta F_z(\vec{k}_t^s) \right|^2, \quad (I3)$$

$$I_{sh} = \frac{2\pi^2 \omega^2}{\rho c_t^3 R^2} \left| F_\varphi(\vec{k}_t^s) \right|^2. \quad (I4)$$

Проинтегрировав выражения (I2) - (I4) по полусфере радиуса R получим формулы для мощностей излучения, соответствующих данному типу волны:

$$W_{p,sv,sh} = R^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} I_{p,sv,sh}(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta. \quad (I5)$$

В волне Рэлея вектор потока энергии имеет только горизонтальную радиальную компоненту, которая описывается выражением:

$$I_R = \frac{4\pi^3 \omega^3 \xi^2}{\rho c_t^4 r q^2} \left\{ \left[4\xi^2 (\xi^2 - 1) |F_r|^2 + (2\xi^2 - 1) |F_z|^2 \right] \times \right. \\ \left. \times \left[1 + 4(\xi^2 - n^2) \right] \exp(-2\kappa_t z \sqrt{\xi^2 - n^2}) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \left[(2\xi^2 - 1)^2 |F_r|^2 + 4\xi^2 (\xi^2 - n^2) |F_z|^2 \right] (4\xi^2 - 3) e^{-2\kappa_t z \sqrt{\xi^2 - 1}} - \\
& - 2(2\xi^2 - 1) (\sqrt{\xi^2 - n^2} |F_z|^2 + \sqrt{\xi^2 - 1} |F_r|^2) \left[(1 + 4\xi^2 - 2n^2) \sqrt{\xi^2 - 1} + \right. \\
& \left. + (4\xi^2 - 1) \sqrt{\xi^2 - n^2} \exp \left[-\kappa_t z (\sqrt{\xi^2 - n^2} + \sqrt{\xi^2 - 1}) \right] \right] + \\
& + \frac{8\pi^3 \omega^3 \xi}{\rho c_t^4 r q^2} (2\xi^2 - 1) \operatorname{Im}(F_r F_z^*) \times \\
& \times \left\{ 2\xi^2 \left[\sqrt{\xi^2 - 1} (1 + 4\xi^2 - 4n^2) \exp \left(-2\kappa_t z \sqrt{\xi^2 - n^2} \right) + \right. \right. \\
& \left. \left. + \sqrt{\xi^2 - n^2} (4\xi^2 - 3) \exp \left(-2\kappa_t z \sqrt{\xi^2 - 1} \right) \right] - \right. \\
& \left. - (2\xi^2 - 1) \left[(1 + 4\xi^2 - 2n^2) \sqrt{\xi^2 - 1} + (4\xi^2 - 1) \sqrt{\xi^2 - n^2} \right] \times \right. \\
& \left. \times \exp \left[-\kappa_t z (\sqrt{\xi^2 - n^2} + \sqrt{\xi^2 - 1}) \right] \right\}. \quad (16)
\end{aligned}$$

В (16) $\xi = c_t / c_R$ (c_R - скорость волны Рэлея), $q = D(K_R) / K_t^2$, а пространственные спектры силового воздействия взяты при $\vec{K}_t = (K_R \cos \varphi, K_R \sin \varphi)$.

Для получения мощности излучения, соответствующего рэлеевской волне, необходимо вычислить поток энергии через поверхность полубесконечного цилиндра радиуса r , ось вращения которого совпадает с координатной осью Z :

$$W_R = \frac{4\pi^3 \omega^2 \xi^2}{\rho c_t^3 q^2} \left\{ \frac{2\xi^2 (\xi^2 - n^2) (4\xi^2 - 3)}{\sqrt{\xi^2 - 1}} + \frac{(2\xi^2 - 1)^2 [1 + 4(\xi^2 - n^2)]}{2\sqrt{\xi^2 - n^2}} \right\}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{2(2\xi^2-1)\sqrt{\xi^2-n^2} \left[(1+4\xi^2-2n^2)\sqrt{\xi^2-1} + (4\xi^2-1)\sqrt{\xi^2-n^2} \right]}{\sqrt{\xi^2-n^2} + \sqrt{\xi^2-1}} \Bigg\} \times \\
& \times \int_0^{2\pi} |F_z(K_R \cos \varphi, K_R \sin \varphi)|^2 d\varphi + \\
& + \frac{4\pi^3 \omega^2 \xi^2}{\rho c_t^3 q^2} \left\{ \frac{(2\xi^2-1)(4\xi^2-3)}{2\sqrt{\xi^2-1}} + \frac{2\xi^2(\xi^2-1)[1+4(\xi^2-n^2)]}{\sqrt{\xi^2-n^2}} \right\} - \\
& - \frac{2(2\xi^2-1)\sqrt{\xi^2-1} \left[(1+4\xi^2-2n^2)\sqrt{\xi^2-1} + (4\xi^2-1)\sqrt{\xi^2-n^2} \right]}{\sqrt{\xi^2-n^2} + \sqrt{\xi^2-1}} \Bigg\} \times \\
& \times \int_0^{2\pi} |F_r(K_R \cos \varphi, K_R \sin \varphi)|^2 d\varphi + \\
& + \frac{8\pi^3 \omega^2 \xi}{\rho c_t^3 q^2} (2\xi^2-1) \left\{ \xi^2 \left[\frac{\sqrt{\xi^2-1}(1+4\xi^2-4n^2)}{\sqrt{\xi^2-n^2}} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{\sqrt{\xi^2-n^2}(4\xi^2-3)}{\sqrt{\xi^2-1}} \right] - \frac{(2\xi^2-1)[(1+4\xi^2-2n^2)\sqrt{\xi^2-1} + (4\xi^2-1)\sqrt{\xi^2-n^2}]}{\sqrt{\xi^2-1} + \sqrt{\xi^2-n^2}} \right\} \\
& \times \int_0^{2\pi} \operatorname{Im} \left[F_r(K_R \cos \varphi, K_R \sin \varphi) F_z^*(K_R \cos \varphi, K_R \sin \varphi) \right] d\varphi \quad (17)
\end{aligned}$$

Таким образом, в работе получены асимптотические выражения для смещений в волновой зоне и потоков энергии излучения возбуждаемых сложными гармоническими силовыми поверхностными источниками продольных, поперечных (SV - и SH - поляризации) и рэлеевских волн. Эти выражения можно использовать для численного моделирования сейсмических полей в однородном упругом полупространстве. Разработан комплекс программ, позволяющих строить диаграммы направленности излучения и вычислять его мощность для сложных силовых воздействий при произвольных сдвигах фаз между x -, y - и z -компонентами силы. Программы написаны на языке "Фортран" и реализованы на ЭВМ БЭСМ-6.

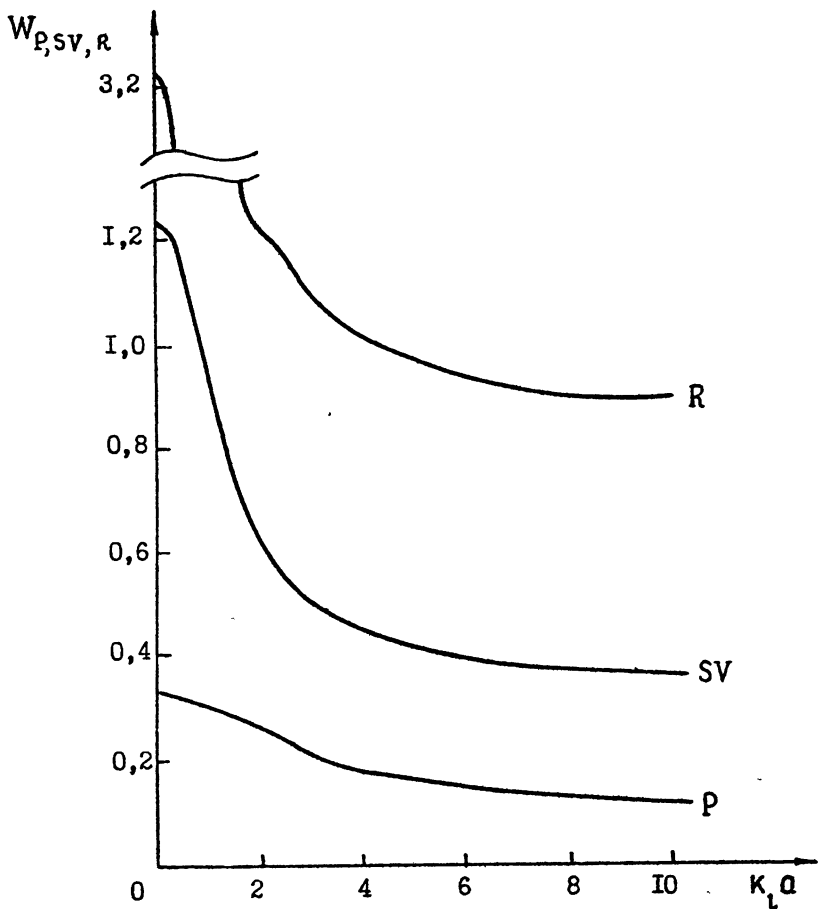
Рассмотрим численный пример. Пусть на поверхность упругого полупространства действует периодическая с циклической частотой ω вертикальная нагрузка f_0 , равномерно распределенная по квадратной площадке со стороной $2a$. Согласно (6) пространственный спектр этого силового воздействия имеет вид:

$$F_z = \frac{f_0 \sin k_x a \sin k_y a}{4\pi^2 a^2 k_x k_y} \quad (18)$$

При подстановке (18) в (15), (17) удобно представить мощности излучения в виде:

$$W_{P,SV,R} = \frac{f_0^2 \omega^2}{4\pi \rho c_l^3} \tilde{W}_{P,SV,R},$$

где $\tilde{W}_{P,SV,R}$ - безразмерные коэффициенты. Их значения, полученные с помощью численного интегрирования в (15), (17), приведены на рис. I. Из рассмотрения рис. I следует, что при $k_l a \ll 1$ (точечный источник) $\tilde{W}_P \approx 0,333$; $\tilde{W}_{SV} \approx 1,246$; $\tilde{W}_R \approx 3,257$. Те же значения $\tilde{W}_{P,SV,R}$ были получены в [6] для случая, когда вертикальная нагрузка равномерно распределена по круговой области малого радиуса. Анализ формул (15), (17) показывает, что если размер источника мал по сравнению с длинами упругих волн, то излучаемая мощность определяется полной нагрузкой f_0 и не зависит от формы источника. Численные результаты подтверждают этот вывод.



Р и с. 1 Зависимости численных коэффициентов $\tilde{W}_{P,SV,R}$ от безразмерного параметра $K_L a$. Отношение скоростей поперечной и продольной волн $\Pi = 1/\sqrt{3}$

В отличие от излучателя в виде вибрирующего диска, при увеличении радиуса которого эффективность возбуждения поперечных и рэлеевских волн резко падает [7], в случае вертикальной силы, распределенной по квадратной площадке значительных размеров ($K_L a > 1$), преобладающим является излучение волн Рэлея (58-60% от полной мощ-

ности излучения) и поперечных SV -волн (26-30% излучаемой мощности). Это, по-видимому, связано с их эффективной генерацией угловыми участками площадки. Мощность излучения рэлеевской волны монотонно спадает с ростом параметра $K_1 Q$ и ни при каких его значениях не обращается в нуль, как это было в случае распределения вертикальной нагрузки по круговой области [7].

Таким образом, можно сделать вывод, что если размер сейсмического источника сравним с длиной волны или больше ее, то распределение излучаемой мощности по различным типам упругих волн будет существенно зависеть от формы излучателя.

ЛИТЕРАТУРА

1. Петрашень Г.И. Основы математической теории распространения упругих волн. - В кн.: Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн. Вып.18. Л.: Наука (Ленинградское отделение), - 1978. - С.1-248.
2. Чичинин И.С. Вибрационное излучение сейсмических волн. - М.: Недра, 1984. - 224 с.
3. Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев.: Наук.думка, 1981. - 284 с.
4. Докучаев В.П., Разин А.В. Возбуждение упругих волн в твердом полупространстве поверхностными источниками.//Препринт № 224, Н.-и.радиофиз.ин-т, Горький, 1987. - 33 с.
5. Федорук М.В. Метод перевала. - М.: Наука, 1977. - 368 с.
6. Miller G.F., Pursey H. On the partition of energy between elastic waves in a semi-infinite solid.// Proc.Roy Soc. ser.A. 1955, V.233, N.1192, P. 55-69.
7. Гущин В.В., Докучаев В.П., Заславский Ю.М., Конюхова И.Д. О распределении мощности между различными типами излучаемых волн в полубезграничной упругой среде // В кн.: Исследование Земли невзрывными сейсмическими источниками. М.: Наука. 1981. С. 113 - 118.