Министерство высшего и среднего специального образования
Р С Ф С Р

Горьковский ордена Трудового Красного Знамени
научно-исследовательский радиофизический институт (НИРФИ)

---

Препринт № 298

# НОВЫЙ ПАРАМЕТР
# В ТЕОРИИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ВИБРАТОРНЫХ АНТЕНН

Докучаев В.П.

Горький 1990

Д о к у ч а е в В. П.

"НОВЫЙ ПАРАМЕТР В ТЕОРИИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ВИБРАТОРНЫХ АНТЕНН" // Препринт № 298 . – Горький, НИРФИ, – 1990.

УДК 621.396.67

Предложен новый приближенный метод решения основного интегрального уравнения теории тонких электрических вибраторов. В качестве большого параметра в приближенной теории фигурирует волновое сопротивление провода, образующего плечи антенны. Получено выражение для распределения электрического тока в антенне, и формулы для входного импеданса симметричного электрического вибратора. Проведено качественное сопоставление полученных результатов с аналогичными данными других работ.

# Новый параметр в теории электрических вибраторных антенн.

В.П.Докучаев

Современная теория и методы расчета характеристик электрических вибраторных антенн базируются на приближенном решении интегро-дифференциального уравнения для электрического тока в металлических проводниках антенны [I-5]. Строгое решение этого уравнения получить не удается, вследствие больших математических трудностей, которые подробно обсуждаются в работах 4,6 .

Здесь предложен новый приближенный метод решения основного интегрального уравнения теории тонких антенн. Метод основан на некоторой модификации преобразования интегрального уравнения, которая приводит к новому большому параметру в теории антенн. Отмечено, что этот параметр просто связан с характеристическим импедансом одиночного металлического проводника.

Будем считать, что симметричный линейный вибратор ориентирован по оси $z$ декартовой прямоугольной системы координат $x$ , $y$ , $z$ и запитывается в центре сторонней э.д.с., как указано на рис. I. При этом распределение электрического тока $I(z)$ должно удовлетворять условию симметрии

$$I(z) = I(-z) \quad (I)$$

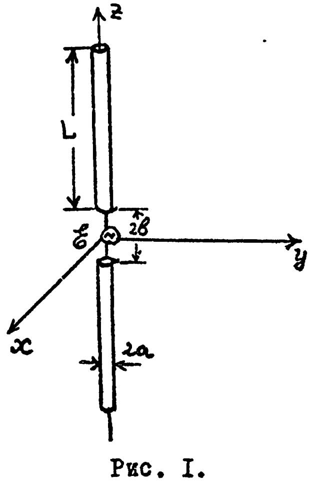


Рис. I.

Плечи симметричного вибратора, каждое длиной $L$ , образованы тонкими металлическими проводниками одинакового радиуса $a$ . Возбуждение вибратора осуществляется сторонней электродвижущей силой $\mathscr{E}$ , приложенной на малом отрезке длины $2b$ вблизи центра вибратора. Условия тонкости вибратора и малости величины зазора в приближенной теории тонких антенн имеют вид

$$a \ll b \ll L \quad , \quad \Omega_0 = 2\ln(2L/a) \gg 1, \tag{2}$$

$$ka \ll 1 \quad , \quad 2\ln(2/ka) \gg 1, \tag{3}$$

где $k = \omega/c = (2\pi/\lambda)$ - волновое число, $\omega$ - частота волны, $c$ - скорость света в вакууме.

В указанной постановке задача о распределении тока по длине вибратора в серии работ Галена, Леонтовича и Левина, Кинга и Миддлетона была сведена к интегродифференциальному уравнению теории тонких антенн [I-5]:

$$\frac{i}{4\pi\omega\varepsilon_0}\left(\frac{d^2}{dz^2}+k^2\right)\int_{-L}^{+L}\frac{I(z')\,e^{-ik\sqrt{(z-z')^2+a^2}}\,dz'}{\sqrt{(z-z')^2+a^2}} = \mathcal{E}\,\delta(z). \tag{4}$$

Здесь использована система СИ, $\varepsilon_0$ - диэлектрическая постоянная этой системы, $\delta$ - символ функции Дирака. Уравнение (4) дополняется граничными условиями для тока на концах вибратора

$$I(L) = I(-L) = 0. \tag{5}$$

Решение дифференциального уравнения в (4) относительно интеграла выполняется с учетом условия симметрии (I) :

$$\int_{-L}^{+L}\frac{I(z')\,e^{-ik\sqrt{(z-z')^2+a^2}}\,dz'}{\sqrt{(z-z')^2+a^2}} = -\frac{2\pi i}{Z_0}\left(\mathcal{E}\sin k|z| + C\cos kz\right), \tag{6}$$

где $C$ - постоянная интегрирования и $Z = (\mu_0/\varepsilon_0)^{1/2}$ - характеристическое сопротивление свободного пространства.

Приближенные способы решения интегрального уравнения (6) - - центральная проблема теории электрических вибраторных антенн

[I-7]. Здесь предлагается следующий способ приближенного решения (6). Ядро этого интегрального уравнения

$$\frac{e^{-i\kappa R'}}{R'} = \frac{\cos(\kappa R')}{R'} - i\,\frac{\sin(\kappa R')}{R'}, \qquad (7)$$

$$R' = \sqrt{(z-z')^2 + a^2}$$

таково, что его реальная часть при $a \to 0$ и $z \to z'$ неограничено возрастает, т.е. имеет особенность. Мнимая часть ядра такой особенностью не обладает. В связи с этим проведем "регуляризацию" подынтегрального выражения в (6) следующим образом

$$\int_{-L}^{+L} \frac{I(z')\,e^{-i\kappa R'}}{R'}\,dz' \equiv I(z)\int_{-L}^{+L}\frac{\cos(\kappa R')\,dz'}{R'} +$$

$$+\int_{-L}^{+L}\frac{[I(z')-I(z)]\cos(\kappa R') - i\,I(z')\sin(\kappa R')}{R'}\,dz'. \qquad (8)$$

Далее воспользуемся условием тонкости антенны (2) при вычислении второго интеграла в (8) :

$$\int_{-L}^{+L}\frac{\cos(\kappa R')\,dz'}{R'} \simeq \Omega_1 + \sigma(z) \qquad (9)$$

где введено обозначение $\Omega_1$ для нового основного большого параметра

$$\Omega_1 = 2\ln(2L/a) - 2\,\mathrm{Cin}(\kappa L) \qquad (10)$$

Функция $\mathrm{Cin}(x)$ хорошо известна в теории тонких антенн и в теории специальных функций ( см.,например, [4,8] ). Она просто связана с интегральным косинусом $\mathrm{Ci}(x)$

$$Cin(x) = \int_0^x \frac{1-\cos t}{t} dt = \ln x + \gamma - Ci(x), \quad (11)$$
$$Ci(x) = -\int_x^\infty \frac{\cos t}{t} dt,$$

$\gamma = 0{,}577$ – постоянная Эйлера. Из соотношения (10) и (11) следует, что при $kL \ll 1$ $\Omega_1 \simeq \Omega_0 = 2\ln(2L/a)$. В другом предельном случае, когда $kL \gg 1$ и $Cin(x) \simeq \ln x$ из (8) и (9) следует, что $\Omega_1 \simeq 2\ln(2/ka)$. Таким образом новый большой параметр зависит от частоты волны и изменяется в пределах

$$2\ln(2/ka) \lesssim \Omega_1 \lesssim \Omega_0 \quad (12)$$

Функция $\sigma(z)$ в представлении (9) определяется соотношением

$$\sigma(z) = \int_{-L}^{+L} \left[\frac{\cos(kR')}{R'} - \frac{\cos(kR_0)}{R_0}\right] dz' \quad (13)$$
$$R_0 = \sqrt{z'^2 + a^2}.$$

Ясно, что $\sigma(0) = 0$.

С помощью соотношения (9) основное интегральное уравнение (6) переписываем в виде

$$I(z) = -\frac{2\pi i}{Z_0 \Omega_1}\left[\mathcal{E}\sin k|z| + C\cos kz\right] - \frac{\sigma(z)}{\Omega_1} I(z) - $$
$$- \frac{1}{\Omega_1}\int_{-L}^{+L} \frac{[I(z') - I(z)]\cos(kR') - i\, I(z')\sin(kR')}{R'} dz' \quad (14)$$

Из этого соотношения проясняется физический смысл параметра $\Omega_1$. Первые два слагаемых в уравнении (14), как известно, связаны с приближением длинных линий. Величина перед квадратными скобками в (14) это волновое сопротивление одиночного провода в месте включения сторонней э.д.с., то-есть при $z = 0$ [3].

Способ решения уравнения (I4) и нахождения константы с помощью граничного условия (5) совершенно аналогичен тому, который использовался в работах Галена и Кинга - это способ последовательных итераций [2,4]. Окончательное выражение для распределения тока $I(z)$ имеет следующий вид :

$$I(z)=\frac{2\pi i \mathcal{E}}{Z_0 \Omega_1}\left\{\frac{\left[f_0(z)+\frac{f_1(z)}{\Omega_1}+\ldots\right]\left[G_0(L)+\frac{G_1(L)}{\Omega_1}+\ldots\right]-\left[g_0(z)+\frac{g_1(z)}{\Omega_1}+\ldots\right]\left[F_0(L)+\frac{F_1(L)}{\Omega_1}\right]}{\left[F_0(L)+\Omega_1^{-1}F_1(L)+\ldots\right]}\right\} \quad (I5)$$

Здесь использованы обозначения

$$F_0(z)=\cos kz\,, \qquad G_0(z)=\sin k|z|\,,$$

$$f_0(z)=F_0(z)-F_0(L)\,, \qquad g_0(z)=G_0(z)-G_0(L)\,, \quad (I6)$$

$$f_1(z)=F_1(z)-F_1(L)\,, \qquad g_1(z)=G_1(z)-G_1(L)\,,$$

а функции $F_1(z)$ и $G_1(z)$ определяются интегралами

$$F_1(z)=-\int_{-L}^{+L}\frac{[f_0(z')-f_0(z)]\cos(kR')-if_0(z')\sin(kR')}{R'}dz'-\sigma(z)f_0(z) \quad (I7)$$

$$G_1(z)=-\int_{-L}^{+L}\frac{[g_0(z')-g_0(z)]\cos(kR')-ig_0(z')\sin(kR')}{R'}dz'-\sigma(z)g_0(z) \quad (I8)$$

В выражении для $I(z)$ (I3) в квадратных скобках отброшены члены порядка $O(\Omega^{-2})$. Таким образом соотношения (I5)-(I8) дают новое приближенное решение задачи о распределении тока в антенне.

Для того чтобы сравнить полученные здесь результаты с расчетами Галена, Кинга и Мидльтона [2,4], найдем входной импеданс антенны

$$Z_A = \frac{\mathcal{E}}{I(0)} \quad . \tag{I9}$$

Замечая, что $(Z_0/2\pi) \simeq 60$ Ом и пользуясь соотношениями (I5)-(I9) окончательно находим, что

$$Z_A = -60 i \Omega_1 \frac{\cos(kL) + (\alpha/\Omega_1)}{\sin(kL) + (\beta/\Omega_1)} \tag{20}$$

Здесь использованы обозначения, принятые в работах [2,4] и введены комплексные безразмерные параметры $\alpha$ и $\beta$ :

$$\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2 \tag{2I}$$

$$\alpha_1 = \frac{\cos \varkappa}{2}\left[Cin(4\varkappa) - 2Cin(2\varkappa)\right] - \frac{\sin\varkappa}{2}\left[Si(4\varkappa)\right] \tag{22}$$

$$\alpha_2 = \frac{\cos \varkappa}{2}\left[Si(4\varkappa) - 2Si(2\varkappa)\right] + \frac{\sin\varkappa}{2}\left[Cin(4\varkappa)\right] \tag{23}$$

Заметим, что эти выражения для $\alpha_1$ и $\alpha_2$ точно совпадают с формулами Галена. Отличие имеет место для безразмерных комплексных

$$\beta = \beta_1 + i\beta_2 \tag{24}$$

$$\beta_1 = \frac{\cos \varkappa}{2}\left[4Si(2\varkappa) - Si(4\varkappa)\right] + \frac{\sin\varkappa}{2}\left[4\ln 2 + 2Cin(2\varkappa) - Cin(4\varkappa) - 4Cin\varkappa\right] \tag{25}$$

$$\beta_2 = \frac{\cos \varkappa}{2}\left[Cin(4\varkappa) - 4Cin(2\varkappa)\right] - \frac{\sin\varkappa}{2}\left[Si(4\varkappa) - 2Si(2\varkappa)\right] \ . \tag{26}$$

Здесь использовано стандартное обозначение для интегрального синуса

$$Si(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt \ , \qquad \varkappa = kL \ .$$

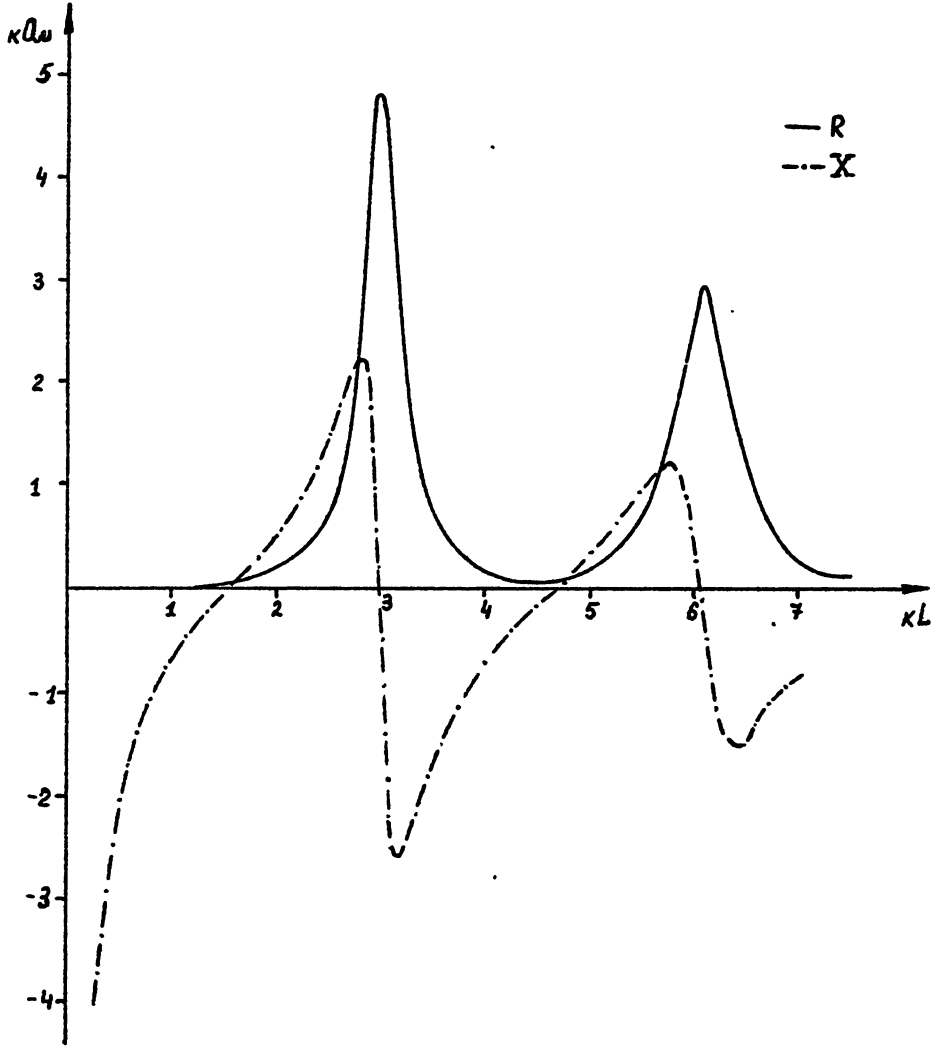


Рис. 2

Следует подчеркнуть, что отличие от аналогичных соотношений в приближении Галена содержится только в $\Omega_1$ и $\beta_1$ . (последнее слагаемое в квадратных скобках перед $\sin æ$ в (23).

Из проведенного рассмотрения ясно, что основное отличие полученных результатов от ранее известных следует ожидать для антенн сравнительно большой длины при $æ = kL \gg 1$. Для коротких антенн ( $kL \ll 1$ ) результаты полностью совпадают с [2] .

На рис. 2 в качестве иллюстрации зависимости входного импеданса вибратора от частоты приведены графики функции $R(\omega)$ и $X(\omega)$ для случая $\Omega_0 = 20$ , $Z_A = R(\omega) + i X(\omega)$ . Точки $X = 0$ соответствуют резонансам токов и напряжений в антенне. Заметим, что результаты расчетов по формулам (20)-(26) для указанного значения $\Omega_0 = 20$ при $kL \lesssim 3$ с достаточной степенью точности совпадают с результатами расчета $Z_A$ по формулам приближения Кинга-Миддлетона с учетом членов второго порядка. Значительные расхождения (до 20% и более) появляются при $kL \gtrsim 5$ .

В заключение благодарю С.Б.Кожухина за помощь при выполнении расчетов.

## Литература


1. М.Леонтович, М.Левин. К теории возбуждения колебаний в вибраторах антенн.//Ж.техн.физики, 1944, 14, № 9, с. 481-505.
2. Арони И. Антенны, пер. с англ. под ред. Шпунова А.И. М.: Сов. радио, 1951.
3. Щелкунов С., Фриис Г. Антенны.- М.: Сов.радио, 1955, с. 233.
4. King R.W.P. The Theory of Linear Antennas.- Harv. Univ. Press, Camb. Massach., 1956.
5. Драбкин А.Л., Зузенко В.Л. Антенно-фидерные устройства. - М.: Сов.радио, 1961.
6. Вайнштейн Л.А. Электромагнитные волны.- М.: Радио и связь, 1988.
7. Марков Г.Т., Сазонов Д.М. Антенны.- М.: Энергия, 1975.
8. Справочник по специальным функциям. Под ред. М.Абрамовица и И.Стиган. - М.: Наука, 1979.

Владимир Платонович Докучаев

НОВЫЙ ПАРАМЕТР
В ТЕОРИИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ВИБРАТОРНЫХ АНТЕНН


Подписано к печати 18.12.89 г. МЦ 00966. Формат 60х84/16
Бумага писчая. Печать офсетная. Объем 0,55 усл.п.л.
Заказ 5010. Тираж 120. Бесплатно.

Отпечатано на ротапринте НИРФИ