

Министерство высшего и среднего специального образования
Р С Ф С Р

Горьковский ордена Трудового Красного Знамени
научно-исследовательский радиофизический институт (НИРФИ)

П р е п р и н т № 307

ОБ ОРОГРАФИЧЕСКОМ ВОЗБУЖДЕНИИ
АКУСТИКО-ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН

Г.И.Григорьев
О.Н.Савина

Горький 1990

Григорьев Г. И., Савина О. Н.

ОБ ОРОГРАФИЧЕСКОМ ВОЗБУЖДЕНИИ АКУСТИКО-ГРАВИТАЦИОННЫХ
ВСПЛН // Препринт № 307 - Горький: НИРФИ - 1990 - 10 с.

УДК 551.596.1

Рассмотрен орографический механизм генерации акустико-гравитационных волн для случая, когда постоянный и однородный воздушный поток обтекает расположенное на плоской границе препятствие заданной формы, периодически изменяющееся во времени. Проанализированы условия распространения волновых слабозатухающих возмущений в изотермической атмосфере и дан алгоритм для нахождения пространственного распределения параметров среды.

Известно, что одним из возможных механизмов генерации акустико-гравитационных волн (АГВ) является обтекание атмосферными воздушными потоками неровностей земной поверхности [1]. В традиционной постановке этой задачи обычно предполагается, что препятствия и воздушные течения над ними неизменны во времени. Ниже рассматривается случай, когда атмосферный газ движется в горизонтальном направлении вдоль оси X с постоянной скоростью u_0 , а отклонение граничной поверхности от плоскости $z = 0$ дается формулой

$$\zeta_0 = z_0 f(x) \exp(-i\omega t). \quad (1)$$

Возникающие в таких условиях возмущения атмосферных параметров, в предположении их малости и двумерности задачи, можно оценить из известной системы линейных дифференциальных уравнений

$$\rho_0 \frac{du}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x}, \quad (2)$$

$$\rho_0 \frac{dw}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g, \quad (3)$$

$$\frac{dp}{dt} + w \frac{d\rho_0}{dz} + \rho_0 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0, \quad (4)$$

$$\frac{dp}{dt} - \rho_0 g w = c^2 \left(\frac{dp}{dt} + w \frac{d\rho_0}{dz} \right). \quad (5)$$

При записи (2) - (5) использованы следующие обозначения: ρ - плотность, p - давление, u и w - горизонтальная и вертикальная

компоненты скорости, $c = \sqrt{\gamma \rho_0 / \rho_0}$ - скорость звука, g - ускорение поля тяжести, $d/dt = \partial/\partial t + u_0 \partial/\partial x$. Равновесные давление p_0 и плотность ρ_0 изменяются с высотой z по закону $p_0, \rho_0 \sim \exp(-z/H)$, H - высота однородной атмосферы. Форма препятствия определяет вертикальное смещение частиц ξ ($w = d\xi/dt$) вблизи границы раздела, которое затем передается в вышележащие слои атмосферы. Если высота препятствия z_0 мала по сравнению с длинами возбуждаемых акустико-гравитационных волн, граничное условие (I) можно вводить при $z = 0$.

Не конкретизируя пока форму препятствия $f(x)$, воспользовавшись преобразованием Фурье

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{f}(k) \exp(ikx) dk, \quad (6)$$

определим по заданному возмущению границы ξ_0 амплитуду смещения ξ_k фиксированной гармонике $\xi_k \sim \exp(ikx - i\omega t)$. Принимая такую же зависимость от координаты x и времени t всех переменных при $z > 0$, для ξ_k из уравнений (2) - (5) имеем

$$\frac{d^2 \xi_k}{dz^2} - \frac{1}{H} \frac{d \xi_k}{dz} + \frac{\Omega^2}{c^2} \xi_k + \left(\frac{\omega_g^2}{\Omega^2} - 1 \right) k^2 \xi_k = 0, \quad (7)$$

$$\omega_g^2 = (\gamma - 1)g^2/c^2, \quad \Omega = \omega - k u_0,$$

с условием на границе $z = 0$

$$\xi_k = z_0 \bar{f}(k) \exp(ikx - i\omega t). \quad (8)$$

Исключив из (7) первую производную $d\xi_k/dz$ подстановкой $\xi_k = \xi_k \exp(-k_1 z)$, $k_1 = 1/2H$, получим

$$\frac{d^2 \xi_k}{dz^2} + \kappa^2 \xi_k = 0, \quad (9)$$

$$\kappa^2 = \frac{\Omega^2}{c^2} - k_1^2 + k^2 \left(\frac{\omega_g^2}{\Omega^2} - 1 \right), \quad (10)$$

$$\xi_k|_{z=0} = z_0 \bar{f}(k) \exp(ikx - i\omega t). \quad (11)$$

Решение задачи (9) - (II) можно записать в виде

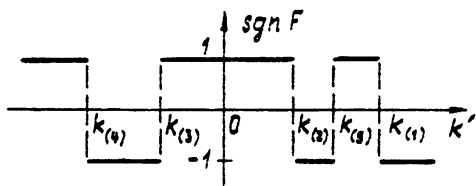
$$\zeta_1 = z_0 \bar{f}(k) \exp(ikx - i\omega t + i\alpha z),$$

$$\alpha = \pm \sqrt{\Omega^2/c^2 - k_1^2 + k^2(\omega_g^2/\Omega^2 - 1)}. \quad (I2)$$

Таким образом, в полупространстве $z > 0$ распространяющимися от границы являются те возмущения ζ_k , для которых $\alpha^2 > 0$, и вертикальная компонента групповой скорости $v_{gpz} = \partial\omega/\partial\alpha > 0$. Последнее неравенство позволяет выбрать в (I2) знак α . Действительно, определяя из дисперсионного соотношения (I0)

$$v_{gpz} = \frac{c^2 \alpha \Omega^3}{\Omega^4 - c^2 \omega_g^2 k^2}, \quad (I3)$$

приходим к выводу, что условие $v_{gpz} > 0$ эквивалентно требованию $\alpha > 0$ для $F = \Omega(\Omega^4 - c^2 \omega_g^2 k^2) > 0$. Следовательно, знак α соответствует знаку F и определяется значениями ω , k



Р и с. I

и u_0 . Рис. I иллюстрирует зависимость функции $\text{sgn } F$ от $k' = k/k_1$. Функция F обращается в нуль в точках $k'_{(1,2)}$ и $k'_{(3,4)} = \omega_0/M$ при $\omega_0 = \omega/c k_1 > \alpha/4M$:

$$k'_{(1,2)} = \frac{1}{M} \left(\omega_0 + \frac{\alpha}{2M} \pm \sqrt{\frac{\alpha^2}{4M^2} + \frac{\alpha\omega_0}{M}} \right), \quad (I4)$$

где $\alpha = \omega_g/\omega_A = \omega_g/c k_1 = 2\sqrt{\gamma-1}/\gamma$, $M = u_0/c$ - число Маха. Если выполнено условие $\omega_0 < \alpha/4M$, имеются еще два значения $k'_{(3,4)}$, при которых меняется знак F :

$$k'_{(3,4)} = \frac{1}{M} \left(\omega_0 - \frac{\alpha}{2M} \pm \sqrt{\frac{\alpha^2}{4M^2} - \frac{\alpha\omega_0}{M}} \right). \quad (I5)$$

Пространственно-временная структура вертикального смещения ζ

определяется выражением

$$\xi = k_1 z_0 \exp(-i\omega t + k_1 z) \int_{z^2 \geq 0} \bar{f}(k') \exp(ik'k_1 x + i\alpha z \operatorname{sgn} F) dk'. \quad (I6)$$

Чтобы определить область интегрирования в (I6), надо найти корни k_0 уравнения

$$z = \frac{k_1}{|\omega_0 - M k_0|} \sqrt{(\omega_0 - M k_0)^4 - (\omega_0 - M k_0)^2 (1 + k_0^2) + \alpha^2 k_0^2}. \quad (I7)$$

Если пренебречь небольшой разницей характерных частот ω_0 и $\omega_A = c k_1$ ($\alpha = 1$), легко определить приближенные значения корней (I7)

$$k_0 = \frac{\omega_0}{M \pm 1}, \quad k_0 = \frac{\omega_0 \pm 1}{M}. \quad (I8)$$

Из соотношений (I7), (I8) следует, что при $M + \omega_0 < 1$ условие

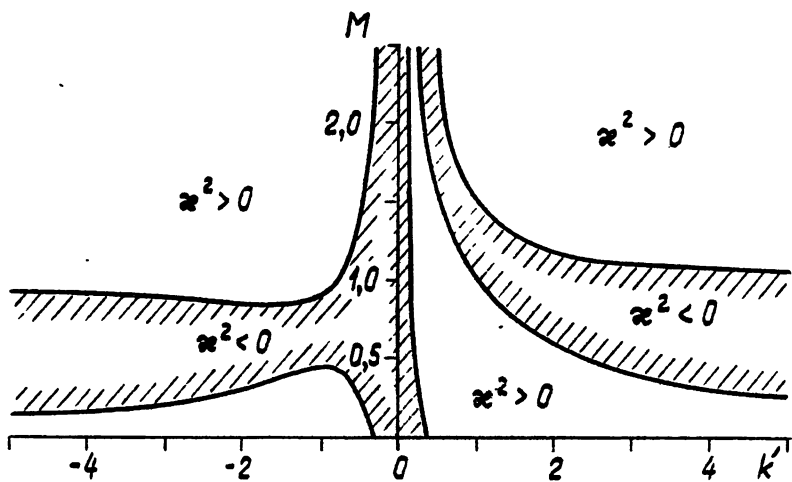
$$z^2 \geq 0 \text{ реализуется в интервалах } \frac{\omega_0 - 1}{M} \leq k' \leq \frac{\omega_0}{M-1} \text{ и}$$

$$\frac{\omega_0}{M+1} \leq k' \leq \frac{\omega_0 + 1}{M}. \text{ В случае } M + \omega_0 > 1 \text{ (но при } M < 1 \text{ и } \omega_0 < 1)$$

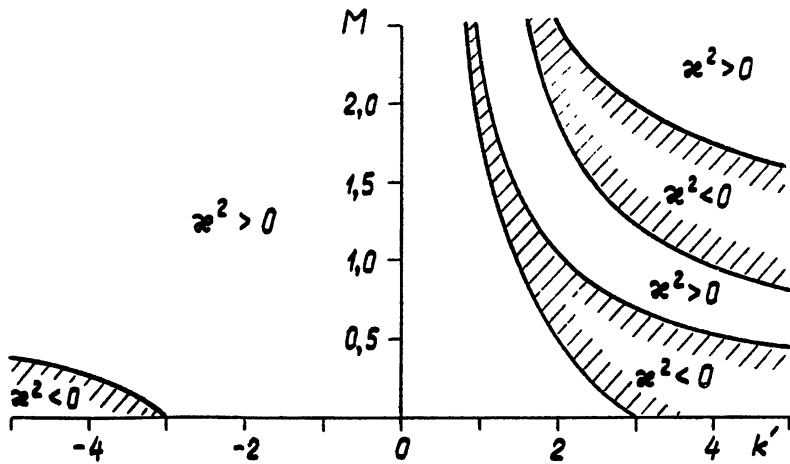
$$z^2 \geq 0 \text{ в диапазонах } \frac{\omega_0}{M-1} \leq k' \leq \frac{\omega_0 - 1}{M} \text{ и } \frac{\omega_0}{M+1} \leq k' \leq \frac{\omega_0 + 1}{M}.$$

Более полное представление об области интегрирования в (I6) дают рис. 2, 3, на которых в полуплоскости (M, k') для частот $\omega_0 = 0, 3$ и $\omega_0 = 3$ проведены кривые, разделяющие участки $z^2 > 0$ и $z^2 < 0$.

Таким образом, при заданной форме препятствия $f(x)$ можно путем численного анализа (I6) определить параметры возмущений. Однако при определенных условиях в область интегрирования попадает значение $k'_{кр} = \omega_0 / M$. При этом $\Omega = \omega - k' u_0 = 0$, $v_{грz} \rightarrow 0$ и $|z| \rightarrow \infty$, что затрудняет численный анализ (I6). Уменьшение длины волны $\lambda_z = 2\pi / z$ и групповой скорости $v_{грz}$ приводит при наличии даже слабой диссипации к сильному поглощению АГВ [2, 3]. Поэтому при записи полного решения задачи об орографическом возбуждении АГВ из области интегрирования в (I6) следует исключить некоторый интервал вблизи $k'_{кр} = \omega_0 / M$, в котором диссипация особенно велика. Оценить ширину этого интервала можно введя, например, частоту столкновений ν в уравнения (2), (3). Соответствующий анализ дает: $\Delta k' \approx \nu / M \omega_A$.



Р и с. 2



Р и с. 3

Аналитическое выражение для ξ можно получить из (16) с помощью метода стационарной фазы, принимая в качестве большого параметра $q = k_s R \gg 1$. Для определения точек стационарной фазы $k' = k_s$ требуется решить уравнение

$$\left\{ (\omega_0 - Mk_s)^2 - 1 + k_s^2 \left[\frac{\alpha^2}{(\omega_0 - Mk_s)^2} - 1 \right] \right\}^{1/2} \operatorname{tg} \vartheta = \\ = -M(\omega_0 - Mk_s) + k_s \left[\frac{\alpha^2}{(\omega_0 - Mk_s)^2} - 1 \right] + \frac{\alpha^2 M k_s^2}{(\omega_0 - Mk_s)^3}. \quad (19)$$

Здесь угол ϑ и расстояние R введены соотношениями $z = R \cos \vartheta$ и $x = R \sin \vartheta$. Решение (19) в общем виде получить затруднительно, а для двух предельных случаев: $\omega_0 \gg Mk_s$ и $\omega_0 \ll Mk_s$ - из (19) имеем соответственно

$$k_{s1} = \frac{\omega_0^2 (\omega_0^2 - 1)^{1/2} \sin \vartheta}{[(\alpha^2 - \omega_0^2)(\alpha^2 \cos^2 \vartheta - \omega_0^2)]^{1/2}} + \\ + \frac{M \omega_0^3}{\alpha^2 - \omega_0^2} \left(1 - \frac{\alpha^2 k_{s1}^2}{\omega_0^4} \frac{\operatorname{tg}^2 \vartheta + 3 - 3\alpha^2 \omega_0^{-2}}{\operatorname{tg}^2 \vartheta + 1 - \alpha^2 \omega_0^{-2}} \right), \quad (20)$$

$$k_{s2} = \frac{(M^2 - \alpha^2)^{1/2} \sin \vartheta}{M [(M^2 - 1)(1 - M^2 \cos^2 \vartheta)]^{1/2}}. \quad (21)$$

Отвечающие им значения вертикальной компоненты волнового вектора даются формулами

$$z_{s1} = \frac{\omega_0^2 [(\omega_0^2 - 1)(\alpha^2 - \omega_0^2)]^{1/2} \cos \vartheta}{(\alpha^2 \cos^2 \vartheta - \omega_0^2)^{1/2}} + \frac{\alpha^2 M k_{s1}^2 \sin 2\vartheta}{\omega_0 (\omega_0^2 - \alpha^2 \cos^2 \vartheta)}, \quad (22)$$

$$z_{s2} = \frac{[(M^2 - \alpha^2)(M^2 - 1)]^{1/2} \cos \vartheta}{M (1 - M^2 \cos^2 \vartheta)^{1/2}}. \quad (23)$$

Выражения для точек стационарной фазы (20), (22) были получены в приближении малых чисел Маха и малости соответствующих поправок к k_{s0} , z_{s0} , найденных при $M = 0$ [4].

Таким образом, представление (16) для вертикального смещения

с учетом (20) - (23) для рассмотренных двух предельных случаев может быть записано в виде

$$\begin{aligned} \xi_1 = & A \bar{f}(k_{s1}) \exp \left\{ -iq \left[\frac{(\omega_0^2 - 1)^{1/2} (\alpha^2 \cos^2 \vartheta - \omega_0^2)^{1/2}}{(\alpha^2 - \omega_0^2)^{1/2}} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{M \omega_0^3 \sin \vartheta}{\alpha^2 - \omega_0^2} \left(1 - \frac{\alpha^2 (\omega_0^2 - 1) \sin^2 \vartheta}{(\alpha^2 - \omega_0^2) (\alpha^2 \cos^2 \vartheta - \omega_0^2)} \right) \right] \right\} \cdot \\ & \cdot \left[\frac{(\alpha^2 \cos^2 \vartheta - \omega_0^2)^{3/2}}{(\omega_0^2 - 1)^{1/2} (\alpha^2 - \omega_0^2)^{1/2} \omega_0^2 \cos^2 \vartheta} + \frac{2\alpha^2 M \sin \vartheta}{\omega_0 (\alpha^2 - \omega_0^2)} \left(3 + \frac{\omega_0^2 \tan^2 \vartheta}{\alpha^2 - \omega_0^2} \right) \right]^{-1/2}, \quad (24) \end{aligned}$$

$$\xi_2 = A \bar{f}(k_{s2}) \exp \left\{ -iq \frac{(M^2 - \alpha^2)^{1/2} (1 - M^2 \cos^2 \vartheta)^{1/2}}{M (M^2 - 1)^{1/2}} \right\} \frac{(M^2 - \alpha^2)^{1/4} (M^2 - 1)^{1/4} \cos \vartheta}{(1 - M^2 \cos^2 \vartheta)^{3/4}}, \quad (25)$$

$$A = k_1 z_0 \sqrt{2\pi/q} \exp(-i\omega t + k_1 z - i\pi/4). \quad (26)$$

В заключение укажем, что представление (16) дает простое аналитическое выражение для смещения ξ (и через поляризационные соотношения [4] других величин) в случае

$$\bar{f}(k') = \delta(k' - K_0), \quad (27)$$

где $\delta(y)$ - дельта-функция Дирака. Этот случай соответствует распределению $f(x) = (2\pi)^{-1} \exp(-iK_0 k_1 x)$. Если $K_0 k_1$ удовлетворяет условию излучения $\alpha^2 > 0$, из (16) имеем

$$\xi = k_1 z_0 \exp\{-i\omega t + k_1 z + i\alpha(K_0)z \operatorname{sgn} F + iK_0 k_1 x\}. \quad (28)$$

Это решение близко к полученному в [5] при анализе генерации внутренних волн в атмосфере морским волнением⁺). При $M = 0$ формула (28) соответствует результатам [6] об атмосферных возмущениях, генерируемых поверхностными релеевскими волнами.

⁺) Различие состоит в том, что в [5] предполагается дополнительная связь между частотой ω и горизонтальной компонентой волнового вектора k_x в виде $\omega^2 = g k_x$.

Авторы выражают благодарность В.Б.Ляцкому за плодотворное обсуждение рассмотренного в данной работе механизма генерации акустико-гравитационных волн.

Л и т е р а т у р а

1. Госсард Э., Хук У. Волны в атмосфере. - М.: Мир, 1978. - 526 с.
2. Booker J.R., Bretherton F.P. The critical layer for internal gravity waves in a shear flow.//J.Fl.Mech. 1967. V.27. P.513.
3. Bowman M.R., Thomas L., Thomas R.H. The propagation of gravity waves through a critical layer for conditions of moderate wind shear.//Planet.Space Sci. 1980. V.28. P.119 - 133.
4. Григорьев Г.И., Савина О.Н. О механизмах генерации акустико-гравитационных волн в изотермической атмосфере // Неустойчивость и волновые явления в системе ионосферы-термосферы. - Горький: ИГиЛ АН СССР, 1989. С.26-40.
5. Голицын Г.С., Романова Н.Н., Чунчuzов Е.П. О генерации внутренних волн в атмосфере морским волнением // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1976. Т.12. № 6. С.669-773.
6. Голицын Г.С., Кляцкин В.И. Колебания в атмосфере, вызываемые движениями земной поверхности // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1967. Т.3. № 10. С.1044-1052.

Дата поступления статьи
22 мая 1990 г.