Министерство высшего и среднего специального образования
Р С Ф С Р

Горьковский ордена Трудового Красного Знамени
научно-исследовательский радиофизический институт (НИРФИ)

Препринт № 315

ОБ ОДНОМ ПРЕДЕЛЬНОМ СЛУЧАЕ ЭЙНШТЕЙНОВСКОЙ ГРАВИТАЦИИ

С.И.Чермянин

Горький 1990

Чермянин С.И.

ОБ ОДНОМ ПРЕДЕЛЬНОМ СЛУЧАЕ ЭЙНШТЕЙНОВСКОЙ ГРАВИТАЦИИ // Препринт № 315. - Горький: НИРФИ, 1990. - 6 с.

УДК 531.5

Показан нерелятивистский предельный переход ($\frac{1}{c} \rightarrow 0$) эйнштейновской гравитации, оставляющий силу гравитационного действия произвольной ($G \not\rightarrow 0$). На основе лагранжева формализма "предельная" структура может рассматриваться самостоятельно как замкнутая теоретическая система.

В теории гравитации Эйнштейна известно существование двух предельных переходов: ньютоновский предел ($G \to 0$, $\frac{1}{c} \to 0$) и предел слабого поля ($G \to 0$) /I-2/. Каждый из них формально образует теоретически замкнутую структуру, что имеет определенную ценность в изучении основных положений эйнштейновской теории.

С этой точки зрения представляет интерес рассмотрение еще одной "предельной" структуры, основанной на предельном переходе ($\frac{1}{c} \to 0$), где гравитационное поле не является слабым ($G \not\to 0$). Запишем уравнения Эйнштейна в форме

$$R_{\alpha}^{\beta} = \frac{8\pi G}{c^4}\left(T_{\alpha}^{\beta} - \frac{1}{2}\delta_{\alpha}^{\beta} T\right). \qquad (I)$$

Для нерелятивистского предельного перехода ($\frac{1}{c} \to 0$) в тензоре энергии-импульса T_{α}^{β} остается лишь компонента $T_0^0 = \mu c^2$. Из компонент метрического тензора $g_{\alpha\beta}$ сохраним только коэффициент $g_{00} = \frac{1}{g^{00}}$, для остальных потребуем замену $g_{ik} \to -\gamma_{ik}$, $g^{ik} \to -\gamma^{ik}$, $g_{0k} \to 0$, $g^{0k} \to 0$. Для величин $\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma}$ получаем

$$\Gamma_{00}^{k} \sim \frac{1}{2}\gamma^{ik}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^i}, \qquad \Gamma_{0k}^{0} = \Gamma_{k0}^{0} \sim \frac{1}{2}\frac{1}{g_{00}}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^k}, \qquad (2)$$

остальные величины имеют пренебрежимо малые значения.

Из системы (I), для наших целей, выбираем уравнение с $\alpha = \beta = 0$

$$R_0^0 = \frac{4\pi G}{c^2}\mu . \qquad (3)$$

Компонента R_0^0 в данном приближении примет компактную форму

$$R_0^0 \sim \frac{1}{\sqrt{g_{00}}} \eta^{ik} \frac{\partial^2 \sqrt{g_{00}}}{\partial x^i \partial x^k} . \tag{4}$$

Таким образом, уравнения Эйнштейна (I) в предельном случае ($\frac{1}{c} \to 0$) дают нелинейное уравнение

$$\frac{1}{\sqrt{g_{00}}} \eta^{ik} \frac{\partial^2 \sqrt{g_{00}}}{\partial x^i \partial x^k} = \frac{4\pi G}{c^2} \mu . \tag{5}$$

В случае слабого поля ($G \to 0$), полагая $g_{00} = I + 2\varphi/c^2$ и $2\varphi/c^2 \ll I$, получаем из (5) уравнение Пуассона

$$\eta^{ik} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^i \partial x^k} = 4\pi G \mu , \tag{6}$$

что соответствует ньютоновской гравитации.

Пространственная часть уравнения движения пробной частицы массы m

$$m \frac{d^2 x^k}{ds^2} + m \Gamma^k_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} = 0 \tag{7}$$

в рассматриваемом пределе, где собственное время частицы $\sqrt{g_{00}}\, dt = d\tau \sim \frac{ds}{c}$, перейдет в уравнение вида

$$m \frac{d^2 x^k}{d\tau^2} + \eta^{ik} mc^2 \frac{\partial}{\partial x^i} \ln \sqrt{g_{00}} = 0 . \tag{8}$$

Откуда гравитационная сила, действующая на частицу равна

$$f_i = - mc^2 \frac{\partial}{\partial x^i} \ln \sqrt{g_{00}} . \tag{9}$$

Предельные выражения (5), (9), полученные из основных уравнений эйнштейновской теории, могут рассматриваться самостоятельно в рамках замкнутой формальной системы. Для этого полагаем лаг -

ранжиан свободного гравитационного поля в форме

$$L_g = \eta^{ik} \frac{\partial\sqrt{g_{00}}}{\partial x^i} \frac{\partial\sqrt{g_{00}}}{\partial x^k} , \tag{10}$$

а функцию Лагранжа для частицы в таком поле выберем в виде

$$L = \frac{1}{2} m \eta_{ik} \frac{dx^i}{d\tau} \frac{dx^k}{d\tau} - mc^2 \ln\sqrt{g_{00}} . \tag{11}$$

Тогда уравнение геодезических (8) для пробной частицы вытекает из вариационного принципа $\delta \int_{\tau_1}^{\tau_2} L\, d\tau = 0$, а вариация гравитационного поля g_{00} приведет к уравнению (5). Поднятие и опускание индексов трехмерных тензорных величин здесь осуществляется за счет метрического тензора η_{ik} ($\eta_{ik} = \eta^{ik} = \delta^k_i$) евклидова пространства.

Для внешней задачи Шварцшильда уравнение (5) сводится к однородной форме

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial\sqrt{g_{00}}}{\partial r} \right) = 0 . \tag{12}$$

Откуда, используя ньютонов предел и граничное условие на бесконечности, получаем внешнее решение для сферически симметричного источника

$$d\tau = \left(1 - \frac{Gm}{c^2 r} \right) dt . \tag{13}$$

В отличие от эйнштейновских уравнений, которые неполны и значит для каждой физической задачи имеется множество равноправных решений /3/, здесь решение связано с гравитационным уравнением (5) однозначно.

В данном формализме геометрия пространства - времени пред -

ставляет собой обобщение галилеевой формы, что аналогично обобщению геометрии Минковского в общей теории относительности. Такое обстоятельство имеет самостоятельный интерес и может быть полезным для изучения некоторых трудных и пока нерешенных вопросов эйнштейновской гравитации в рамках более простой "галилеевой" структуры.

Автор выражает благодарность В.С.Троицкому за полезное обсуждение результатов работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Толмен Р. Относительность, термодинамика и космология. - М. : Наука, 1974.
2. Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж. Гравитация: - М.: Мир, 1977.- - Т.2.
3. Чермянин С.И. УФН. - 1990. - Т.160. - Вып.5. - С.127.

Дата поступления статьи
19 октября 1990 г.