

Министерство высшего и среднего специального образования
Р С Ф С Р

Горьковский ордена Трудового Красного Знамени
научно-исследовательский радиофизический институт (НИРФИ)

П р е п р и н т № 301

ФУНКЦИЯ АВТОКОРРЕЛЯЦИИ МЕТОДИЧЕСКОЙ ПОГРЕШНОСТИ
АНАЛОГО-ЦИФРОВОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ
ДЛЯ ОБОБЩЕННОЙ МОДЕЛИ АНАЛОГОВОГО СИГНАЛА

В.И.Пройдаков

Горький 1989

Пройдаков В. И.

ФУНКЦИЯ АВТОКОРРЕЛЯЦИИ МЕТОДИЧЕСКОЙ ПОГРЕШНОСТИ АНАЛОГО-ЦИФРОВОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДЛЯ ОБОБЩЕННОЙ МОДЕЛИ АНАЛОГОВОГО СИГНАЛА. //Препринт № 301, Горький: НИРФИ, 1989. - 18с.

УДК 681.332 51

В работе исследуется методическая погрешность аналого-цифрового преобразования для обобщенной модели входного аналогового сигнала.

Найдено точное аналитическое выражение для функции автокорреляции методической погрешности, усредненной на интервале наблюдений.

Получены интегральные оценки дисперсии методической погрешности.

ВВЕДЕНИЕ

Применение обработки на ЦЭМ предполагает переход от непрерывной формы представления сигнала к цифровой. Аналого-цифровое преобразование состоит из операции дискретизации во времени и квантования по уровню исходного непрерывного сигнала. Как и любому функциональному преобразованию, отличному от линейного, цифровому свойственна погрешность, соответствующая определенной мере отклонений цифрового представления сигнала от непрерывного.

По природе возникновения погрешность можно разделить на методическую и инструментальную. Методическая погрешность является результатом существенной нелинейности операции квантования по уровню и принципиально неустранима. Инструментальная погрешность есть следствие неидеальности прибора - аналого-цифрового преобразователя - и уменьшается по мере совершенствования технологии его изготовления.

Теоретическому исследованию и моделированию методической погрешности посвящены многие работы, обзор которых приведен в /1;2/. Авторы, цитируемые в указанных обзорах, исследовали существенно упрощенную по отношению к общему случаю модель входного непрерывного сигнала. В упрощенной модели методической погрешности предполагается ($\sigma^2/q^2 \gg 1$), где (σ^2) - дисперсия нормального стационарного случайного процесса (НССП) и (q) - шаг квантования по уровню. В этом случае нелинейную методическую погрешность можно представить /3/ в виде аддитивного "белого шума":

$$B[m] = B[0] \cdot \delta[m] = \frac{q^2}{12} \cdot \delta[m],$$
$$G(z) = \frac{q^2}{12}, \quad z = \exp(j\omega T),$$

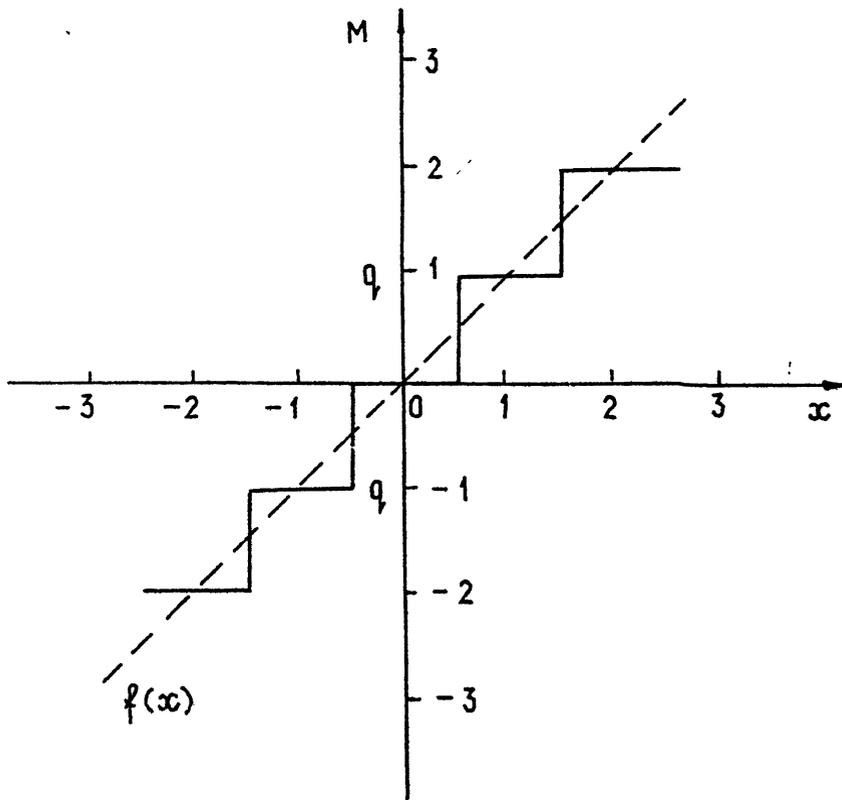
где, соответственно, $(B[m], G(z))$ - корреляционная функция и спектральная плотность шума квантования.

Однако в ряде работ /2,3/ показана ограниченность применения подобной модели. Особенно существенные отличия от модели "белого шума" проявляются при входных сигналах вида аддитивной суммы НССП и детерминированного периодического сигнала, а также всегда при "слабой дисперсии" ($\sigma^2/q^2 < 1$).

В связи с вышеизложенным актуальна задача определения функции автокорреляции методической погрешности аналого-цифрового преобразования при минимальных ограничениях на аналоговый сигнал.

I. Постановка задачи

Следуя общей методике [1, 3], предполагаем, что аналого-цифровое преобразование сигнала осуществляется в соответствии со ступенчатой (релейной) статической характеристикой, изображенной на рис. I.



Р и с. I

На этом рисунке по оси абсцисс отложено непрерывное значение уровня входного сигнала X , а по оси ординат – его цифровое представление (число) – M . Величина единицы младшего разряда на входе

обозначена (Q) и называется шагом квантования по уровню.

В дальнейшем полагаем, что все горизонтальные площадки статической характеристики имеют одинаковую длину (Q). Цифровое представление M функционально связано с непрерывным сигналом X аналитическим выражением:

$$M = E \left[x/q + 1/2 * \text{sign } x \right], \quad (1)$$

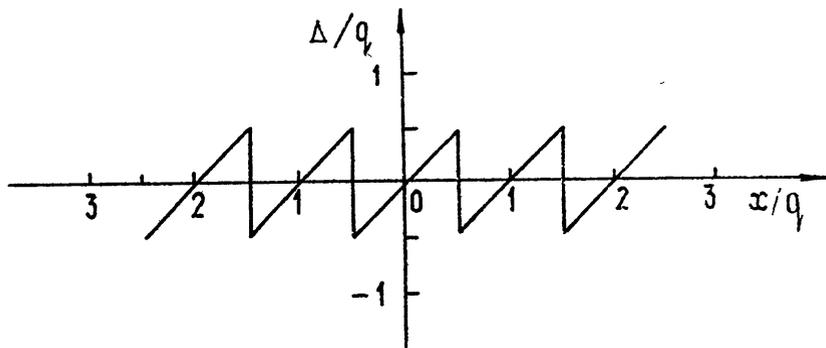
где $E[\dots]$ - целая часть числа, заключенного в скобки.

Для линеаризованной характеристики - $f(x)$, изображен - ной пунктиром на рис.1, коэффициент передачи $K = 1/q$. Наибольшая методическая погрешность при переходе от нелинейной характеристики к линейной не будет превышать по модулю $1/2 * q$.

Нормированная методическая погрешность квантования по уровню Δ/q будет равна

$$\Delta/q = x/q - M. \quad (2)$$

График нормированной методической погрешности квантования представлен на рис.2, где по оси абсцисс отложен нормированный на q входной сигнал.



Р и с . 2

Функцию Δ/q , как периодическую с периодом Q , можно разложить в ряд Фурье, используя формулу [4, I.44I(3)]:

$$\Delta/q = 1/\pi * \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} * \sin \frac{2\pi n x}{q}. \quad (3)$$

Выражение (3) определяет функциональную связь методической погрешности квантования по уровню Δ с исходным непрерывным сигналом $x(t)$.

В общем случае входной непрерывный сигнал $x(t)$ можно представить в виде суммы:

$$x(t) = y(t) + \xi(t), \quad (4)$$

где $y(t)$ - детерминированный сигнал, $\xi(t)$ - случайный процесс с двумерной плотностью вероятности $WW(\xi_1, \xi_2)$.

Для функции автокорреляции методической погрешности с учетом (3), (4) можно получить следующее аналитическое выражение:

$$\begin{aligned}
 B_{\Delta}(t_1, t_2) &= \frac{q^2}{\pi^2} \sum_{n,k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+k}}{n \cdot k} \int_{-\infty}^{\infty} \sin \left[\frac{2\pi n}{q} (y(t_1) + \xi_1) \right] * \sin \left[\frac{2\pi k}{q} (y(t_2) + \xi_2) \right] * \\
 &* WW(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 = \frac{q^2}{4\pi^2} \sum_{n,k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+k}}{n \cdot k} \left\{ e^{\frac{2\pi i}{q} [-ny(t_1) + ky(t_2)]} \times \text{TT} \left(-\frac{2\pi n}{q}, \frac{2\pi k}{q} \right) + \right. \\
 &+ e^{-\frac{2\pi i}{q} [-ny(t_1) + ky(t_2)]} \times \text{TT} \left(\frac{2\pi k}{q}, \frac{2\pi n}{q} \right) - e^{-\frac{2\pi i}{q} [ny(t_1) + ky(t_2)]} \times \text{TT} \left(-\frac{2\pi n}{q}, -\frac{2\pi k}{q} \right) - \\
 &\left. - e^{\frac{2\pi i}{q} [ny(t_1) + ky(t_2)]} \times \text{TT} \left(\frac{2\pi n}{q}, \frac{2\pi k}{q} \right) \right\},
 \end{aligned}$$

где

$$\text{TT}(v_1, v_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} WW(\xi_1, \xi_2) e^{i(v_1 \xi_1 + v_2 \xi_2)} d\xi_1 d\xi_2 -$$

двумерная характеристическая функция.

2. Случай нормального стационарного
случайного процесса

В случае НССП $\xi(t)$ с $WW(\xi_1, \xi_2) = NN(\mu, \sigma^2, \rho(\tau)) =$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{1-\rho^2(\tau)}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2(1-\rho^2(\tau))} [(\xi_1-\mu)^2 - 2\rho(\tau)(\xi_1-\mu)(\xi_2-\mu) + (\xi_2-\mu)^2]\right\},$$

$$TT(v_1, v_2) = \exp\left\{i\mu(v_1+v_2) - \frac{1}{2}\sigma^2[v_1^2 + 2\rho(\tau)v_1v_2 + v_2^2]\right\},$$

где μ - математическое ожидание, σ^2 - дисперсия, τ - разность времени между ξ_1 и ξ_2 .

Из (5) можно получить для $B_{\Delta}(t, t+\tau)$

$$B_{\Delta}(t, t+\tau) = \frac{q^2}{2\pi^2} \sum_{n,k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+k}}{n \cdot k} e^{-\beta^2(n-k)^2} \left\{ e^{-2\beta^2 nk(1-\rho(\tau))} \times \cos\left[\frac{2\pi}{q}(k y(t+\tau) - n y(t) + \mu(k-n))\right] - e^{-2\beta^2 nk(1+\rho(\tau))} \cos\left[\frac{2\pi}{q}(k y(t+\tau) + n y(t) + \mu(k+n))\right] \right\}, \quad (6)$$

где $\beta^2 = \frac{2\pi^2 \sigma^2}{q^2}$.

Как следует из (6), B_{Δ} зависит от времени t , то-есть методическая погрешность квантования в общем случае входного аналогового сигнала $x(t)$ - нестационарна.

Исследование сигнала $x(t)$ предполагает, как правило, получение оценок его параметров, усредненных на интервале наблюдений T . Следовательно, в качестве меры отклонения цифрового представления сигнала от аналогового можно рассматривать методическую погрешность Δ , усредненную на интервале наблюдений T - $\tilde{B}_{\Delta}(\tau)$:

$$\tilde{B}_{\Delta}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T B_{\Delta}(t, t+\tau) dt = \frac{q^2}{2\pi^2} \sum_{n,k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+k}}{n \cdot k} e^{-\beta^2(n-k)^2} x \quad (7)$$

$$x \left\{ e^{-2\beta^2 n \kappa (1-p(\tau))} [\cos \gamma (\kappa-n) I_{11} - \sin \gamma (\kappa-n) I_{12}] - e^{-2\beta^2 n \kappa (1+p(\tau))} [\cos \gamma (\kappa+n) I_{21} - \sin \gamma (\kappa+n) I_{22}] \right\},$$

где $y(t) = y_0 + \tilde{y}(t)$ и $y_0 = \text{const}$, $\gamma = \frac{2\pi(y_0 + \mu)}{q}$;

$$I_{11} = \frac{1}{T} \int_0^T \cos [F_1(\kappa, n, \tilde{y}, t, \tau)] dt,$$

$$I_{12} = \frac{1}{T} \int_0^T \sin [F_1(\kappa, n, \tilde{y}, t, \tau)] dt, \quad (8)$$

$$I_{21} = \frac{1}{T} \int_0^T \cos [F_2(\kappa, n, \tilde{y}, t, \tau)] dt,$$

$$I_{22} = \frac{1}{T} \int_0^T \sin [F_2(\kappa, n, \tilde{y}, t, \tau)] dt;$$

$$F_1(\kappa, n, \tilde{y}, t, \tau) = \frac{2\pi}{q} [\kappa \tilde{y}(t+\tau) - n \tilde{y}(t)],$$

(9)

$$F_2(\kappa, n, \tilde{y}, t, \tau) = \frac{2\pi}{q} [\kappa \tilde{y}(t+\tau) + n \tilde{y}(t)].$$

3. Случай детерминированного сигнала конечной длительности

Уточним модель аналогового сигнала и рассмотрим произвольный детерминированный сигнал $\tilde{y}(t)$, не содержащий постоянной составляющей, определенный на интервале наблюдений T ($t \in T$), для которого справедливо соотношение $\int_0^T \tilde{y}(t) dt < M$, где M — произвольное конечное число, то есть $M \neq \infty$. Отобразим отрезок $[0, T)$ с помощью линейного отображения $t' = 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{1}{2} \right)$ на отрезок $[-\pi, \pi)$ и периодически продолжим $\tilde{y}(t')$ на всю числовую ось t' , то есть построим $\tilde{y}(t' + 2\pi) = \tilde{y}(t')$ — 2π -периодическую функцию. Как следует из [5], функция $\tilde{y}(t')$ удовлетворяет условиям теоремы Фейера и может быть представлена рядом Фурье в любой точке t' отрезка $[-\pi, \pi)$, или в любой точке t отрезка $[0, T)$:

$$\frac{1}{2} \left\{ \tilde{y}(t+0) + \tilde{y}(t-0) \right\} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \left\{ A_0 + S_1(t) + S_2(t) + \dots + S_{r-1}(t) \right\}. \quad (10)$$

Выражение справедливо при условии, что пределы в левой части (10) существуют и

$$A_r(t) = a_r \cos rt + b_r \sin rt = c_r \cos(rt + \varphi_r), \quad (11)$$

$$S_r(t) = \sum_{s=0}^r A_s(t),$$

где $S_r(t)$ — частичная сумма ряда Фурье. Следовательно, при вышеуказанных минимальных допущениях на свойства детерминированного сигнала, без потери общности дальнейших исследований, в качестве обобщенной модели можно взять частичную сумму ряда Фурье в следующей форме:

$$\tilde{y}(t) = S_N(t) = \sum_{i=1}^N a_i \cos(\omega_i t + \varphi_i) = \sum_{i=1}^N a_i \cos \Phi_i(t), \quad (12)$$

где текущая фаза $\Phi_i(t) = \omega_i t + \varphi_i$ и a_i, ω_i, φ_i - соответственно, произвольные амплитуда, частота и начальная фаза гармонических составляющих. Подставляя (I2) в (9), можно получить следующие выражения:

$$F_1(k, n, \tilde{y}, t, \tau) = \frac{2\pi}{q} \sum_{i=1}^N a_i \left[k \cos(\Phi_i + \omega_i \tau) - n \cos \Phi_i \right] = \\ = \sum_{i=1}^N \alpha_i r_i \sin(\Phi_i - \psi_i), \quad (I3)$$

$$F_2(k, n, \tilde{y}, t, \tau) = \frac{2\pi}{q} \sum_{i=1}^N a_i \left[k \cos(\Phi_i + \omega_i \tau) + n \cos \Phi_i \right] = \\ = \sum_{i=1}^N \alpha_i R_i \sin(\Phi_i + \psi_i),$$

где $\alpha_i = \frac{2\pi a_i}{q}$, $r_i^2 = k^2 - 2kn \cos \omega_i \tau + n^2$, $R_i^2 =$ (I4)

$= k^2 + 2kn \cos \omega_i \tau + n^2$, $\psi_i = \arctg \frac{n - k \cos \omega_i \tau}{k \sin \omega_i \tau}$ не зависит от a_i .

Предполагаем, что произвольные частоты ω_i таковы, что $\sum_{i=1}^P (\pm k_i \omega_i) \neq 0$ для любых знаковых комбинаций (\pm) , где $k_i = 1, 2, 3, 4, \dots$, $i \in [1, N]$; $P = 2, 3, \dots, N$. Учитывая предположение, выбираем интервал наблюдений T так, чтобы выполнялись неравенства

$$\left[\sum_{i=1}^P (\pm k_i \omega_i) \right] * T \gg 1 \quad \text{для любого } P. \quad (I5)$$

Подставляя (I3) в подынтегральные выражения (8), учитывая соотношение (I5), используя результат теоремы о представлении (Приложение 2), получим для $I_{11}, I_{12}, I_{21}, I_{22}$

$$I_{11} = \prod_{i=1}^N J_0(\alpha_i r_i), \quad I_{21} = \prod_{i=1}^N J_0(\alpha_i R_i), \quad I_{12} = I_{22} = 0, \quad (I6)$$

где $J_0(x)$ - функция Бесселя нулевого порядка действительного аргумента.

гумента.

Подставляя (16) в (7), получим итоговое аналитическое выражение функции автокорреляции методической погрешности аналого-цифрового преобразования для обобщенной модели аналогового сигнала (12):

$$\tilde{B}_\Delta(\tau) = \frac{q^2}{2\pi^2} \sum_{n,k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+k}}{n \cdot k} e^{-\beta^2(n-k)^2} \left[e^{-2\beta^2 nk(1-p(\tau))} \cos(k-n) \times \right. \\ \left. \times \prod_{i=1}^N J_0(\alpha_i r_i) - e^{-2\beta^2 nk(1+p(\tau))} \cos \gamma(k+n) \prod_{i=1}^N J_0(\alpha_i R_i) \right]. \quad (17)$$

4. Интегральные оценки

Получим интегральные оценки методической погрешности из (17). Используя соотношения между функциями Бесселя /6/ и на основании /7; 5.7.II, (18, 19)/, можно показать справедливость следующих равенств:

$$J_0(\alpha_i r_i) = J_0(\alpha_i k) J_0(\alpha_i n) + \\ + 2 \sum_{l_i=1}^{\infty} J_{l_i}(\alpha_i k) J_{l_i}(\alpha_i n) \cos l_i \omega_i \tau, \quad (18)$$

$$J_0(\alpha_i R_i) = J_0(\alpha_i k) J_0(\alpha_i n) + \\ + 2 \sum_{l_i=1}^{\infty} (-1)^{l_i} J_{l_i}(\alpha_i k) J_{l_i}(\alpha_i n) \cos l_i \omega_2 \tau, \quad (19)$$

$$J_0(\alpha_i k) J_0(\alpha_i n) + 2 \sum_{l_i=1}^{\infty} J_{l_i}(\alpha_i k) J_{l_i}(\alpha_i n) = J_0(\alpha_i (k-n)), \quad (20)$$

$$J_0(\alpha_i k) J_0(\alpha_i n) + 2 \sum_{l_i=1}^{\infty} (-1)^{l_i} J_{l_i}(\alpha_i k) J_{l_i}(\alpha_i n) = J_0(\alpha_i (k+n)). \quad (21)$$

Оценим дисперсию методической погрешности

$$S^2 = \lim_{\tau \rightarrow 0} \tilde{B}_{\Delta}(\tau) - \lim_{\tau \rightarrow \infty} \tilde{B}_{\Delta}(\tau). \quad (22)$$

Используя (18)-(21), получим для пределов:

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \tilde{B}_{\Delta}(\tau) = \frac{q^2}{2\pi^2} \sum_{n,k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+k}}{n \cdot k} e^{-\beta^2(n-k)^2} \left\{ \cos \gamma(n-k) \prod_{i=1}^N J_0(\alpha_i(k-n)) - e^{-4\beta^2 nk} \cos \gamma(k+n) \prod_{i=1}^N J_0(\alpha_i(k+n)) \right\}, \quad (23)$$

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \tilde{B}_{\Delta}(\tau) = \frac{q^2}{2\pi^2} \sum_{n,k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+k}}{n \cdot k} e^{-\beta^2(n-k)^2} e^{-2\beta^2 nk} \left\{ \cos \gamma(k-n) \times \right. \\ \left. \times \lim_{\tau \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^N J_0(\alpha_i r_i) - \cos \gamma(k+n) \lim_{\tau \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^N J_0(\alpha_i R_i) \right\}, \quad \text{где} \quad (24)$$

учтено, что $\lim_{\tau \rightarrow 0} \rho(\tau) = 1$ и $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \rho(\tau) = 0$.

Для $\sigma/q \geq 1/2$ и $e^{-\beta^2(n-k)^2} < 10^{-2(n-k)^2}$ - случай "сильной дисперсии" случайного процесса - в (23) и (24) можно учитывать лишь члены $n=k$ и пренебречь членами с сомножителями $e^{-2\beta^2 n^2}$, тогда независимо от γ и α_i

$$S^2 = \frac{q^2}{2\pi^2} \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{h^2} = \frac{q^2}{12}.$$

Для $\alpha_i \gg 1$ из асимптотического соотношения $\lim_{x \rightarrow \infty} J_0(x) \rightarrow 0$ и

$J_0(0) = 1$, а также из справедливости условий теоремы о представлении (Приложение 2), в (23) следует учитывать лишь члены $n = k$ и $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \bar{B}_\Delta(\tau) = 0$, то есть независимо от γ и β^2

$$S^2 = \frac{q^2}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{q^2}{12}.$$

Для случая $\alpha_i: (n+k) < 1$, где $n, k \sim 10^1 + 10^2$, когда выполняется соотношение $J_0(\alpha_i r_i) \approx J_0(\alpha_i R_i) \approx 1$, из (23), (24) можно получить для дисперсии следующую оценку:

$$S^2 = \frac{q^2}{2\pi^2} \sum_{n,k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+k}}{n \cdot k} e^{-\beta^2(n-k)^2} (1 - e^{-2\beta^2 nk}) \times \\ \times (\cos \gamma (k-n) + e^{-2\beta^2 nk} \cos \gamma (k+n)). \quad (25)$$

Выражение (25) соответствует дисперсии методической погрешности в случае слабого детерминированного сигнала и зависит от β^2 и γ .

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе проведено исследование методической погрешности аналого-цифрового преобразования для обобщенной модели входного аналогового сигнала.

При самых общих допущениях на детерминированный сигнал найдено аналитическое выражение для функции автокорреляции методической погрешности, усредненной на интервале наблюдений.

Получены интегральные оценки дисперсии.

Приложение I. Лемма о разложении на сомножители $\cos(\sum_{i=1}^N A_i)$ и $\sin(\sum_{i=1}^N A_i)$.

1. Среди слагаемых в виде сомножителей в разложении $\cos(\sum_{i=1}^N A_i)$ имеется один и только один вида $\prod_{i=1}^N \cos A_i$, а все остальные имеют вид $\prod_{i=1}^{N-k} \cos A_i \cdot \prod_{j=1}^k \sin A_j$, где $k = 1, 2, \dots, N$.

2. Среди слагаемых в виде сомножителей в разложении $\sin(\sum_{i=1}^N A_i)$

нет ни одного вида $\prod_{i=1}^N \cos A_i$, а все они имеют вид $\prod_{i=1}^{N-K} \cos A_i \prod_{j=1}^K \sin A_j$, где $K = 1, 2, \dots, N$.

Доказательство. Используя формулы связи между тригонометрическими функциями получим следующие рекуррентные соотношения:

$$\cos\left(\sum_{i=1}^N A_i\right) = (\cos A_N \cos A_{N-1} - \sin A_N \sin A_{N-1}) \cos\left(\sum_{i=1}^{N-2} A_i\right) - \quad (\text{III})$$

$$- (\cos A_N \sin A_{N-1} + \sin A_N \cos A_{N-1}) \sin\left(\sum_{i=1}^{N-2} A_i\right),$$

$$\sin\left(\sum_{i=1}^N A_i\right) = (\sin A_N \cos A_{N-1} + \cos A_N \sin A_{N-1}) \cos\left(\sum_{i=1}^{N-2} A_i\right) + \quad (\text{II})$$

$$+ (\cos A_N \cos A_{N-1} - \sin A_N \sin A_{N-1}) \sin\left(\sum_{i=1}^{N-2} A_i\right).$$

Из соотношений следует, что в (III), независимо от четности или нечетности N , имеется лишь одно слагаемое $\prod_{i=1}^N \cos A_i$, а все остальные содержат хотя бы один множитель $\sin A_j$, то есть первое предложение леммы доказано.

В (II) все слагаемые содержат хотя бы один множитель $\sin A_i$, так как второе слагаемое выражения (II) содержит множитель $\sin^2 A_i$, при N нечетном и равно нулю при N четном, то есть доказано второе предложение и лемма полностью.

Приложение 2. Теорема о представлении методической погрешности аналого-цифрового преобразования.

В соответствии с (9), (I2) и (I3)

$$\tilde{y}(t) = S_N(t) = \sum_{i=1}^N a_i \cos(\omega_i t + \varphi_i), \quad (\text{II.1})$$

где a_i, ω_i, φ_i - соответственно произвольные амплитуда, частота

и начальная фаза гармонических составляющих;

$$F_1(k, n, \tilde{y}, t, \tau) = \sum_{i=1}^N \alpha_i r_i \sin(\omega_i t + \varphi_i - \psi_i), \quad (\text{П}2.2)$$

$$F_2(k, n, \tilde{y}, t, \tau) = \sum_{i=1}^N \alpha_i R_i \sin(\omega_i t + \varphi_i + \psi_i). \quad (\text{П}2.3)$$

Теорема. Пусть произвольные частоты в (П2.1) таковы, что $\sum_{i=1}^p (\pm k_i \omega_i) \neq 0$ для любых знаковых комбинаций (\pm) , где $k_i = 1, 2, 3, \dots, i=1, \dots, p$, $p = 2, 3, \dots, N$, а интервал наблюдений T выбран таким, что выполняются неравенства $[\sum_{i=1}^p (\pm k_i \omega_i)] \times T \gg 1$ для любого p , тогда справедливы следующие равенства:

$$I_{11} = \frac{1}{T} \int_0^T \cos F_1 dt = \prod_{i=1}^N J_0(\alpha_i r_i), \quad I_{21} = \frac{1}{T} \int_0^T \cos F_2 dt = \prod_{i=1}^N J_0(\alpha_i R_i), \quad (\text{П}2.4)$$

$$I_{12} = \frac{1}{T} \int_0^T \sin F_1 dt = I_{22} = \frac{1}{T} \int_0^T \sin F_2 dt = 0.$$

Доказательство. Подставляем (П2.2) и (П2.3) в (П2.4) и, используя лемму о разложении на сомножители, убеждаемся, что лишь I_{11} и I_{21} содержат по единственному слагаемому $\prod_{i=1}^N \cos A_i$, а I_{12} и I_{22} подобных слагаемых не содержат.

Для разложений тригонометрических функций в ряд по функциям Бесселя справедливы следующие формулы [6]:

$$\cos(x \sin \alpha) = J_0(x) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} J_{2k}(x) \cos 2k\alpha, \quad (\text{П}2.5)$$

$$\sin(x \sin \alpha) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} J_{2k-1}(x) \cos (2k-1)\alpha. \quad (\text{П}2.6)$$

Полагая в формулах (П2.5), (П2.6) соответственно $x = \alpha_i r_i$ или $x = \alpha_i R_i$, а $\alpha = (\omega_i t + \varphi_i - \psi_i)$ или $\alpha = (\omega_i t + \varphi_i + \psi_i)$, подставляя полученные выражения вместо слагаемых в (П2.4), можно убедиться в том, что I_{11} содержит под интегралом единственное слагаемое $\prod_{i=1}^p J_0(\alpha_i r_i)$, а $I_{21} = \prod_{i=1}^p J_0(\alpha_i R_i)$, не зависящее от времени t , а все остальные слагаемые содержат множители $\cos\left[\left(\sum_{i=1}^p \pm k_i \omega_i\right)t\right]$, I_{12} и I_{22} всегда содержат под интегралом слагаемые с множителем $\cos\left[\left(\sum_{i=1}^p \pm k_i \omega_i\right)t\right]$. Для оценки значений слагаемых, зависящих от t , в $I_{11}, I_{12}, I_{21}, I_{22}$, при почленном интегрировании справедливо следующее соотношение:

$$\left| \frac{B(x)}{T} \int_0^T \cos\left[\left(\sum_{i=1}^p \pm k_i \omega_i\right)t\right] dt \right| = \left| \frac{B(x) \sin\left[\left(\sum_{i=1}^p \pm k_i \omega_i\right)T\right]}{\left(\sum_{i=1}^p \pm k_i \omega_i\right)T} \right| < \frac{1}{\left|T \left(\sum_{i=1}^p \pm k_i \omega_i\right)\right|}, \quad (\text{П2.7})$$

так как $|B(x)| < 1$ — есть произведение функций Бесселя целого порядка $1, 2, \dots$, $|\sin x| \leq 1$. Учитывая, что по условиям теоремы выражения (П2.4) при почленном интегрировании в соответствии с (П2.7) содержат конечное число членов с бесконечно малыми значениями, можно считать их сумму равной нулю и учитывать лишь слагаемые, не зависящие от времени, то есть равенства (П2.4) справедливы, теорема доказана.

Следствие. Из справедливости равенств (П2.4) следует независимость оценок $I_{11}, I_{21}, I_{12}, I_{22}$ от начальных фаз гармонических составляющих в (П2.1).

ЛИТЕРАТУРА

1. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. /Книга первая, 2-е изд., перераб. и доп. - М.: Сов.радио, 1974. - 552 с.
2. Под ред.Оппенгейма Э. Применение цифровой обработки сигнала - лов./Пер. с англ.под ред.А.М.Рязанцева. - М.: Мир, 1980. - - 552 с.
3. Бессенерский В.А. Цифровые автоматические системы. - М. : Наука, 1976. - 576 с.
4. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. - Изд.5-е. - М.: Наука, 1971. - II08 с.
5. Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.Н. Курс современного анализа. Ос - новные операции анализа./Пер. с англ.под ред.Ф.В.Широкова.- - Часть первая. - М.: Физматгиз. , 1963. - 344 с.
6. Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.Н. Курс современного анализа Транс - цендентные функции./Пер. с англ. под ред.Ф.В.Широкова. - - Часть вторая. - М.: Физматгиз., 1963. - 516 с.
7. Прудников А.П., Бричков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды специальных функций. - М.: Наука, 1983.

Дата поступления статьи
12 декабря 1989 г.

ФУНКЦИЯ АВТОКОРРЕЛЯЦИИ МЕТОДИЧЕСКОЙ ПОГРЕШНОСТИ
АНАЛОГО-ЦИФРОВОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ
ДЛЯ ОБОБЩЕННОЙ МОДЕЛИ АНАЛОГОВОГО СИГНАЛА

Подписано в печать 22.12.89 г. МЦ 00974. Формат 60x84/16.

Бумага писчая. Печать офсетная. Объем усл.п.л.

Заказ 5003. Тираж 120. Бесплатно.

Отпечатано на ротативе НИРФИ