Министерство высшего и среднего специального образования
Р С Ф С Р
Горьковский ордена Трудового Красного Знамени
научно-исследовательский радиофизический институт(НИРФИ)

Препринт № 297

ФУНКЦИЯ ГРИНА КОЛЬЦА И ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Д.А.Касьянов

Горький 1990

К а с ь я н о в Д. А.

ФУНКЦИИ ГРИНА КОЛЬЦА И ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ // Препринт № 297. - Горький: НИРФИ, 1990. - 28 с.

УДК 517.5

В работе рассматривается связь функции Грина кольца (Ф.Г.К.), возникающей при решении большого класса дифракционных задач в цилиндрической системе координат, с гипергеометрическими функциями двух переменных. Исследуются точные представления Ф.Г.К. в виде вырожденных гипергеометрических функций двух переменных и возможность применения этих точных представлений для решения конкретных задач дифракции. Получены некоторые новые результаты из теории гипергеометрических функций.

Подписано к печати 08.02.90 г. МЦ 00931 . Формат 60 х 84 / 16.
Бумага писчая. Печать офсетная. Объем 1,55 усл. п. л.
Заказ 5009. Тираж 120. Бесплатно.

Отпечатано на ротапринте НИРФИ

"Всякое искусство совершенно бесполезно."

(О. Уайлд)

В данной работе рассматривается функция Грина кольца (Ф.Г.К.), причем основное внимание будет уделено связи Ф.Г.К. с гипергеометрическими функциями двух переменных, предметом еще недостаточно изученным, но имеющим, по-видимому, немалое значение для описания многих физических процессов, так как почти все известные элементарные и специальные функции, используемые в физике, так или иначе, являются предельными случаями гипергеометрических функций двух переменных.

К сожалению, монографических исследований этих функций, отражающих положение дел на сегодняшний день, насколько автору известно, нет. Разрозненные сведения собраны в справочники, среди которых можно порекомендовать следующие: Г. Бейтмен, А. Эрдейи Высшие трансцендентные функции. Т.I (Гипергеометрическая функция. Функция Лежандра). М., 1965, где собрана интересная библиография по частным вопросам теории гипергеометрических функций двух переменных.

H.Exton. Handbook of hypergeometric integrals: theory, applications,tables,computer programs.-N.-Y.-L.:Chichester,Ellis, 1978.

А.А.Прудников и др. Интегралы и Ряды. Дополнительная глава. М., 1986. Здесь обращается внимание на точные представления Ф.Г.К.; приближенные, удобные при решении различных дифракционных задач, полученные при исследовании некоторых разложений гипергеометрических функций двух переменных будут также вскоре рассмотрены.

Итак, Ф.Г.К. можно представить следующими интегральными выражениями:

$$\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\exp\left(\pm\sqrt{(z-z')^2+r'^2+r^2-2rr'\cos\varphi}\right)}{\sqrt{(z-z')^2+r'^2+r^2-2rr'\cos\varphi}}\,d\varphi \qquad (\mathrm{I})$$

и

$$\frac{1}{2}\int_0^{\infty} J_0(rt)J_0(r't)\frac{\exp\left[-(z-z')\sqrt{t^2-\kappa^2}\right]}{\sqrt{t^2-\kappa^2}}\,t\,dt, \qquad (2)$$

где J_0 - функция Бесселя первого рода нулевого порядка; z, r, z', r' - цилиндрические координаты точек наблюдения и источника соответственно. От координаты φ Ф.Г.К. не зависит. Выбор знака + или - в (I) определяется типом конкретной физической задачи, решаемой с помощью Ф.Г.К.

Выражения (I) и (2) получены в результате интегрирования по периоду 2π функции Грина точечного источника, записанной в разных формах: (I) - в виде $\frac{\exp(\pm i\kappa R)}{4\pi R}$, где R - в цилиндрических координатах, а (2) в виде /I/

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{-i\varepsilon_m}{4\pi}\cos(m(\varphi-\varphi_0))\int_0^{\infty}J_m(tr)J_m(tr')\frac{e^{-i\sigma|z-z'|}}{\sigma}\,t\,dt, \quad \text{где}$$

$$\sigma=\sqrt{\kappa^2-t^2}, \quad \text{если} \quad 0<t<\kappa,$$

$$\sigma=-i\sqrt{t^2-\kappa^2}, \quad \text{если} \quad 0<\kappa<t,$$

$$\varepsilon_m=2, \quad \text{если} \quad m>0; \quad \varepsilon_0=1;$$

или, используя подход Кинга /2,3/.

Выражения (I) и (2) эквивалентны. Переход между ними можно осуществить с помощью общеизвестных интегральных формул:

$$\frac{e^{-iy\sqrt{a^2+b^2}}}{\sqrt{a^2+b^2}} = \int_0^\infty J_0(bt)\,\frac{e^{-a\sqrt{t^2-y^2}}}{\sqrt{t^2-y^2}}\,t\,dt, \tag{3}$$

$$\arg\sqrt{t^2-y^2} = \frac{\pi}{2}, \quad t<y \qquad /4/$$

и /5/

$$\int_0^\pi \frac{J_\nu\left\{\sqrt{x^2+y^2-2yx\cos\varphi}\right\}}{\left(\sqrt{x^2+y^2-2yx\cos\varphi}\right)^\nu}\sin^{2\nu}\varphi\,d\varphi = \frac{2^\nu\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)J_\nu(x)J_\nu(y)}{x^\nu y^\nu}, \tag{4}$$

где J_ν – функция Бесселя первого рода, порядка ν , Γ –гамма функция.

I. Одно из интегральных представлений Ф.Г.К.

Запишем выражение (I) в виде

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \frac{\exp\left(\pm ik\sqrt{a-b\cos\varphi}\right)}{\sqrt{a-b\cos\varphi}}\,d\varphi, \tag{5}$$

где $a=(z-z')^2+r^2+r'^2$, $b=2rr'$. Разложив экспоненту в (5) в ряд и сделав замену $t=\varphi/2$, получим

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2}\sum_{n=0}^\infty \frac{(\pm ik)^n}{n!}(a-b)^{\frac{n-1}{2}}\left(1+\frac{2b}{a-b}\sin^2 t\right)^{\frac{n-1}{2}} d\varphi\,. \tag{6}$$

Полученный интеграл есть одно из интегральных представлений гипергеометрической функции Гаусса /6/:

$$
{}_2F_1(\mu,\eta;\zeta;z)=\frac{2\Gamma(\zeta)}{\Gamma(\eta)\Gamma(\zeta-\eta)}\int_0^{\pi/2}\frac{(\sin t)^{2\eta-1}(\cos t)^{2\zeta-2\eta-1}}{(1-z\sin^2 t)^{\mu}}\,dt,\quad \operatorname{Re}\zeta>\operatorname{Re}\eta>0,
$$

поэтому (6) можно записать как сумму по этим функциям:

$$
\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\pm ik)^n(a-b)^{\frac{n-1}{2}}}{n!}\,{}_2F_1\left(\frac{1}{2}-\frac{n}{2};\frac{1}{2};1;-\frac{2b}{a-b}\right). \tag{7}
$$

Используя различные интегральные представления ${}_2F_1$ (см., например, /6/), можно получить значительное количество интегральных представлений Ф.Г.К. Получим то, которое будет нам необходимо для дальнейших преобразований.

Гипергеометрическую функцию Гаусса возьмем в виде

$$
{}_2F_1(\mu,\eta;\zeta;z)=\frac{\Gamma(\zeta)}{\Gamma(\eta)\Gamma(\zeta-\eta)}\int_0^1 t^{\eta-1}(1-t)^{\zeta-\eta-1}(1-tz)^{-\mu}dt,
$$

$$
\operatorname{Re}\zeta>\operatorname{Re}\eta>0,\quad |\arg(1-z)|<\pi,
$$

подставив это выражение в (7), получим

$$
\frac{1}{2\pi}\int_0^1 t^{-1/2}(1-t)^{-1/2}\,\frac{\exp\left(\pm ik\sqrt{(a-b)\left(1+\frac{2b}{a-b}t\right)}\right)}{\sqrt{(a-b)\left(1+\frac{2b}{a-b}t\right)}}\,dt. \tag{8}
$$

По-видимому, впервые подобное интегральное представление "гипергеометрического вида" было получено Е.Н.Васильевым в /7/.

2. О действительной части Ф.Г.К.

Разложения Ф.Г.К. типа (7) содержат интересную особенность: если разделить в (7) действительную и мнимую часть, то в двух получившихся рядах суммируются функции, принадлежащие разным классам функций, так ${}_2F_1\left(\frac{1}{2}-n;\ \frac{1}{2};\ 1;\ -\frac{2b}{a-b}\right)$ – это функции тора, а ${}_2F_1\left(-n;\ \frac{1}{2};\ 1;\ -\frac{2b}{a-b}\right)$ – полиномы Лежандра, поэтому целесообразно рассмотреть действительную и мнимую часть Ф.Г.К. отдельно.

Итак, рассмотрим действительную часть (8). Запишем $\cos$ в гипергеометрической форме, как известно, $\cos(2\sqrt{z}) = {}_0F_1\left(\frac{1}{2}; -z\right)$ (см., например, /8/), где ${}_0F_1$ – предельная форма гипергеометрической функции Гаусса $\left(\lim\limits_{\varepsilon \to 0} {}_2F_1\left(\frac{1}{\varepsilon};\ \frac{1}{\varepsilon};\ b;\ \varepsilon^2 z\right) = {}_0F_1(b; z)\right)$; из (8) следует

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^1 t^{-1/2}(1-t)^{-1/2}\ \frac{{}_0F_1\left(\frac{1}{2};\ -\frac{\kappa^2}{4}(a-b)\left(1+\frac{2b}{a-b}t\right)\right)}{\sqrt{(a-b)\left(1+\frac{2b}{a-b}t\right)}}\,dt\,, \tag{9}$$

сделав в (9) замену $1+\frac{2b}{a-b}t = x$, получим

$$-\frac{1}{2\pi}\ \frac{1}{\sqrt{a-b}}\int\limits_1^{\frac{a+b}{a-b}} (1-x)^{-1/2} x^{-1/2}\left(x-\frac{a+b}{a-b}\right)^{-1/2} {}_0F_1\left(\frac{1}{2};\ -\frac{\kappa^2}{4}(a-b)x\right)dx. \tag{10}$$

Можно доказать (см. Приложение I), что

$$\int\limits_0^y x^{c-1}(y-x)^{\beta-1}(1-xz)^{-\rho}\,{}_0F_1(c;\ \omega x) =$$

$$= \frac{\Gamma(c)\Gamma(\beta)}{\Gamma(c+\beta)} y^{c+\beta-1} (1-yz)^{-\rho} \Xi_2\left(\rho; \beta; c+\beta; \frac{yz}{yz-1}; \omega y\right), \quad (11)$$

где Ξ_2 – вырожденная гипергеометрическая функция двух переменных, которая является предельным случаем гипергеометрической функции двух переменных F_3 Аппеля

$$\left(\lim_{\varepsilon\to 0} F_3\left(\mu; \frac{1}{\varepsilon}; \eta; \frac{1}{\varepsilon}; \zeta; \omega; \varepsilon^2 z\right) = \Xi_2(\mu; \eta; \zeta; \omega, z)\right)$$

/9/, /10/, /11/.

Проведя несложные преобразования, из выражения (10) с учетом (11) получим точное представление Ф.Г.К.:

$$\frac{1}{2\sqrt{2b}}\left(\Xi_2\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};1;\frac{a+b}{2b};-\frac{k^2}{4}(a+b)\right)-i\,\Xi_2\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};1;-\frac{a-b}{2b};-\frac{k^2}{4}(a-b)\right)\right). \quad (12)$$

Некоторое обсуждение полученного результата будет проведено ниже, а сейчас еще несколько возможных путей, ведущих к выражению (12).

Запишем действительную часть (7) в виде

$$\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n (a+b)^n k^{2n}}{(2n)!\sqrt{a-b}}\,{}_2F_1\left(\frac{1}{2}+n;\frac{1}{2};1;-\frac{2b}{a-b}\right). \quad (13)$$

Для получения (13) использовано известное линейное преобразование функции ${}_2F_1$ (см., например,/12/):

$${}_2F_1(\mu;\eta;\zeta;z) = (1-z)^{\zeta-\mu-\eta}\,{}_2F_1(\zeta-\mu;\zeta-\eta;\zeta;z). \quad (14)$$

Используя равенство /13/

$$e^{i\pi\mu}\frac{\Gamma(\eta)\Gamma(\mu+1-\zeta)}{\Gamma(\mu+\eta+1-\zeta)}z^{-\eta}\,{}_2F_1\left(\eta+1-\zeta;\eta;\mu+\eta+1-\zeta;1-\frac{1}{z}\right)=$$

$$=\frac{\Gamma(\eta)\Gamma(\zeta-\eta)}{\Gamma(\zeta)}\,{}_2F_1(\mu;\eta;\zeta;z)+ \tag{15}$$

$$+e^{i\pi(\eta+1-\zeta)}\frac{\Gamma(\mu+1-\zeta)\Gamma(\zeta-\eta)}{\Gamma(\mu+1-\eta)}(-z)^{-\mu}\,{}_2F_1\left(\mu;\mu+1-\zeta;\mu+1-\eta;\frac{1}{z}\right)$$

и выражение (14), легко можно получить следующую формулу:

$$\frac{1}{2\sqrt{2b}}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(\kappa^2(a+b))^n}{(n!)^2}\,{}_2F_1\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};n+1;\frac{a+b}{2b}\right)-\right. \tag{16}$$

$$\left.-i\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(\kappa^2(a-b))^n}{(n!)^2}\,{}_2F_1\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};n+1;-\frac{a-b}{2b}\right)\right).$$

После представления ${}_2F_1$ гипергеометрическим рядом $\left({}_2F_1(\mu;\eta;\zeta;z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mu)_n(\eta)_n}{(\zeta)_n n!}(z)^n\right)$, видно, что выражение (12) и (16) тождественны.

Можно исходить из представления (2), записав $\exp$, как функцию Макдональда $K_{1/2}$, которую, в свою очередь, при условии $t>\kappa$ (выделяя таким образом действительную часть интеграла (2)), необходимо разложить в ряд вида /14/

$$\frac{K_{1/2}\left((z-z')\sqrt{t^2-\kappa^2}\right)}{\sqrt[4]{t^2-\kappa^2}}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{((z-z')\kappa^2)^m}{2^m m!}t^{-1/2-m}K_{1/2+m}(t(z-z')) \tag{17}$$

(подобные разложения называются "теоремами умножения бесселевых функций"). Как известно $K_{1/2+m} = K_{-1/2-m}$ и, таким образом, из выражения (2) следует

$$\sqrt{\frac{(z-z')}{2\pi}} \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^{\infty} J_0(r't) J_0(rt) t^{-\frac{1}{2}-m} K_{-\frac{1}{2}-m}(t(z-z')) \frac{\left((z-z')\frac{K^2}{2}\right)^m}{m!} \cdot \quad (18)$$

Интеграл в (18) присутствует в справочниках (см., например, /15/) и выражается через гипергеометрическую функцию Аппеля F_4 (см. /9,10,11/). Взяв этот интеграл, получим следующую сумму:

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}(z-z')} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left((z-z')\frac{K}{2}\right)^{2m}}{m!} \Gamma\left(\frac{1}{2}-m\right) F_4\left(1;\frac{1}{2}-m;1;1;\frac{(r')^2}{(z-z')^2};\frac{r^2}{(z-z')^2}\right) \cdot \quad (19)$$

Кроме возможных интересных разложений по параметрам $\left(\frac{r'}{z-z'}\right)^2$ и $\left(\frac{r}{z-z'}\right)^2$, которые можно получить из (19), это выражение замечательно тем, что функцию двух переменных Аппеля F_4 в нем, можно выразить через гипергеометрическую функцию Гаусса одного переменного ${}_2F_1$ по формуле /10/

$$F_4\left(\mu;\zeta;\zeta;\zeta;\frac{-\omega}{(1-\omega)(1-z)};\frac{-z}{(1-\omega)(1-z)}\right) = (1-\omega)^{\mu}(1-z)^{\mu}{}_2F_1(\mu;1+\mu-\zeta;\zeta;\omega z). \quad (20)$$

Следуя (20), после простых, но довольно громоздких преобразований, получим, что выражение (19) представляет собой действительную часть (7), которая была рассмотрена выше (см. (13)-(16)).

Результат, представленный формулой (12), можно получить также основываясь на действительной части выражения (1) или (5), используя теорему Лерха /16,17/ о нуль-функциях, которая для нужд вычисления интегралов была сформулирована Г.Ватсоном /17/: "...если $f(r)$ есть непрерывная функция от r при $r>0$, такая, что $\int_0^{\infty} \exp(-r^2 t) f(r)\, dr = 0$, для всех достаточно больших значений t, то она тождественно равна нулю". Использование этой теоремы в нашем случае даст некую модификацию метода преобразования Лапласа.

Сделаем в (5) замену $a-b\cos\varphi=t$, введем параметр $\varkappa$ и проинтегрируем по этому параметру так, что действительную часть формулы (5) получим в виде

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty e^{-p\varkappa^2}\int_{a-b}^{a+b}\frac{\cos(\varkappa\sqrt{t})\ dt\ d\varkappa}{\sqrt{t}\ \sqrt{t+(b-a)}\ \sqrt{(a+b)-t}}. \qquad (21)$$

Взяв в (21) табличный интеграл по $\varkappa$, используем интегральное определение гипергеометрической функции двух переменных Φ_1, которая представляет из себя вырожденный случай гипергеометрической функции двух переменных F_1 Аппеля /9,10,11/

$$\Phi_1(\mu;\eta;\zeta;\omega,z)=\frac{\Gamma(\zeta)}{\Gamma(\mu)\Gamma(\zeta-\mu)}\int_0^1 u^{\mu-1}(1-u)^{\zeta-\mu-1}(1-u\omega)^{-\eta}e^{uz}du$$

$$\left(\mathrm{Re}\,\mu,\ \mathrm{Re}(\zeta-\mu)>0\right)$$

и получаем, что выражение (21) равно

$$i\left(\frac{1}{4}\right)\sqrt{\frac{\pi}{p}}\left[\frac{1}{\sqrt{a-b}}\Phi_1\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};1;\frac{a+b}{a-b};\frac{a+b}{4p}\right)-\frac{1}{\sqrt{a+b}}\Phi_1\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};1;\frac{a-b}{a+b};\frac{a-b}{4p}\right)\right]. \qquad (22)$$

Используя предельный переход в известном равенстве (см., например, /10/)

$$F_3(\mu,\mu';\eta,\eta';\mu+\mu';\omega,z)=(1-z)^{-\eta'}F_1\left(\mu;\eta,\eta';\mu+\mu';\omega;\frac{z}{z-1}\right),$$

легко доказать, что

$$\frac{1}{\sqrt{\rho}}\Phi_1\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};1;\omega,\frac{z}{\rho}\right)=\frac{1}{\sqrt{\rho}}(1-\omega)^{-1/2}\Xi_1\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2};1;\frac{\omega}{\omega-1};\frac{z}{\rho}\right), \quad (23)$$

где Ξ_1 – еще один вырожденный случай функции F_3

$$\left(\lim_{\varepsilon\to 0} F_3(\mu;\mu';\eta;1/\varepsilon;\zeta;\omega;\varepsilon z)=\Xi_1(\mu,\mu';\eta;\zeta;\omega,z)\right)$$

/9,10,11/, кроме того, непосредственным интегрированием представления Ξ_1 в виде двойного гипергеометрического ряда можно показать, что

$$\int_0^\infty e^{-\rho æ^2}\,\Xi_2\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};1;\omega,z\,æ^2\right)dæ=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{1}{\sqrt{\rho}}\Xi_1\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2};1;\omega;\frac{z}{\rho}\right). \quad (24)$$

Таким образом, подставляя (23) в (22) и, сравнивая с помощью (24) полученное выражение с выражением (21), получим, что действительная часть (5), т.е. Ф.Г.К., равна установленному ранее выражению (12).

Выпишем еще раз результат для действительной части Ф.Г.К.:

$$Re(\text{Ф.Г.К.})=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2b}}\left(\Xi_2\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};1;\frac{a+b}{2b};-\frac{k^2(a+b)}{4}\right)-i\,\Xi_2\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};1;-\frac{a-b}{2b};-\frac{k^2(a-b)}{4}\right)\right).$$

3. О мнимой части Ф.Г.К.

Рассмотрим мнимую часть выражения (8) с $\sin$, записанным в виде функции Бесселя первого рода порядка 1/2 ($J_{1/2}$) :

$$\pm i\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\,\frac{\kappa}{2}\int\limits_0^1 \frac{t^{-1/2}(1-t)^{-1/2} J_{1/2}\left(\kappa\sqrt{(a-b)\left(1+\frac{2b}{a-b}t\right)}\right)}{\sqrt[4]{\kappa^2(a-b)\left(1+\frac{2b}{a-b}t\right)}}\,dt. \tag{25}$$

Разложим функцию Бесселя в (25) по известной теореме умножения (см., например, /I8/):

$$J_\nu(\lambda z)=\lambda^\nu\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(\lambda^2-1)^k(z/2)^k}{k!}J_{\nu+k}(z),$$

где нет ограничений на λ . Интеграл теперь в (25) легко возьмется, так как представляет собой B -функцию, и вместо (25) получим следующий ряд:

$$\pm\frac{i\sqrt{\pi/2}\,\kappa}{2\sqrt[4]{\kappa^2(a-b)}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1/2)_n\left(-\frac{\kappa b}{\sqrt{a-b}}\right)^n}{(n!)^2}J_{1/2+n}\left(\kappa\sqrt{a-b}\right). \tag{26}$$

Как известно

$$\frac{1}{\Gamma(z)}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{0+}e^t t^{-z}\,dt, \qquad |\arg t|\leq\pi \tag{27}$$

(см., например, /I9/) и

$$J_\nu(z)=\frac{(z/2)^\nu}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{0+}t^{-\nu-1}\exp\left(t-\frac{z^2}{4t}\right)dt \tag{28}$$

(см., например, /20/), где оба интеграла берутся по контуру, который начинается в $-\infty$, обходит начало координат против часовой стрелки и возвращается в $\to\infty$. Используя два эти определения, перепишем (26) в виде

$$\mp\frac{i\kappa}{16\pi\sqrt{\pi}}\iint\limits_{-\infty}^{0+}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1/2)_n}{n!}\left(-\frac{\kappa^2 b}{2}\right)^n e^t t^{-n-1}\tau^{-n-3/2}e^{\tau-\frac{\kappa^2(a-b)}{\tau}}d\tau\, dt. \quad (29)$$

Сумма в (29) общеизвестна $\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(1/2)_n}{n!}z^n=\frac{1}{\sqrt{1-z}}\right)$, поэтому получаем:

$$\mp\frac{i\kappa}{16\pi\sqrt{\pi}}\iint\limits_{-\infty}^{0+}\frac{e^t t^{-1}\tau^{-3/2}\exp\left(\tau-\frac{\kappa^2(a-b)}{4\tau}\right)}{\sqrt{1+\frac{\kappa^2 b}{2t\tau}}}d\tau\, dt\ . \quad (30)$$

Теперь вынесем в (30) из под знака корня $\frac{\kappa^2 b}{2t\tau}$ и опять разложим корень в степенной ряд:

$$\mp\frac{i\kappa}{16\pi\sqrt{\pi/2}\sqrt{\kappa^2 b}}\sum_{n=0}^{\infty}\iint\limits_{-\infty}^{0+}e^t t^{-1/2+n}\tau^{n-1}e^{\tau-\frac{\kappa^2(a-b)}{4\tau}}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n}{n!}\left(-\frac{2}{\kappa^2 b}\right)^n d\tau\, dt, \quad (31)$$

интегрируя (см. (27), (28)), получим:

$$\pm\frac{i}{2\sqrt{2b}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1/2)_n(1/2)_n}{n!}\left(-\frac{\sqrt{a-b}}{\kappa b}\right)^n J_n\left(\kappa\sqrt{a-b}\right). \quad (32)$$

Запишем J_n в виде степенного ряда $\left(J_n(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(z/2)^{2k+n}}{k!\,\Gamma(k+n+1)}\right)$, из (32) тогда будет следовать двойной степенной ряд:

$$\pm \frac{i}{2\sqrt{2b}} \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(1/2)_n (1/2)_n}{(1)_{m+n} n! m!} \left(-\frac{a-b}{2b}\right)^n \left(-\frac{\kappa^2(a-b)}{4}\right)^m, \qquad (33)$$

который является определением функции: /9,10/

$$\pm \frac{i}{2\sqrt{2b}} \Xi_2\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 1; -\frac{a-b}{2b}; -\frac{\kappa^2(a-b)}{4}\right). \qquad (34)$$

Выражение (34) для мнимой части Ф.Г.К. получено, исходя из представления Ф.Г.К. в виде (8); получим то же самое, исходя из (7).

Гипергеометрическая функция в мнимой части выражения (7) является полиномом Лежандра P_n /21/, поэтому мнимую часть (7) можно записать в виде

$$\pm i \frac{\kappa\sqrt{\pi}}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \kappa^{2n} (a^2-b^2)^{n/2}}{2^{2n} n! \, \Gamma(n+3/2)} P_n\left(\frac{a}{\sqrt{a^2-b^2}}\right). \qquad (35)$$

Упоминание о ряде (35) содержится в /7/. Записав $\frac{1}{\Gamma(n+3/2)}$ в виде интеграла (27), получим

$$\pm \frac{\kappa}{8\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{0+} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{\kappa^2}{4}\sqrt{a^2-b^2}\right)^n}{n!} P_n\left(\frac{a}{\sqrt{a^2-b^2}}\right) e^t t^{-n-\frac{3}{2}} dt. \qquad (36)$$

Сумма в (36) известна (см., например, /22/): $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tau^n}{(n+2\kappa)!} P_{n+\kappa}^{\kappa}(z) = \tau^{-\kappa} e^{\tau z} I_\kappa\left(\tau\sqrt{z^2-1}\right)$, где I_κ - модифицированная функция Бесселя первого рода порядка κ поэтому получаем из (36) следующую интегральную формулу:

$$\pm\frac{K}{8\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{0+} e^{t}t^{-3/2}e^{-\frac{K^2a}{4t}}I_0\left(-\frac{K^2b}{4t}\right)dt. \qquad (37)$$

Запишем I_0 в гипергеометрическом виде, как известно, (см., например, /23/) ${}_1F_1(1/2;1;z)=e^{z/2}I_0(z/2)$ (где ${}_1F_1(\eta;\zeta;z)=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}{}_2F_1(1/\varepsilon;\eta;\zeta;z\varepsilon)$ - гипергеометрическая функция Куммера), отсюда следует:

$$\pm\frac{K}{8\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{0+} e^{t}t^{-3/2}e^{-\frac{K^2(a-b)}{4t}}{}_1F_1\left(\frac{1}{2};1;-\frac{K^2b}{2t}\right)dt. \qquad (38)$$

Можно доказать (см. Приложение П), что

$${}_1F_1\left(\frac{1}{2};1;\alpha z\right)=\sqrt{\frac{-1}{\pi\alpha z}}\,{}_2F_0\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};-\frac{1}{\alpha z}\right), \qquad (39)$$

где ${}_2F_0$ - обобщенная гипергеометрическая функция (${}_2F_0(\mu,\eta;z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(\mu)_n(\eta)_n}{n!}z^n$) (см., например, /9,10/).

Использование выражений (38),(39), определения ${}_2F_0$ в виде степенного ряда совместно даст следующую формулу:

$$\pm\frac{1}{4\pi\sqrt{2b}}\sum_{n=0}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{0+} e^{t}t^{n-1}e^{-\frac{K^2(a-b)}{4t}}\frac{(1/2)_n(1/2)_n}{n!}\left(\frac{2}{K^2b}\right)^n dt. \qquad (40)$$

Интегрируя (см. (28)), получим выражение (32), а затем и (34). Окончательно запишем, что

$$\mathrm{Im}\,(\text{Ф.Г.К.})=\pm\frac{i}{2\sqrt{2b}}\,\Xi_2\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};1;-\frac{a-b}{2b};-\frac{K^2(a-b)}{4}\right).$$

4. Некоторые замечания относительно полной формы Ф.Г.К.

В предыдущих параграфах было показано, что действительную и мнимую части Ф.Г.К. можно представить гипергеометрическими функциями двух переменных Ξ_2 . Полная Ф.Г.К. для использования во внутренней задаче запишется в виде

$$\text{Ф.Г.К.}\,\mathrm{I} = \frac{1}{2\sqrt{2b}}\,\Xi_2\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};1;\frac{a+b}{2b}\quad -\frac{k^2(a+b)}{4}\right), \tag{4I}$$

во внешней

$$\text{Ф.Г.К.}\,\mathrm{II} = \frac{1}{2\sqrt{2b}}\left(\Xi_2\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};1;\frac{a+b}{2b};-\frac{k^2(a+b)}{4}\right) - 2i\,\Xi_2\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};1;-\frac{a-b}{2b};-\frac{k^2(a-b)}{4}\right)\right), \tag{42}$$

параметры a и b определены в разд. I.

Изначально все гипергеометрические функции двух переменных (ныне существует 34 функции) были определены сходящимися степенными гипергеометрическими рядами двух переменных (I4 полных и 20 вырожденных - список Горна (Горн I93I год)), которые сходятся, кстати, не для всех значений переменных. Так функция Ξ_2 была представлена в виде /9/

$$\Xi_2(\mu;\eta,\zeta;x,y) = \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{(\mu)_n(\eta)_n}{(\zeta)_{m+n}\,m!\,n!}\,x^n y^m \tag{43}$$

при $|x|<1$, поэтому выражения (4I) и (42), если иметь ввиду их физический смысл, нельзя представить в виде рядов (43), необходимо рассматривать различные сходящиеся интегральные представления или искать ряды, которые являются аналитическими продолжениями Ξ_2 в область $|x| > 1$.

Аналитические продолжения гипергеометрической функции двух переменных можно получить, разлагая ее в ряд по гипергеометрическим функциям Гаусса ${}_2F_1$, теория которых достаточно развита для того, чтобы получить аналитическое продолжение ${}_2F_1$ в любую область, затем следует обратный переход к двойному степенному ряду, причем, может получится ряд невходящий в известные 34. Так, произведем суммирование в (43) по n и получим разложение функции Ξ_2 по функциям ${}_2F_1$:

$$\Xi_2(\mu,\eta;\varsigma;x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(y)^m}{m!(\varsigma)_m}\,{}_2F_1(\mu,\eta;\varsigma+m,x). \qquad (44)$$

Используя известную формулу /I2/

$${}_2F_1(\mu,\eta;\varsigma;x)=(1-x)^{-\mu}\,{}_2F_1\left(\mu;\varsigma-\eta;\varsigma;\frac{x}{x-1}\right),$$

после представления ${}_2F_1$ в виде гипергеометрического ряда, получим

$$\Xi_2(\mu,\eta;\varsigma;x,y)=(1-x)^{-\mu}\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{(\mu)_n(\varsigma-\eta)_n}{(\varsigma)_m(\varsigma)_n n!m!}(y)^m\left(\frac{x}{x-1}\right)^n. \qquad (45)$$

Таким образом, из (34) с учетом (45) после простых преобразований следует

$$\Xi_2\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2};1;-\frac{a-b}{2b};-\frac{k^2(a-b)}{4}\right)=\left(\frac{a+b}{2b}\right)^{-1/2}\sum_{m,n}^{\infty}\frac{(1/2)_{m+n}(1/2)_n}{(1/2)_m(1)_{m+n}m!n!}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^n\left(-\frac{k^2(a-b)}{4}\right)^m. \qquad (46)$$

Выражение (46) является аналитическим продолжением (34) во всю область, так как $\frac{a-b}{a+b}\leq 1$ в условиях физической задачи.

Аналитическое продолжение выражения (I2), как целого, в более широкую область переменных кажется затруднительным. Существуют, тем не менее, физически пригодные разложения Re Ф.Г.К. по функциям Гаусса ${}_2F_1$, функция тора, Бесселя и т.д., некоторые из них даны в /7/.

Удобно представлять функции Ξ_2 в (I2),(34),(45) их интегральными представлениями. Интересно представление вида

$$\Xi_2\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};1;x,y\right)=\frac{1}{\pi}\int_0^1 u^{-1/2}(1-u)^{-1/2}(1-ux)^{-1/2}\mathrm{ch}\left(2\sqrt{1-u}\;y\right)du\,, \tag{47}$$

которое является предельным случаем интегрального представления Ξ_2, данного в /I0/. Многие интегральные представления для Ξ_2 можно получить как вырожденные случаи интегральных представлений функции Аппеля F_3, которые даны, например, в /9;24/.

Используя (47), легко представить Ф.Г.К. во всей области изменения переменных a и b. Так интеграл типа (47), которым можно представить ряд (33) в некоторой области переменных, представляет и ряд (46), причем переход между рядами (33) и (46) осуществляется простой заменой в интеграле: $(1-u)=v$.

Записав Ф.Г.К. с помощью (47), нетрудно показать также, что удовлетворяется условие излучения, сохраняются все свойства функции Грина.

5. Еще раз о действительной части Ф.Г.К.

Re Ф.Г.К. можно представить другими известными вырожденными гипергеометрическими функциями двух переменных. Возьмем действительную часть выражения (7), разложив при этом ${}_2F_1$ в гипергеометрический ряд; получится следующий двойной степенной ряд:

$$\frac{1}{2}\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(K/2)^{2n}(a-b)^{n-1/2}(1/2-n)_m(1/2)_m(-1)^m\left(\frac{2b}{a-b}\right)^m}{(1/2)_n\,n!\,(1)_m\,m!}\,. \tag{48}$$

Как известно, $(\alpha)_n=\dfrac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)}$ ($(\alpha)_n$ – символ Похгаммера) и

$\Gamma(1/2+\alpha)\,\Gamma(1/2-\alpha)=\dfrac{\pi}{\cos(\pi\alpha)}$; используя эти соотношения, перепишем (48) в виде

$$\frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{a-b}}\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{k^2(a-b)}{4}\right)^n(-1)^m\left(\frac{2b}{a-b}\right)^n(1/2)_{m-n}(1/2)_m}{n!\;m!\;(1)_m}. \tag{49}$$

Ряд (49) является определением вырожденной гипергеометрической функции двух переменных $H_3(\alpha,\beta,\nu;x,y)$ при $|x|<1$, входящий в список Горна /9/. H_3 представляет собой вырожденный случай полной функции

$$\mathcal{H}_2(\alpha,\beta,\gamma,\delta,\nu,x,y)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{m-n}(\beta)_m(\gamma)_n(\delta)_n}{(\nu)_m\;m!\;n!}\,x^n y^m,$$

также входящий в список Горна.

$$\left(H_3(\alpha,\beta,\nu;x,y)=\lim_{\varepsilon\to 0}\mathcal{H}_2(\alpha,\beta;1/\varepsilon;1/\varepsilon;\nu;x,\varepsilon^2 y)\right).$$

Функцию H_3 можно представить интегралом

$$H_3(\rho-\sigma,\beta,\nu;x,y)=(2\pi i)^{-2}\Gamma(\rho)\Gamma(1-\rho)\Gamma(1-\rho+\sigma)\Gamma(\sigma)\times$$
$$\times\int_C(t)^{-\rho}(1-t)^{\sigma/2-1/2}\,{}_2F_1(\rho;\beta;\nu;x/t)\,I_{\sigma-1}(2\sqrt{1-t}\,\sqrt{y})\,dt, \tag{50}$$

где контур C – является двойной петлей Похгаммера, $I_{\sigma-1}$ – модифицированная функция Бесселя первого рода порядка $\sigma-1$, а σ и ρ не являются целыми числами.

Представления типа (50) получаются как вырожденные случаи интегральных представлений для функции $\mathcal{H}_2$ /24/, которые основываются на различных представлениях B -интегралов.

Ряд (48) сходится только при значении $2b/(a-b)<1$ и поэтому не всегда удобен для представления Re Ф.Г.К. Существует, однако, возможность перейти к другой гипергеометрической функции двух переменных, свободной от этого недостатка и гораздо более удобной.

Представим Re Ф.Г.К. в виде

$$\mathrm{Re}\,\Phi\Gamma K=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\sqrt{a-b}}\,\mathcal{H}_2\left(1/2;1/2;1/\varepsilon;1/\varepsilon;1;-\frac{2b}{a-b};\varepsilon^2\frac{k^2}{4}(a-b)\right). \tag{51}$$

Используем квадратичное преобразование функции $\mathcal{H}_2$ /24/:

$$\mathcal{H}_2(\alpha,\beta;\gamma,\delta;2\beta;x,y)=\left(1-x/2\right)^{-\alpha}\mathcal{H}_7\left(\alpha,\gamma,\delta,\beta+1/2;\frac{x^2}{4(2-x)^2};y\left(1-\frac{x}{2}\right)\right), \tag{52}$$

где

$$\mathcal{H}_7(\alpha,\beta,\gamma,\delta,x;y)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{2m-n}(\beta)_n(\gamma)_n}{(\delta)_m\,m!\,n!}\,x^m y^n -$$

одна из полных гипергеометрических функций двух переменных из списка Горна.

Подставляя (52) в (51) и вычисляя предел, получаем, что

$$\mathrm{Re}\,\Phi.\Gamma.K.=\frac{1}{2\sqrt{a}}\,H_{10}\left(\frac{1}{2};1;\left(\frac{b}{2a}\right)^2;\frac{k^2}{4}a\right), \tag{53}$$

где H_{10} – вырожденный случай функции $\mathcal{H}_7$:

$$H_{10}(\alpha;\delta;x;y)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{2m-n}}{(\delta)_m\,m!\,n!}\,x^n y^n. \tag{54}$$

Причем H_{10} в форме (54) сходится лишь для $|x|<1/4$, что в выражении (53) выполняется всегда, кроме, что естественно для функции Грина, одной точки.

Представляя $\Gamma(\alpha+2m-n)$ интегралом (27), нетрудно записать и интегральное представление функции H_{10}. Оно выглядит, например, для случая (53), следующим образом:

$$H_{10}\left(\frac{1}{2};1;\left(\frac{b}{2a}\right)^2;\frac{\kappa^2}{4}a\right)=\frac{1}{2i\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{0+}e^{t-\frac{\kappa^2 a}{4t}}t^{-1/2}I_0\left(\frac{b}{a}t\right)dt. \qquad (55)$$

Можно сконструировать интегральное представление H_{10}, основываясь на каком-нибудь представлении B-функции в виде интеграла, например, /25/:

$$B(\alpha,\beta)=\frac{1}{2}\,\frac{1}{sh(i\beta\pi)}\int\limits_{0}^{1+}t^{\alpha-1}(t-1)^{\beta-1}dt,$$

$$Re\,\alpha>0, \quad |arg(t-1)|\leq\pi;\ \beta\neq 0;\pm1;\pm2;\ldots,$$

где интегрирование ведется по простой петле. При этом H_{10} будет иметь следующую интегральную форму:

$$H_{10}(\alpha,\delta;x,y)=-\frac{i}{2\sqrt{\pi}\sin(\alpha\pi)}\int\limits_{0}^{1+}(t-1)^{-\alpha-1}J_0(2\sqrt{ty})\,{}_2F_1\left(\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{2};1+\frac{\alpha}{2};\beta;\frac{4x}{(t-1)^2}\right)dt. \qquad (56)$$

К сожалению, для мнимой части Ф.Г.К. записать представление типа (53) не представляется возможным, хотя разложения по параметру $\left(\frac{2b}{a\pm b}\right)^2$ получить несложно, использовав известные квадратичные преобразования функции ${}_2F_1$ (см., например, /2I/) применительно к различным модификациям выражения (7).

Итак, выше рассматривалась задача о возможности представления Ф.Г.К. (интеграла (I),(2), до которых, по какой-то причине, не добрались классики математического анализа) функциями уже канонизированными в математике. Эти функции нашлись; ими, к большому огорчению, оказались вырожденные гипергеометрические функции двух переменных Ξ_2, H_3, H_{10}. Весьма сомнительно, что в ближайшее время можно научиться использовать названные функции, из-за неразвитости их теории, в приложениях; разве что на очень высоком уровне абстракции, с которого не видны практические нужды.

Однако есть надежда, что используя общие разложения и представления Ф.Г.К., полученные из ныне существующих отрывочных сведений о гипергеометрических функциях двух переменных, можно написать неизвестные пока, удобные при решении конкретных задач приближенные выражения Ф.Г.К. Заканчивая эту работу, оказавшуюся похожей по стилю на мемуары по анализу прошлого века, автор надеется на то, что любое знание, в конце концов, становится полезным.

Приложение I

Здесь доказывается соотношение

$$\int_0^y x^{c-1}(y-x)^{\beta-1}(1-xz)^{-\rho}\,{}_0F_1(c,\omega x)\,dx = \tag{I.I}$$

$$= \frac{\Gamma(c)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(c+\beta)}\, y^{c+\beta-1}(1-yz)^{-\rho}\,\Xi\left(\rho;\beta;c+\beta;\frac{yz}{yz-1};\omega y\right).$$

Разложим в левой части (I.I) функцию ${}_0F_1(c,\omega x)$ в степенной ряд; получаемый интеграл представляет собой интегральное определение гипергеометрической функции Гаусса ${}_2F_1$, производя интегрирование, из левой части (I.I) получим

$$y^{c+\beta-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(c)\,\Gamma(\beta)\,(\omega y)^n}{\Gamma(c+\beta)(c+\beta)_n n!}\,{}_2F_1(\rho;n+c;n+c+\beta;yz). \tag{I.2}$$

К функции ${}_2F_1$, в (I.2) применим известное линейное преобразование (см., например, /I2/), согласно которому

$$ {}_2F_1(\rho; n+c; n+c+\beta; yz) = (1-yz)^{-\rho}\, {}_2F_1(\rho; \beta; n+c+\beta; yz) $$

получим следующее выражение:

$$ y^{c+\beta-1}(1-yz)^{-\rho} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(c)\Gamma(\beta)(\omega y)^n}{\Gamma(c+\beta)(c+\beta)_n n!}\, {}_2F_1\left(\rho; \beta; n+\alpha+\beta; \frac{yz}{yz-1}\right). \quad (I.3) $$

Теперь записывая ${}_2F_1$ в виде гипергеометрического ряда, можно непосредственно показать, что (I.3) представляет собой правую часть (I.I).

Приложение П

Это приложение посвящено доказательству формулы

$$ {}_1F_1(1/2; 1; \alpha z) = \sqrt{\frac{-1}{\pi\alpha z}}\; {}_2F_0\left(1/2; 1/2; -\frac{1}{\alpha z}\right) \qquad (П.I) $$

и несколько более общей формулы.

При доказательстве будет использовано интегральное определение Γ -функции (см., например, /I9/)

$$ \frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{0+} e^t\, t^{-z}\, dt, \qquad |\arg t| \leq \pi \qquad (П.2) $$

и $$\Gamma(z)=\frac{1}{2i\sin(\pi z)}\int\limits_{-\infty}^{0+} e^{t}\,t^{z-1}dt, \quad |\arg t|\le\pi. \qquad (П.3)$$

Итак

$${}_1F_1(1/2;1;az)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1/2)_n(az)^n}{n!\,(1)_n}=\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{0+}e^{t}t^{-1-n}\frac{(1/2)_n(az)^n}{n!}=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{0+}\frac{e^{t}t^{-1}\,dt}{\sqrt{1-az/t}}=\frac{\sqrt{-1}}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{0+}\frac{e^{t}t^{-1/2}\,dt}{\sqrt{az}\,\sqrt{1-t/az}}=$$

$$=\frac{\sqrt{-1}}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{0+}e^{t}t^{-1/2}\frac{(t/az)^n(1/2)_n}{\sqrt{az}\;n!}\,dt= \qquad (П.4)$$

$$=\frac{1}{\pi}\sqrt{-1/(az)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\Gamma(1/2+n)(1/2)_n(1/(az))^n}{n!}=$$

$$=\sqrt{-1/(\pi az)}\;{}_2F_0(1/2;1/2;-1/az),\ \text{где}\ {}_2F_0(\delta,\gamma,x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\delta)_n(\gamma)_n}{n!}x^n.$$

Теперь, пусть коэффициенты ${}_1F_1$ будут произвольными (за исключением целых значений), используя определения Γ -функции (П.2) и (П.3), представим цепочку равенств, подобную (П.4):

$${}_1F_1(\alpha,\beta;az)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n(az)^n}{(\beta)_n n!}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{0+}\Gamma(\beta)e^{t}t^{-\beta-n}\frac{(\alpha)_n}{n!}(az)^n dt=$$

$$=\frac{\Gamma(\beta)}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{0+}e^{t}t^{-\beta}\frac{1}{(1-az/t)^{\alpha}}=\frac{\Gamma(\beta)}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{0+}e^{t}t^{-\beta+\alpha}(-1)^{\alpha}(az)^{-\alpha}\frac{dt}{(1-t/(a\text{-}z))^{\alpha}}=$$

$$= \frac{\Gamma(\beta)}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{0+} e^t t^{-\beta+\alpha+n} (-1)^{\alpha} (az)^{-\alpha} \frac{(\alpha)_n}{n!} \left(\frac{1}{az}\right)^n dt =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\beta)}{\pi} \sin((\alpha-\beta+1+n)\pi) \frac{\Gamma(\alpha-\beta+1+n)(\alpha)_n}{n!} \left(\frac{1}{az}\right)^n =$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha-\beta+1)}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{az}\right)^n \left(\frac{e^{-i\pi(\alpha-\beta+1+n)} - e^{+i\pi(\alpha-\beta+1+n)}}{2}\right) \frac{(\alpha-\beta+1)_n(\alpha)_n}{n!} =$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha-\beta+1)}{2\pi} \left[e^{-i\pi(\alpha-\beta+1)} {}_2F_0\left(\alpha-\beta+1; \alpha; -\frac{i}{az}\right) - e^{i\pi(\alpha-\beta+1)} {}_2F_0\left(\alpha-\beta+1; \alpha; \frac{i}{az}\right) \right].$$

В заключении необходимо заметить, что полученная формула

$${}_1F_1(\alpha, \beta; \alpha z) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha-\beta+1)}{2\pi} \left[e^{-i\pi(\alpha-\beta+1)} {}_2F_0\left(\alpha-\beta+1; \alpha; -\frac{i}{az}\right) - e^{i\pi(\alpha-\beta+1)} {}_2F_0\left(\alpha-\beta+1; \alpha, \frac{i}{az}\right) \right]$$

указывает на новую связь функций Куммера ${}_1F_1$ и функции Трикоми, но это уже предмет особого исследования.

Литература

1. Скучик Е. Основы акустики. М., 1976.-Т.2.-С.425.
2. Каневский И.Н. Фокусирование звуковых и ультразвуковых волн. М., 1977.-С.68.

3. King I.V. On the acoustical radiation field of the piezo-electric oscillator and the effect of viscosity on transmission. Canadian Journal of Research. 1934. N 11. P.125-155.

4. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. М., 1966. Т.2.-С.109.
5. Ватсон Г.Н. Теория Бесселевых функций. М., 1949. Ч.I.-С.400.
6. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. М., 1965. Т.I.-С.123-124.
7. Васильев Е.Н. Об одной функции, встречающейся в теории дифракции. ЖВММФ. 1965.-Т.5,№ 5.-С.841-852.
8. Прудников А.П. и др. Интегралы и ряды. Дополнительные главы.- М., 1986.-С.594.
9. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. М., 1965. Т.I.-С.218-236.
10. Прудников А.П. и др. Интегралы и ряды. Дополнительные главы. М., 1986.-С.448-453.
11. Appell Paul, Kampé de Fériet M.S. Fonctions hypergéométriques et hypersphériques. Polynomes d'ttermite, Gauthier-Villars, 1926. P.40 - 102.
12. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. М.,1965. Т.I.-С.76.
13. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. М.,1965. Т.I.-С.113-114.
14. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. М.,1966. Т.2.-С.115.
15. Прудников А.П. и др. Интегралы и ряды. Специальные функции. М., 1983.-С.391.
16. Lerch M. Sur un point de la théorie des fonctions génératrices d'Abel. Acta Matematica. 1903. V.27. P.339 - 352.

17. Ватсон Г.Н. Теория Бесселевых функций. М., 1949. Ч.I.-С.417.
18. Справочник по специальным функциям/Под ред. М.Абрамовица и И.Стиган. М.,1979.- С.184.
19. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. М.,1966. Т.2.-С.28.
20. Ватсон Г.Н., Теория Бесселевых функций. М., 1949. Ч.I.-С.195.

21. Прудников А.П. и др. Интегралы и ряды. Дополнительные главы. М., 1986.-С.457-458.
22. Прудников А.П. и др. Интегралы и ряды. Дополнительные главы. М., 1986.-С.402.
23. Прудников А.П. и др. Интегралы и ряды. Дополнительные главы. М., 1986.-С.580.
24. Erdèlyi A. Transformations of Hypergeometric Functions of Two Variables. Proc.Roy.Soc.Edinbyrgh., Sect.A. 1948. V.62. P.378 - 385.
25. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. М.,1966. Т.2.-С.30.

Дата поступления статьи
2 января 1990 г.