Министерство высшего и среднего специального образования
Р С Ф С Р

Горьковский ордена Трудового Красного Знамени
научно-исследовательский радиофизический институт (НИРФИ)

Препринт № 302

ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ АВТОКОРРЕЛЯЦИИ И СПЕКТРА МЕТОДИЧЕСКОЙ ПОГРЕШНОСТИ АНАЛОГО-ЦИФРОВОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДЛЯ ОБОБЩЕННОЙ МОДЕЛИ АНАЛОГОВОГО СИГНАЛА

Пройдаков В.И.

Горький 1969

П р о й д а к о в В. И.

ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ АВТОКОРРЕЛЯЦИИ И СПЕКТРА МЕТОДИЧЕСКОЙ ПОГРЕШНОСТИ АНАЛОГО-ЦИФРОВОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДЛЯ ОБОБЩЕННОЙ МОДЕЛИ АНАЛОГОВОГО СИГНАЛА.//Препринт № 302, Горький: НИРФИ. - 1989. - - 15 с.

УДК 681.332 51

В работе исследованы спектрально-корреляционные характеристики методической погрешности аналого-цифрового преобразования. Получены аналитические выражения функции автокорреляции и спектра в виде сходящихся функциональных рядов. Приведены оценки эффективности подавления "шума дробления" за счет "раскачивающего шума" перед аналого-цифровым преобразованием.

ВВЕДЕНИЕ

Нелинейность аналого-цифрового преобразования является причиной отличия спектрально-корреляционных характеристик исходного аналогового сигнала от соответствующего ему цифрового. Например, в ряде работ, обзор которых проведен в /I, 3/, исследованы " шумы дробления", возникающие при воспроизведении цифровых звукозаписей, причем эти шумы эффективно подавлялись при добавлении к исходному аналоговому сигналу вспомогательного "раскачивающего шума"(dither noise) перед аналого-цифровым преобразованием. В /2/ сделан вывод о существенном влиянии периодических составляющих в аналоговом сигнале на точность управления цифровыми автоматическими системами. В работе /4/ отмечается, что точное описание спектрально-корреляционных характеристик цифрового сигнала сопряжено со значительными математическими трудностями, поэтому на практике применяются приближенные соотношения для частных случаев, основанные на веростностных методах.

В связи с вышеизложенным актуальна задача нахождения точного аналитического выражения для функции автокорреляции и спектра методической погрешности аналого-цифрового преобразования при самых общих допущениях на аналоговый сигнал.

I. Постановка задачи

В работе /5/ получено аналитическое выражение усредненной на интервале наблюдения функции автокорреляции методической погрешности аналого-цифрового преобразования $\widetilde{B}_\Delta(\tau)$ для обобщенной модели аналогового сигнала $x(t)$, где $x(t)=y(t)+\xi(t)$, $y(t)=y_0+\widetilde{y}(t)$, $y_0=\mathrm{const}$, $\widetilde{y}(t)=S_N(t)=\sum\limits_{i=1}^{N} a_i\cos(\omega_i t+\varphi_i)$ и a_i, ω_i, φ_i соответственно произвольные амплитуда, частота и начальная фаза гармонических составляющих детерминированного сигнала, $\xi(t)$ нормальный стационарный случайный процесс с двумерной плотностью вероятности $NN(\mu, \sigma^2, \rho(\tau))$ и μ, σ^2, $\rho(t)$ соответственно математическое ожидание, дисперсия и коэффициент автокорреляции,

$$\widetilde{B}_\Delta(\tau)=\frac{q^2}{2\pi^2}\sum_{n,k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+k}}{n\cdot k}e^{-\beta^2(n-k)^2}\Big[e^{-2\beta^2nk(1-\rho(\tau))}\cos\gamma(n-k)\times\prod_{i=1}^{N}J_0(\alpha_i r_i)-$$

$$-e^{-2\beta^2nk(1+\rho(\tau))}\times\cos\gamma(k+n)\prod_{i=1}^{N}J_0(\alpha_i R_i)\Big], \qquad (I)$$

где q - шаг квантования, $\beta^2=\dfrac{2\pi^2\sigma^2}{q^2}$, $\gamma=\dfrac{2\pi(y_0+\mu)}{q^2}$, $\alpha_i=\dfrac{2\pi a_i}{q}$, $r_i^2=k^2+n^2-2kn\cos\omega_i\tau$, $R^2=k^2+n^2+2kn\cos\omega_i\tau$, $J_0(x)$- функция Бесселя нулевого порядка действительного аргумента. Дальнейшее исследование состоит в замене произведений функций Бесселя в (I) на соответствующие суммы.

2. Функция автокорреляции

Используя формулы (П2) и (П3) в Приложении для представления произведения функций Бесселя в виде сумм, вводя соответствующие обозначения и учитывая, что

$$(-1)^{\sum\limits_{i=1}^{r} l_i} = \begin{cases} +1, \text{ если } l_i = 2k, \text{ независимо от } r, \text{ и } l_i = 2k-1, \text{ но } r = 2\nu; \\ -1, \text{ если } l_i = 2k-1 \text{ и } r = 2\nu - 1, \text{ одновременно } k, \nu = 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$$

получим из (I) следующее выражение

$$\tilde{B}_\Delta(\tau) = \frac{q^2}{2\pi^2} \sum_{n,k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+k}}{n \cdot k} e^{-\beta^2(n-k)^2} C_{n,k} A_N^0 +$$

$$+ \frac{q^2}{\pi^2} \sum_{n,k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+k}}{n \cdot k} e^{-\beta^2(n-k)^2} \sum_{j=1}^{\binom{N}{1}} \left\{ \sum_{l_i=1}^{\infty} \left[C_{n,k} G_1 \cos(\Omega^1_{1,2l}\tau) + D_{n,k} H_1 \cos(\Omega^1_{1,2l-1}\tau) \right] \right\}_j^{N,1} +$$

$$+ \frac{q^2}{\pi^2} \sum_{n,k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+k}}{n \cdot k} e^{-\beta^2(n-k)^2} \sum_{r=2}^{N} \sum_{j=1}^{\binom{N}{r}} \Bigg\{ \overbrace{\sum_{l_i=1}^{\infty} \cdots \sum_{l_i=1}^{\infty}}^{r} \Bigg\{ C_{n,k} G^{x}_{r} \sum_{t=1}^{2^{r-1}} \cos(\Omega^r_{t,2l}\tau) + \qquad (2)$$

$$+ \sum_{s=1}^{E\left[\frac{r}{2}\right]} \sum_{f=1}^{\binom{r}{2s}} \left[C_{n,k} F^{x}_{r,2s} \begin{pmatrix} \underline{r-2s=0}: \sum\limits_{v=1}^{2^{2s-1}} \cos(\Omega^{2s}_{v,2l-1}\tau) \\ \underline{r-2s\neq 0}: \sum\limits_{u=1}^{2^{r-2s-1}} \sum\limits_{v=1}^{2^{2s-1}} \cos(\Omega^{r-2s}_{u,2l} + \Omega^{2s}_{v,2l-1})\tau + \cos(\Omega^{r-2s}_{u,2l} - \Omega^{2s}_{v,2l-1})\tau \end{pmatrix} \right]_f^{r,2s} +$$

$$+ \sum_{s=1}^{E\left[\frac{r+1}{2}\right]} \sum_{h=1}^{\binom{r}{2s-1}} \left[D_{n,k} H^{x}_{r,2s-1} \begin{pmatrix} \underline{r-2s+1=0}: \sum\limits_{v=1}^{2^{2s-2}} \cos(\Omega^{2s-1}_{v,2l-1}\tau) \\ \underline{r-2s+1\neq 0}: \sum\limits_{u=1}^{2^{r-2s}} \sum\limits_{v=1}^{2^{2s-2}} \cos(\Omega^{r-2s+1}_{u,2l} + \Omega^{2s-1}_{v,2l-1})\tau + \cos(\Omega^{r-2s+1}_{u,2l} - \Omega^{2s-1}_{v,2l-1})\tau \end{pmatrix} \right]_h^{r,2s-1} \Bigg\} \Bigg\}_j^{N,r},$$

где $\left\{\left[C_{n,\kappa}\right]\right\}_j^{N,r} = C_{n,\kappa} = e^{-2\beta^2 n\kappa(1-\rho(\tau))}\cos\gamma(\kappa-n) - e^{-2\beta^2 n\kappa(1+\rho(\tau))}\cos\gamma(\kappa+n)$, (3)

$$\left\{\left[D_{n,\kappa}\right]\right\}_j^{N,r} = D_{n,\kappa} = e^{-2\beta^2 n\kappa(1-\rho(\tau))}\cos\gamma(\kappa-n) + e^{-2\beta^2 n\kappa(1+\rho(\tau))}\cos\gamma(\kappa+n), \quad (4)$$

$E[x]$ - целая часть от x ; аналогично определению $\left\{I_r \dots J_{N-r}\right\}_j^{N,r}$ в Приложении введем $\left[I_{2s} \dots J_{r-2s}\right]_f^{r,2s}$ - f-е сочетание неповторяющихся индексов i из r по $2s$ или из r по $r-2s$ в зависимости от индексов, используемых в аналитических выражениях внутри скобок и $f = 1, 2, \dots, \binom{r}{2s} = \binom{r}{r-2s}$, $\left[I_{2s-1} \dots J_{r-2s+1}\right]_h^{r,2s-1}$ - h-е сочетание неповторяющихся индексов i из r по $2s-1$ или из r по $r-2s+1$ в зависимости от индексов, используемых в аналитических выражениях внутри скобок и $h = 1, 2, \dots, \binom{r}{2s-1} = \binom{r}{r-2s+1}$,

$$\left\{G_1\right\}_j^{N,1} = \left\{\prod_{i=1}^{N-1} J_0(\alpha_i n)\, J_0(\alpha_i \kappa) \times J_{2l_i}(\alpha_i n)\, J_{2l_i}(\alpha_i \kappa)\right\}_j^{N,1}, \quad (5)$$

$$\left\{H_1\right\}_j^{N,1} = \left\{\prod_{i=1}^{N-1} J_0(\alpha_i n)\, J_0(\alpha_i \kappa) \times J_{2l_i-1}(\alpha_i n)\, J_{2l_i-1}(\alpha_i \kappa)\right\}_j^{N,1}, \quad (6)$$

$$\left\{G_r\right\}_j^{N,r} = \left\{\prod_{i=1}^{N-r} J_0(\alpha_i n)\, J_0(\alpha_i \kappa) \times \prod_{i=1}^{r} J_{2l_i}(\alpha_i n)\, J_{2l_i}(\alpha_i \kappa)\right\}_j^{N,r}, \quad (7)$$

$$\left\{\left[H_{r,2s-1}\right]_h^{r,2s-1}\right\}_j^{N,r} = \left\{\prod_{i=1}^{N-r} J_0(\alpha_i n)\, J_0(\alpha_i \kappa) \times\right.$$

$$\times\left[\prod_{i=1}^{r-2s+1} J_{2l_i}(d_i n) J_{2l_i}(d_i K)\times \prod_{i=1}^{2s-1} J_{2l_i-1}(d_i n) J_{2l_i-1}(d_i K)\right]_h^{r,2s-1}\Bigg\}_j^{N,r}, \quad (8)$$

$$\left\{\left[F_{r,2s}\right]_f^{r,2s}\right\}_j^{N,r} = \left\{\prod_{i=1}^{N-r} J_0(d_i n) J_0(d_i K)\left[\prod_{i=1}^{r-2s} J_{2l_i}(d_i n) J_{2l_i}(d_i K)\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\prod_{i=1}^{2s} J_{2l_i-1}(d_i n) J_{2l_i}(d_i K)\right]_f^{r,2s}\right\}_j^{N,r}, \quad (9)$$

$$\left\{\Omega^1_{1,2l}\right\}_j^{N,1} = \left\{2l_i\,\omega_i\right\}_j^{N,1},$$

$$\left\{\Omega^1_{1,2l-1}\right\}_j^{N,1} = \left\{(2l_i - 1)\,\omega_i\right\}_j^{N,1}, \quad (10)$$

аналогично определению для $\left\{T^r_{s,l}\right\}_j^{N,r}$ в Приложении введем соответотвенно

$$\left\{\Omega^r_{t,2l}\right\}_j^{N,r} = \left\{\left|\sum_{i=1}^{r}(\pm 1)2l_i\omega_i\right|\right\}_j^{N,r}, \quad t=1,2,\ldots,2^{r-1}; \quad (11)$$

$$\left\{\left[\Omega^{r-2s}_{u,2l} \pm \Omega^{2s}_{v,2l-1}\right]_f^{r,2s}\right\}_j^{N,r} = \left\{\left[\left|\sum_{i=1}^{r-2s}(\pm 1)2l_i\omega_i \pm \sum_{i=1}^{2s}(\pm 1)(2l_i-1)\omega_i\right|\right]_f^{r,2s}\right\}_j^{N,r},$$

$$u=1,2,\ldots,2^{r-2s-1}, \qquad v=1,2,\ldots,2^{2s-1}; \quad (12)$$

$$\left\{\left[\Omega^{r-2s+1}_{u,2l} \pm \Omega^{2s-1}_{v,2l-1}\right]^{r,2s-1}_{h}\right\}^{N,r}_{j} =$$

$$= \left\{\left[\left|\sum_{i=1}^{r-2s+1}(\pm 1)2l_i\omega_i \pm \sum_{i=1}^{2s-1}(\pm 1)(2l_i-1)\omega_i\right|\right]^{r,2s-1}_{h}\right\}^{N,r}_{j}, \quad (13)$$

$$u = 1,2,\ldots,2^{r-2s}, \quad v = 1,2,\ldots,2^{2s-2}.$$

Из выражения (2) следует, что функция автокорреляции методической погрешности аналого-цифрового преобразования для обобщенной модели аналогового сигнала содержит сумму пяти членов, каждому из которых можно сопоставить соответствующую частную функцию автокорреляции.

Первый член соответствует функции автокорреляции методической погрешности нормального стационарного случайного процесса в отсутствие детерминированного сигнала. Действительно, полагая $y(t)=0$, то есть подставляя, $y_0=0$, $a_i=0$ для любого $i\in[1,N]$ в (2), можно убедиться, что полученное выражение полностью соответствует приводимому в /6/.

Второй член соответствует функции автокорреляции суммы четных и нечетных гармоник N - гармонических составляющих исходного детерминированного сигнала. Значения частот и уровней определяются соответственно из (10)и (3), (5)-(4), (6).

Третий, четвертый и пятый член можно сопоставить с функциями автокорреляции комбинационных частот, определяемых в виде частных сумм неповторяющихся знаковых комбинаций при соответствующим образом выбранных сочетаниях из четных и нечетных гармоник N - гармонических составляющих исходного детерминированного сигнала.

Третий член соответствует произвольным сочетаниям четных гармоник, причем, значения частот определяются из выражения (11) , а уровней из (3) и (7).

Четвертый член соответствует сумме или разности из произвольных сочетаний четных и четного числа нечетных гармоник, причем,значения частот определяются из выражения (12), а уровней из (3) и (9).

Пятый член соответствует сумме или разности из произвольных сочетаний четных и нечетного числа нечетных гармоник, причем, значения частот определяются из выражения (I3), а уровней из (4)и(8).

3. Спектр

Учитывая, что $\tilde{B}_\Delta(\tau)$ соответствует стационарному случайному процессу, воспользуемся следующими функциональными соотношениями, связывающими $\tilde{B}_\Delta(\tau)$ и $\tilde{G}(\omega)$ – энергетический спектр:

$$\left\{ \tilde{B}_\Delta(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{G}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega, \qquad \tilde{G}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega\tau} \tilde{B}_\Delta(\tau) d\tau \right\}.$$

$$\begin{aligned}
\tilde{G}(\omega) = {} & \frac{q^2}{2\pi^2} \sum_{n,k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+k}}{n\cdot k} e^{-\beta^2(n-k)^2} \tilde{C}_{n,k}(0,\omega) A_N^0 + \\
& + \frac{q^2}{\pi^2} \sum_{n,k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+k}}{n\cdot k} e^{-\beta^2(n-k)^2} \sum_{j=1}^{\binom{N}{1}} \left\{ \sum_{l_i=1}^{\infty} \left[G_1 \tilde{C}_{n,k}(\Omega^1_{1,2l,\omega}) + H_1 \tilde{D}_{n,k}(\Omega^1_{1,2l-1},\omega) \right] \right\}_j^{N,1} + \\
& + \frac{q^2}{\pi^2} \sum_{n,k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+k}}{n\cdot k} e^{-\beta^2(n-k)^2} \sum_{r=2}^{N} \sum_{j=1}^{\binom{N}{r}} \left\{ \overbrace{\sum_{l_i=1}^{\infty} \cdots \sum_{l_i=1}^{\infty}}^{r} \left\{ G_r^{x} \sum_{t=1}^{\frac{r-1}{2}} \tilde{C}_{n,k}(\Omega^r_{t,2l},\omega) + \right.\right. \qquad (I4) \\
& + \sum_{s=1}^{E\left[\frac{r}{2}\right]} \sum_{f=1}^{\binom{r}{2s}} \left[F_{r,2s}^{x} \left(\begin{array}{l} \underline{r-2s=0}: \displaystyle\sum_{v=1}^{\frac{2s-1}{2}} \tilde{C}_{n,k}(\Omega^{2s}_{v,2l-1},\omega) \\ \underline{r-2s\neq 0}: \displaystyle\sum_{u=1}^{\frac{r-2s-1}{2}} \sum_{v=1}^{\frac{2s-1}{2}} \tilde{C}_{n,k}(\Omega^{r-2s}_{u,2l} + \Omega^{2s}_{v,2l-1},\omega) + \tilde{C}_{n,k}(\Omega^{r-2s}_{u,2l} - \Omega^{2s}_{v,2l-1},\omega) \end{array} \right. \right]_f^{r,2s} +
\end{aligned}$$

$$
+\sum_{s=1}^{E\left[\frac{r+1}{2}\right]} \sum_{h=1}^{\binom{r}{2s-1}} \left[H^{*}_{r,2s-1} \begin{cases} \underline{r-2s+1=0}: \sum\limits_{v=1}^{2^{2s-2}} \tilde{D}_{n,k}\left(\Omega^{2s-1}_{v,2l-1}, \omega\right) \\ \underline{r-2s+1\neq 0}: \sum\limits_{u=1}^{2^{r-2s}} \sum\limits_{v=1}^{2^{2s-2}} \tilde{D}_{n,k}\left(\Omega^{r-2s+1}_{u,2l} + \Omega^{2s-1}_{v,2l-1}, \omega\right) + \tilde{D}_{n,k}\left(\Omega^{r-2s+1}_{u,2l} - \Omega^{2s-1}_{v,2l-1}, \omega\right) \end{cases} \right]_{h}^{r,2s-1} \Bigg\} \Bigg\}_{j}^{N,r},
$$

$$
\tilde{C}_{n,k}(\Omega,\omega) = \cos\gamma(k-n)\left[I^{1}_{k,n}(\omega+\Omega) + I^{1}_{k,n}(\omega-\Omega)\right] - \tag{I5}
$$

$$
-\cos\gamma(k+n)\left[I^{2}_{k,n}(\omega+\Omega) + I^{2}_{k,n}(\omega-\Omega)\right],
$$

$$
\tilde{D}_{n,k}(\Omega,\omega) = \cos\gamma(k-n)\left[I^{1}_{k,n}(\omega+\Omega) + I^{1}_{k,n}(\omega-\Omega)\right] + \tag{I6}
$$

$$
+\cos\gamma(k+n)\left[I^{2}_{k,n}(\omega+\Omega) + I^{2}_{k,n}(\omega-\Omega)\right],
$$

$$
I^{1}_{k,n}(\omega\pm\Omega) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} e^{-2\beta^{2}kn(1-\rho(\tau))} \cos(\omega\pm\Omega)\tau\, d\tau, \tag{I7}
$$

$$
I^{2}_{k,n}(\omega\pm\Omega) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} e^{-2\beta^{2}kn(1+\rho(\tau))} \cos(\omega\pm\Omega)\tau\, d\tau. \tag{I8}
$$

Аналогично рассмотрениям, проведенным в разд.2 для функции автокорреляции, из вида выражения (I4) в энергетическом спектре методической погрешности можно выделить компоненты спектральной плотности нормального случайного процесса, четных и нечетных гармоник и, также, комбинационных частот N – гармонических составляющих исходного детерминированного сигнала (в дальнейшем, N основных частот).

4. Обсуждение результатов

Из (2) и (I4) следует, что функция автокорреляции и спектр методической погрешности аналого-цифрового преобразования могут быть представлены соответствующими суммами эквивалентных характеристик слагаемых:

- одно слагаемое для нормального стационарного случайного процесса;
- N и N слагаемых соответственно для четных и нечетных гармоник N основных частот;
- $\sum_{r=2}^{N}\binom{N}{r}\times 2^{r-1}$ слагаемых для комбинационных частот, являющихся комбинациями сочетаний четных гармоник из N основных частот;
- $\sum_{r=2}^{N}\binom{N}{r}\times\sum_{s=1}^{E[\frac{r}{2}]}\binom{r}{2s}\times 2^{r-1}$ слагаемых для комбинационных частот, являющихся суммой или разностью комбинаций сочетаний четных и четного числа нечетных гармоник из N основных частот;
- $\sum_{r=2}^{N}\binom{N}{r}\times\sum_{s=1}^{E[\frac{r+1}{2}]}\binom{r}{2s-1}\times 2^{r-1}$ слагаемых для комбинационных частот, являющихся суммой или разностью комбинаций сочетаний четных и нечетного числа нечетных гармоник из N основных частот.

В соответствии с вышеуказанными соотношениями выражения (2) и (I4) содержат соответственно: при $N = 0$ одно слагаемое, при $N = I$ три слагаемых, при $N = 2$ I3 слагаемых, при $N = 3$ 53 слагаемых , при $n = 4$ 297 слагаемых и т.д.

Следовательно, при любом конечном N число слагаемых не более чем счетно. Как видно из соответствующих выражений, значения слагаемых определяются сходящимися функциональными рядами с быстро убывающими членами в виде произведений обратной степенной, гауссовой и бесселевых функций целого порядка действительного аргумента. Данные выражения удобны для программирования и последующего вычисления на ЭВМ.

Оценим эффективность подавления "шума дробления" за счет добавления "раскачивающего шума" перед аналого-цифровым преобразованием /3/.

Полагаем $1-\rho(\tau)=æ\tau^2$, где $æ = \frac{d^2\rho(\tau)}{d\tau^2}\Big|_{\tau=0} > 0$, так как $\rho(\tau)$ – четная функция, имеющая максимум в точке $\tau = 0$. Предполагая, что выполняется $\alpha_i \gg$ I для всех $i \in [1,N]$, то есть рассматривая сильный детерминированный сигнал и, полагая $\gamma = 0$, определим отношение спектральных плотностей мощности составляющих на комбинационных частотах

$$\omega^* = \left\{ \left[\Omega_{u,2l}^{r-2s+1} \pm \Omega_{v,2l-1}^{2s-1} \right]_h^{r,2s-1} \right\}_j^{N,r},$$

в отсутствие и при наличии "раскачивающего шума":

$$\frac{\tilde{G}(\omega^*)\left[\beta^2 \to 0, \gamma=0\right]}{\tilde{G}(\omega^*)\left[\beta^2 \geq \frac{\pi}{2}, \gamma=0\right]} = 8\pi \sqrt{\varkappa \frac{\sigma^2}{q^2}} \; \frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-(N+2)}}{\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-(N+3)}} . \qquad (19)$$

При выводе выражения (19) использовано асимптотическое представление функции Бесселя при больших значениях аргумента.

Из (9) видно, что для повышения эффективности способа следует использовать "раскачивающий шум" с наибольшим значением .

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе исследованы спектрально-корреляционные характеристики методической погрешности аналого-цифрового преобразования для обобщенной модели аналогового сигнала.

Получены аналитические выражения для функции автокорреляции и спектра в виде сходящихся функциональных рядов с быстро убывающими членами в виде сомножителей обратной степенной, гауссовой и бесселевых функций целого порядка действительного аргумента.

Приведены оценки эффективности подавления "шума дробления" за счет "раскачивающего шума" перед аналого-цифровым преобразованием.

Приложение. Формула представления произведения цилиндрических функций в виде суммы.

В /7/ приведена формула сложения для случая $z_i^2=x_i^2+y_i^2-2x_iy_i\cos\theta_i$, где $x_i, y_i > 0$

$$J_0(z_i)=J_0(x_i)J_0(y_i)+2\sum_{n=1}^{\infty}J_n(x_i)J_n(y_i)\cos n\theta_i . \qquad (\text{П1})$$

Полагая $(z_i')^2=x_i^2+y_i^2+2x_iy_i\cos\theta_i=x_i^2+y_i^2-2x_iy_i\cos(\theta_i+\pi)$, получим формулу сложения для z':

$$J_0(z_i')=J_0(x_i)J(y_i)+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^nJ_n(x_i)J_n(y_i)\cos n\theta_i . \qquad (\text{П2})$$

В формулах (П1) и (П2) $J_0(x)$ - функция Бесселя нулевого порядка действительного аргумента, $J_n(x)$ - функция Бесселя целого - го порядка действительного аргумента.

Используя (П1) и (П2) представим $\prod_{i=1}^{N}J_0(a_iz_i)$ и $\prod_{i=1}^{N}J_0(a_iz_i')$ в виде сумм.

После выполнения операций умножения, сложения и группировки подобных членов получим следующие формулы:

$$\prod_{i=1}^{N}J_0(a_iz_i)=A_N^0+2\sum_{r=1}^{N}\sum_{j=1}^{\binom{N}{r}}\left\{A_{N-r}^0\underbrace{\sum_{l_i=1}^{\infty}\cdots\sum_{l_i=1}^{\infty}}_{r}\times B_r^lL_r^l\right\}_j^{N,r}, \qquad (\text{П2})$$

$$\prod_{i=1}^{N}J_0(a_iz_i')=A_N^0+2\sum_{r=1}^{N}\sum_{j=1}^{\binom{N}{r}}\left\{A_{N-r}^0\underbrace{\sum_{l_i=1}^{\infty}\cdots\sum_{l_i=1}^{\infty}}_{r}(-1)^{\sum_{i=1}^{r}l_i}\times B_r^lL_r^l\right\}_j^{N,r}, \qquad (\text{П3})$$

где $\binom{N}{r}=\binom{N}{N-r}=\dfrac{N!}{r!(N-r)!}$, $\quad A_N^0=\prod_{i=1}^{N}J_0(a_ix_i)J_0(a_iy_i)$,

$\{I_{N-r}\dots J_r\}_j^{N,r}$ – j-е сочетание неповторяющихся индексов i из N по r или из N по $N-r$ в зависимости от индексов, используемых в аналитических выражениях внутри скобок, и $j = 1, 2, \dots, \binom{N}{r} = \binom{N}{N-r}$,

$$\left\{A^{0}_{N-r}\right\}_j^{N,r} = \left\{\prod_{i=1}^{N-r} J_0(a_i x_i) J_0(a_i y_i)\right\}_j^{N,r},$$

$$\left\{B^{l}_{r}\right\}_j^{N,r} = \left\{\prod_{i=1}^{r} J_{l_i}(a_i x_i) J_{l_i}(a_i y_i)\right\}_j^{N,r},$$

$$\left\{L^{l}_{r}\right\}_j^{N,r} = \left\{\prod_{i=1}^{r} 2^{r-1}\cos l_i\theta_i\right\}_j^{N,r} = \left\{\sum_{s=1}^{2^{r-1}} \cos T^{r}_{s,l}\right\}_j^{N,r},$$

и $\left\{T^{r}_{s,l}\right\}_j^{N,r} = \left\{\left|\sum_{i=1}^{r}(\pm 1)\times l_i\theta_i\right|\right\}_j^{N,r}$ – S-я независимость комбинация подстановок знаков (± 1) для l_i в частичной сумме $\sum_{i=1}^{r} l_i\theta_i$, причем $S = 1, 2, 3, \dots, 2^{r-1}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Под ред. Оппенгейма Э. Применение цифровой обработки сигналов. /Пер. с англ. под. ред. А.М.Рязанцева. - М.: Мир, 1980. - 552 с.

2. Бесекерский В.А. Цифровые автоматические системы. - М.: Наука, 1976. - 576 с.

3. Дворецкий И.М., Дриацкий И.Н. Цифровая передача сигналов звукового вещания. - М.: Радио и связь, 1987. - 193 с.

4. Тяжев А.И. Спектры квантованного и дискретизованного периодических сигналов.//Радиотехника. - 1989. - № 4. - С.60-63.

5. Пройдаков В.И. Функция автокорреляции методической погрешности аналого-цифрового преобразования для обобщенной модели аналогового сигнала.//Препринт № 301, Горький: НИРФИ, 1989. - 18 с.

6. Bennett W.R. Spectra of Quantised Signals // BSTJ. V.XXVII, - 1948. - N 3.

7. Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.Н. Курс современного анализа. Трансцендентные функции./Пер. с англ. под. ред. Ф.В.Широкова. - Часть вторая. - М.: Физматгиз, 1963. - 516 с.

Дата поступления статьи
12 декабря 1989 г.

Пройдаков Вадим Иванович

ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ АВТОКОРРЕЛЯЦИИ
И СПЕКТРА МЕТОДИЧЕСКОЙ ПОГРЕШНОСТИ
АНАЛОГО-ЦИФРОВОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ
ДЛЯ ОБОБЩЕННОЙ МОДЕЛИ АНАЛОГОВОГО СИГНАЛА

Подписано в печать 22. 12.89 г. МЦ 00973 . Формат 60x84/16.
Бумага писчая. Печать офсетная. Объем усл.п. л.
Заказ 5004 . Тираж 120. Бесплатно.

Отпечатано на ротапринте НИРФИ