ГОСУДАРСТВЕННЫЙ КОМИТЕТ РСФСР ПО ДЕЛАМ НАУКИ И ВЫСШЕЙ ШКОЛЫ

Ордена Трудового Красного Знамени
научно-исследовательский радиофизический институт (НИРФИ)

Препринт № 328

МЕТОД ДИСПЕРСИОННЫХ СООТНОШЕНИЙ ДЛЯ СРЕДНЕЙ КОНЦЕНТРАЦИИ В ТЕОРИИ ТУРБУЛЕНТНОЙ ДИФФУЗИИ ПАССИВНОЙ ПРИМЕСИ

В.П.Докучаев

Нижний Новгород 1991

Докучаев В. П.

МЕТОД ДИСПЕРСИОННЫХ СООТНОШЕНИЙ ДЛЯ СРЕДНЕЙ КОНЦЕНТРАЦИИ В ТЕОРИИ ТУРБУЛЕНТНОЙ ДИФФУЗИИ ПАССИВНОЙ ПРИМЕСИ // Препринт № 328. – Нижний Новгород: НИРФИ, 1991. – с.

УДК 532.517

В работе рассмотрен вопрос об эволюции средней концентрации пассивной примеси в потоке под действием молекулярной и турбулентной диффузии. Предложен метод дисперсионных соотношений для анализа динамики пассивной примеси. Введены некоторые эффективные коэффициенты турбулентной диффузии, учитывающие совместное действие молекулярной и турбулентной диффузии. Показано, что в несжимаемой жидкости в приближении "замороженной" турбулентности коэффициент турбулентной диффузии вдоль средней скорости потока в два раза превосходит по величине коэффициент диффузии в поперечном к потоку сечении. Проведен качественный анализ эффективных коэффициентов турбулентной диффузии и рассмотрен конкретный пример решения уравнения для средней концентрации пассивной примеси в турбулентном потоке.

DOKUCHAEV V.P.

THE METHOD OF DISPERSION RELATIONS FOR MEAN CONCENTRATION OF PASSIVE PARTICLES IN THE TURBULENT DIFFUSION THEORY // Preprint N 328. - Nizhnij Novgorod: NIRFI. 1991. - 27 p.

A theory of passive particle mean concentration under the action of turbulent diffusion is developed which is based on the method of dispersion relations for dissipative waves. This theory leads to two effective coefficients of eddy diffusion - longitudinal and transversal to the mean velocity of the stream. It is shown that these coefficients associated with longitudinal and transversal correlation functions of the stochastic speed field of the turbulent pulsation in statistically homogeneous and isotropic streams Some particular cases of the dispersion equations are analysed for turbulent diffusion and its coefficients. Based on the theory derived the anisotropic diffusion of passive particles is considered with initial distribution in the form of isotropic Gaussian cloud.

I. ВВЕДЕНИЕ

Процессы переноса тепла и концентрации примесей в жидкостях,газах и в ионизованной плазме происходят двумя совершенно различными механизмами. Во-первых, при наличии градиентов температуры, концентрации или векторного поля скорости имеют место процессы переноса на молекулярном уровне – молекулярная теплопроводность, обычная и амбиполярная диффузия вещества, выравнивание поля скоростей за счет вязкости /I-4/. Во-вторых, ламинарные и турбулентные движения в перечисленных средах также ведут к перераспределению температуры и концентрации. В этом случае говорят о процессе конвективного переноса в средах. Здесь основное внимание будет уделено количественному анализу совместного действия молекулярной и турбулентной конвективной диффузии на эволюцию средней концентрации пассивной примеси в сплошных средах.

Интерес к указанной проблеме обусловлен тем, что в атмосфере Земли и в океане, постоянно присутствуют течения – ветры, струи, потоки. При этом ламинарное движение в форме спокойных упорядоченных слоистых течений представляет собой скорее исключение. Как правило, значительные объемы газов и жидкостей в течение длительного времени подтверждены беспорядочным неустановившимся и нерегулярным перемещением с хаотически меняющимися скоростями. Такая форма движений газов, жидкостей и плазмы получила общее название турбулентного движения. Оно возникает при определенных условиях в результате неустойчивости либо слоистых ламинарных течений, либо градиентов температуры, концентрации и других гидродинамических полей. В первом случае неустойчивость течения возникает при достаточно больших числах Рейнольдса /I/.

Любое турбулентное движение в жидкостях и газах, как правило, состоит из некоторого осредненного регулярного движения и хаоти -

ческого нестационарного пульсационного движения. Иными словами, следуя Рейнольдсу, поле скоростей в сплошной среде можно представить в виде

$$\vec{v}(\vec{R},t) = \vec{V}_0(\vec{R},t) + \vec{u}(\vec{R},t) , \tag{I}$$

где $\vec{V}_0(\vec{R},t)$ - скорость ламинарного усредненного течения, $\vec{u}(\vec{R},t)$ - пульсационная скорость. В (I) использовано представление об усреднении по ансамблю турбулентных потоков и, следовательно,

$$\langle \vec{v}(\vec{R},t)\rangle = \vec{V}_0(\vec{R},t), \quad \langle \vec{u}(\vec{R},t)\rangle = 0 . \tag{2}$$

Следует еще раз подчеркнуть, что механизмы возникновения и поддержания на определенном уровне достаточно интенсивного турбулентного движения весьма разнообразны: неустойчивость струйных течений, градиентов температуры при тепловой конвекции, градиентов концентрации в ионизованной плазме. В связи с этим, ясно, что и статистические характеристики турбулентных движений различного происхождения сильно отличаются, в зависимости от механизма происхождения /I-6/.

Давно известно, что турбулентность способствует интенсивному перемешиванию различных примесей, гидро- и аэрозолей, присутствующих в жидкостях и газах. Действительно, простое механическое перемешивание красителя в растворе, влияние тепловой конвекции и макроскопических течений газа на дым из взвешенных частиц в закрытом помещении, все это приводит к ускоренному выравниванию концентрации примесей во всем объеме среды по сравнению с медленными процессами переноса на молекулярном уровне. В связи с этим существует до сих пор повышенный интерес к теоретическим и экспериментальным исследованиям турбулентной диффузии. Внимание к уазанной проблеме не ослабевает, так как она интересует специалистов по океанологии, метеорологии и физике верхней атмосферы /5, 7-9/. Особенно следует выделить широкий круг вопросов, связанных с турбулентной диффузией пассивных примесей в приземном и тропосферном слое атмосферы. Современные проблемы экологии, направленные на борьбу с загрязнением атмосферы, опираются на теорию молекулярных и турбулентных процессов переноса. По-прежнему актуальны проблемы турбулентной диффузии в приложениях к диффузии ионизованных метеорных следов и к образованию и распаду неоднородностей ионосферной плазмы /8-10/.

Первые работы по теории турбулентной диффузии были выполнены до создания известной математической модели локально однородной и изотропной турбулентности Колмогорова-Обухова. Действительно еще в работах Буссинеска и, особенно, Д.Тейлора /11/ был предложен и отчасти разработан простой механизм турбулентной диффузии. Он основан на том, что турбулентная диффузия обусловлена пульсационным хаотическим движением, которое переносит из слоя в слой, то есть сквозь линии тока осредненного движения, количество движения, тепло и примеси. Этот перенос до некоторой степени аналогичен атомно-молекулярным процессам переноса - вязкости, тепло- и массообмену, диффузии примесей, которые имеют место и при отсутствии макроскопических движений в среде. Заметим, что роль хаотического теплового движения атомов и молекул при молекулярном переносе играет хаотические пульсационные движения при турбулентном переносе. Отсюда ясно, что роль молекул отводится макроскопическим "жидким" частицам, под которыми, как обычно, следует понимать физические бесконечно малые объемы среды /1/. На основе этих представлений было разработано несколько полуэмпирических теорий турбулентной диффузии.

Следует подчеркнуть, что механизм турбулентного перемешивания одинаков как для переноса количества движения - турбулентной вязкости, так и для переноса тепла и концентрации примеси - соответственно, турбулентной теплопроводности и диффузии. Однако коэффициенты переноса разных величин могут отличаться постоянным множителем.

Так, из полуэмпирической теории турбулентной диффузии Буссинеска-Прандтля было получено следующее выражение для турбулентного коэффициента диффузии:

$$D_T = \langle u \ell \rangle, \tag{3}$$

где u - величина пульсационной скорости, ℓ - характерный масштаб пульсаций. Прандтль придал величине ℓ в формуле (3) смысл аналогичный длине свободного пробега молекул. Он считал, что, как и при молекулярном обмене, в процессе турбулентного обмена малый объем жидкости сохраняет некоторое количество движения и концентрации примеси при макроскопическом перемещении от одного слоя жидкости к другому и только после этого смешивается с окружающей средой. Расстояние между этими слоями ℓ Прандтль назвал путем смешения и вся полуэмпирическая теория получила название теории пути смешения. Максимальное значение коэффициента турбулентной диффузии можно оценить с помощью соотношения (3), представляя среднее значение скорости течения $u \approx V_0$ и характерный внешний масштаб турбулентного течения L. Таким образом

$$\max D_T \approx V_0 L . \tag{4}$$

Существенно подчеркнуть, что в реальных жидкостях и газах этот коэффициент значительно превосходит коэффициенты молекулярного переноса, которые по порядку величины попределяется формулой

$$D \sim c_s \lambda , \tag{5}$$

где c_s - средняя тепловая скорость молекул, λ - длина свободного пробега. Несмотря на то что в реальных средах, как правило, $V_0 < c_s$, практически всегда $L >> \lambda$ *).

Другое направление полуэмпирической теории турбулентной диффузии было предложено Тейлором /10/. Оно основано, главным образом,на лагранжевом описании движения частиц в турбулентном потоке. При лагранжевом описании сплошной среды координаты произвольной выделенной жидкои частицы определяются формулой

$$x_i(t) = \int_0^t V_i(t')\, dt' . \tag{6}$$

Значения координаты, полученные путем осреднения по многим частицам (по статистическому ансамблю), будут равны $\langle x_i \rangle = V_{0i}\, t$ в случае стационарной однородной турбулентности с постоянной средней скоростью V_{i0}. Для флуктуаций смещения

$$x_i(t)\, V_i(t) = x_i(t) \frac{dx_i}{dt} = \int_0^t V_i(t)\, V_i(t')\, dt' , \tag{7}$$

---

*) Исключения имеют место при режимах свободно-молекулярного обтекания тел, когда число Кнудсена $K_n = (\lambda / L) \gtrsim 1$ /11/.

после усреднения по ансамблю найдем

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\langle x_i^2(t)\rangle = \int_0^t \langle V_i(t)V_i(t')\rangle\, dt'. \qquad (8)$$

В случае стационарного изотропного турбулентного движения

$$\langle V_i(t)\, V_i(t')\rangle = \langle V_i^2\rangle\, \mathcal{K}(\tau)\,, \qquad (9)$$

где $\tau = t - t'$, $\mathcal{K}(\tau) = \mathcal{K}(-\tau)$. Предположим, что корреляционная функция $\mathcal{K}(\tau)$ имеет интервал корреляции τ_Λ – (лагранжев интегральный масштаб времени) такой, что

$$\int_0^\infty \mathcal{K}(\tau) = \tau_\Lambda\,,$$

в этом случае из (8) и (9) сразу находим /4/

$$\langle x_i^2\rangle = 2\langle V_i^2\rangle\tau_\Lambda t\,,$$
$$\langle R^2\rangle = 6\langle V_i^2\rangle\tau_\Lambda t\,. \qquad (10)$$

Это соотношение вполне аналогично закону Эйнштейна для смещения броуновских частиц в среде с коэффициентом диффузии $D = V^2\tau$. Сопоставляя (4) и (10), устанавливаем соответствие при условиях $\tau_\Lambda = \ell/V$, $\langle V^2\rangle = V_0^2$.

Более современные подходы к теории турбулентной диффузии основаны на эйлеровом описании различных полей в сплошных средах /1, 3, 13/. На основе эйлерова подхода ниже рассматривается совместное действие молекулярной и турбулентной диффузии на эволюцию пассивной примеси.

Для анализа совместного действия механизмов молекулярной и турбулентной диффузии на эволюцию пассивной примеси здесь использован метод среднего поля, который был в деталях разработан в применении к проблеме распространения волн в случайно-неоднородных средах /14–15/. Метод среднего поля основан на процедуре разделения флуктуи -

рующих гидродинамических полей на осредненную часть и флуктуационную, представляющую случайные отклонения этого поля в пространстве и во времени от его среднего значения. Указанный прием находится в полном соответствии с соотношениями (I), (2) и, по-видимому, впервые предложен Рейнольдсом для описания развитого турбулентного движения. Здесь будет проведено усреднение гидродинамических уравнений для пассивной примеси. В предположении малых флуктуаций концентрации удается получить замкнутую систему двух связанных уравнения для средней концентрации и для флуктуаций этой концентрации. При решении задачи об эволюции примеси в турбулентной среде оказывается удобным воспользоваться разложением гидродинамических полей по плоским волнам и получить дисперсионное соотношение для этих волн, которое содержит некоторый эффективный коэффициент турбулентной диффузии. Он зависит от конкретной модели турбулентных движений в среде. Этот коэффициент вполне аналогичен эффективному показателю преломления для волн, распространяющихся в случайно-неоднородной среде /I4-I7/.

2. ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ СРЕДНИХ И ФЛУКТУАЦИОННЫХ ПОЛЕЙ ПАССИВНОЙ ПРИМЕСИ

Как указано выше, мы будем рассматривать эволюцию в пространстве и во времени некоторой примеси химически инертных частиц, то есть не вступающих в химические реакции с молекулами окружающей среды. Приближение, в котором примесь можно рассматривать как пассивную в механическом смысле - это отсутствие влияния примеси на динамику среды. Ясно, что для реализации модели пассивной примеси необходимо, во-первых, чтобы ее частицы были малых размеров. Меньше всех характерных масштабов движущейся жидкости и, во-вторых, чтобы силы гравитации, архимедовы силы и силы Лоренца, в случае электрически заряженных частиц, не препятствовали движению примеси со скоростью окружающей среды. Пассивную примесь можно понимать и в более широком смысле: как часть жидкой или газообразной среды, обладающую некоторыми специальными свойствами, позволяющими следить за ее движением. В этом смысле распределение температуры в среде $T(\vec{R}, t)$ можно трактовать как пассивную примесь. Заметим, что если аэро- и гидрозоли обладают значительной плавучестью, то приближение пассивной примеси следует применять с большой осторожностью. Далее, сильно искажают турбулентную диффузию в реальных условиях дополнительные факторы конвекции при наличии температурных инверсий. Именно по указанным причинам бывает трудно объяснить в рамках модели пассивной примеси динамику рассеяния загрязняющих веществ в атмосфере Земли /7/.

Важным моментом является и то обстоятельство, что пассивная примесь должна описываться в рамках модели сплошной среды, то есть в единице объема среды должно содержаться сравнительно большое число частиц примеси.

В связи с этим ясно, что приближение пассивной примеси представляет значительный интерес как для физики океана и тропосферы, в которых постоянно присутствуют гидро- и аэрозоли, в частности, загрязняющие вещества, так и для нижней ионосферы (до высот примерно 120 км), в которой ионизованный газ можно описывать в приближении пассивной примеси относительно нейтрального газа /9/.

Для количественного описания изменения концентрации пассивной примеси под действием молекулярной диффузии в движущейся среде воспользуемся известным уравнением /3/:

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \operatorname{div}(N\vec{v}) = D\Delta N + Q(\vec{R},t). \tag{11}$$

Здесь $\vec{v}(\vec{R},t)$ - эйлерово поле скоростей движения сплошной среды, D - коэффициент молекулярной диффузии, $Q(\vec{R},t)$ - функция распределения источников примеси с размерностью числа частиц, образующихся (или исчезающих) в единице объема в единицу времени. В случае несжимаемой жидкости поле скорости является вихревым:

$$\operatorname{div}\vec{v} = 0. \tag{12}$$

Граничное условие для примеси на некоторой заданной поверхности S формулируется в виде

$$\alpha\frac{\partial N}{\partial n} + \beta N = f(t), \tag{13}$$

где α, β и f - некоторые известные функции координат и времени, n - нормаль к поверхности S. Многие задачи теории диффузии формулируются как задача Коши, то есть с начальным условием

$$N(\vec{R}, 0) = N_0(\vec{R}), \tag{I4}$$

где $N_0(\vec{R})$ – заданная функция координат.

В дальнейшем для сокращения записи будут использованы индексные обозначения для координат и компонент скорости

$$x, y, z \rightarrow x_1, x_2, x_3 \rightarrow x_\alpha ,$$

$$v_x, v_y, v_z \rightarrow v_1, v_2, v_3 \rightarrow v_\alpha , \quad \alpha = 1, 2, 3.$$

В этих обозначениях уравнения (II) и (I2) принимают более компакт – ную форму:

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \frac{\partial (N v_\alpha)}{\partial x_\alpha} = D \frac{\partial^2 N}{\partial x_\alpha^2} + Q , \tag{I5}$$

$$\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0 . \tag{I6}$$

Здесь по дважды встречающемуся (немому) индексу необходимо прово – дить суммирование. Уравнения (II) и (I5) в пренебрежении молекулярной диффузией, то есть в случае, когда $D = 0$ и $Q = 0$ и в среде имеет место только турбулентный процесс перемешивания начального распределения концентрации пассивной примеси (I4), подробно исследованы, например, в работах /3, I6/.

Воспользуемся методом среднего поля для получения приближенного решения задачи о диффузии пассивной примеси в турбулентном потоке . Как уже было указано во введении, этот метод был разработан и получил широкое применение в проблеме распространения волн в случайно – неоднородных средах /I4–I5/. Здесь этот метод распространен на задачи диффузии примесей в турбулентной среде. По-прежнему будем считать, что векторное поле скорости при турбулентном движении можно представить в виде (I), (2). Концентрацию пассивной примеси также представим в аналогичной записи:

$$N(\vec{R},t) = N_s(\vec{R},t) + n(\vec{R},t)\,, \tag{17}$$

$N_s(\vec{R},t)$ - среднее значение концентрации примеси, $n(\vec{R},t)$ - флуктуации концентрации, обусловленные случайными пульсациями скорости среды,

$$\langle N(\vec{R},t)\rangle = N_s(\vec{R},t), \qquad \langle n(\vec{R},t)\rangle = 0\,. \tag{18}$$

Функция распределения источников $Q(\vec{R},t)$ предполагается полностью детерминированной и, следовательно,

$$\langle Q(\vec{R},t)\rangle = Q(\vec{R},t)\,. \tag{19}$$

В дальнейшем будем предполагать, что $\vec{V}_0(\vec{R},t) = \vec{V}_0$, то есть средняя скорость не зависит от координат и времени. Это предположение выполняется в том случае, если интересоваться процессами эволюции концентрации $N_s(\vec{R},t)$, флуктуациями $n(\vec{R},t)$ и $\vec{u}(\vec{R},t)$ с масштабами меньше характерного масштаба среднего течения $\vec{V}_0(\vec{R})$.

Усредним уравнение (15) по ансамблю реализаций случайных полей (1), (2), (18):

$$\frac{\partial N_s}{\partial t} + V_{0\alpha}\frac{\partial N_s}{\partial x_\alpha} - D\frac{\partial^2 N_s}{\partial x_\alpha^2} = -\frac{\partial\langle n u_\alpha\rangle}{\partial x_\alpha} + Q(\vec{R},t) \tag{20}$$

и вычтем уравнение (20) из (15). После некоторой перегруппировки членов в результате получим

$$\frac{\partial n}{\partial t} + V_{0\alpha}\frac{\partial n}{\partial x_\alpha} - D\frac{\partial^2 n}{\partial x_\alpha^2} = -\frac{\partial(u_\alpha N_s)}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left[(n u_\alpha) - \langle n u_\alpha\rangle\right]. \tag{21}$$

Уравнение (21) значительно упростится при дополнительном предположении

$$N_s >> n. \tag{22}$$

В этом случае вместо (2I) имеем, что

$$\frac{\partial n}{\partial t} + V_{o\alpha}\frac{\partial n}{\partial x_\alpha} - D\frac{\partial^2 n}{\partial x_\alpha^2} = -\frac{\partial(u_\alpha N_s)}{\partial x_\alpha}. \tag{23}$$

Таким образом мы получили систему из двух связанных линейных уравнений (20) и (23) для двух искомых функций - средней концентрации $N_s(R, t)$ и флуктуаций концентрации $n(R, t)$, порожденных случайным полем скоростей $\vec{u}(R, t)$ с известными статистическими характеристиками. В случае несжимаемой среды поле скоростей $\vec{u}(R, t)$ является соленоидальным и в силу (I6) удовлетворяет дополнительному соотношению

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0. \tag{24}$$

Перейдем к решению системы уравнений (20), (23).

3. ДИСПЕРСИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ПРОЦЕССОВ МОЛЕКУЛЯРНОЙ И ТУРБУЛЕНТНОЙ ДИФФУЗИИ

Для решения уравнений (20) и (23) воспользуемся преобразованиями Фурье. Будем считать, что известные заданные функции $Q(\vec{R}, t)$ и $u_\alpha(\vec{R}, t)$, α = I, 2, 3 могут быть представлены в виде

$$Q(\vec{R},t) = \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} Q_f(\vec{K},\omega)\, e^{i\omega t + i(\vec{K},\vec{R})}\, d\vec{K}\, d\omega, \tag{25}$$

$$u_\alpha(\vec{R},t) = \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} u_{\alpha f}(\vec{K},\omega)\, e^{i\omega t + i(\vec{K},\vec{R})} \qquad , \tag{26}$$

$$(\vec{K}\vec{R}) = K_\alpha x_\alpha = K_1 x_1 + K_2 x_2 + K_3 x_3\,,$$

$$dK = dK_1\, dK_2\, dK_3\,.$$

Предположим, что искомые функции $N_S(\vec{R},t)$ и $n(\vec{R},t)$ также можно представить в аналогичном виде:

$$N_S(\vec{R},t) = \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} N_{Sf}(\vec{K},\omega)\, e^{i\omega t + i(\vec{K}\vec{R})}\, d\vec{K}\, d\omega\,, \tag{27}$$

$$n(\vec{R},t) = \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} n_f(\vec{K},\omega)\, e^{i\omega t + i(\vec{K}\vec{R})}\, d\vec{K}\, d\omega\,. \tag{28}$$

Использованные представления для функций (25)-(28) имеют соответствующие обратные преобразования. Например,

$$u_{\alpha f}(\vec{K},\omega) = \frac{1}{(2\pi)^4} \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} u_\alpha(\vec{R},t)\, e^{-i\omega t - i(\vec{K}\vec{R})}\, d\vec{R}\, dt\,, \tag{29}$$

где $d\vec{R} = dx_1\, dx_2\, dx_3$. В соотношениях (25)-(29) функции со знаком f : $N_{Sf}(\vec{K},\omega)$, $\theta_f(\vec{K},\omega)$, $n_f(\vec{K},\omega)$ и т.д. - это пространственно-временные спектральные плотности соответствующих полей.

Применим преобразования (25)-(29) к уравнениям (20), (23) и (24). При этом воспользуемся теоремой Парсеваля для интегралов типа свертки, то есть преобразование Фурье произведения двух функций $g(\vec{R},t)$ и $d(\vec{R},t)$ представим через интеграл от произведения их спектров:

$$\frac{1}{(2\pi)^4} \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} g(\vec{R},t)\, d(\vec{R},t)\, e^{-i\omega t - i(\vec{K}\vec{R})}\, d\vec{R}\, dt \;= \tag{30}$$

$$= \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} g_f(\vec{K}_1,\omega_1)\, d_f(\vec{K}-\vec{K}_1,\omega-\omega_1)\, d\vec{K}_1 d\omega_1 .$$

В результате из (20), (23) и (24) получим следующие соотношения для спектральных плотностей:

$$\left[i(\omega+\vec{K}\vec{V})+DK^2\right] N_{sf}(\vec{K},\omega)+$$

$$+iK_\alpha \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \langle u_{\alpha f}(\vec{K}-\vec{K}_1,\omega-\omega_1)\, n_f(\vec{K}_1,\omega_1)\rangle\, d\vec{K}_1 d\omega_1 = Q_f(\vec{K},\omega), \quad (31)$$

$$\left[i(\omega+\vec{K}V)+DK^2\right] n_f(\vec{K},\omega)=$$

$$=-iK_\beta \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} u_{\beta f}(\vec{K}-\vec{K}_2,\omega-\omega_2)\, N_{sf}(\vec{K}_2,\omega_2)\, d\vec{K}_2\, d\omega_2 , \quad (32)$$

$$K_\alpha u_{\alpha f}(\vec{K},\omega) = K_\beta u_{\beta f}(\vec{K},\omega) = 0 . \quad (33)$$

Будем считать поле пульсационных скоростей $\vec{u}(\vec{R},t)$ статистически стационарным и однородным /3/. Это означает, что двухточечные функции корреляции или в соответствии с (I), (2) центральные пространственно-временные моменты всех компонент пульсационной скорости зависят только от разности координат и разности времени:

$$\langle u_\alpha(\vec{R}_1,t_1)\, u_\beta(\vec{R}_2,t_2)\rangle = B_{\alpha\beta}(\vec{R}_1-\vec{R}_2,\, t_1-t_2) , \quad (34)$$

$$B_{\alpha\beta}(\vec{\rho},\tau) = \langle u_\alpha u_\beta\rangle\, \Gamma_{\alpha\beta}(\vec{\rho},\tau) . \quad (35)$$

Здесь $B_{\alpha\beta}$ – компоненты тензора-аффинора корреляции случайного поля скоростей, $\Gamma_{\alpha\beta}$ – компоненты тензор коэффициентов корреляции и в (35) использованы обозначения

$$\vec{\rho} = \vec{R}_1 - \vec{R}_2\,, \quad \tau = t_1 - t_2\,. \tag{36}$$

Известно, что для средних спектральных плотностей статистически стационарных и однородных полей выполняется соотношение

$$\langle u_{\alpha f}(\vec{K}_1,\omega_1) u_{\beta f}(\vec{K}_2,\omega_2)\rangle = F_{\alpha\beta}(\vec{K}_1,\omega_1)\delta(\omega_1+\omega_2)\delta(\vec{K}_1+\vec{K}_2). \tag{37}$$

В силу теоремы Винера-Хинчина компоненты тензоров $B_{\alpha\beta}$ в (34) и $F_{\alpha\beta}$ из (37) связаны преобразованиями Фурье:

$$F_{\alpha\beta}(\vec{K},\omega) = \frac{1}{(2\pi)^4}\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} B_{\alpha\beta}(\vec{\rho},\tau) e^{-i(\vec{K}\vec{\rho})-i\omega\tau} d\vec{\rho}\, d\tau\,, \tag{38}$$

$$B_{\alpha\beta}(\vec{\rho},\tau) = \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} F_{\alpha\beta}(\vec{K},\omega) e^{i(\vec{K}\vec{\rho})+i\omega\tau} d\vec{K}\, d\omega\,. \tag{39}$$

Из соотношения (32) находим, что

$$n_f(\vec{K}_1,\omega_1) = -iK_{1\beta}\iint\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{u_{\beta f}(\vec{K}_1-\vec{K}_2,\omega_1-\omega_2)N_{sf}(\vec{K}_2,\omega_2)d\vec{K}_2\, d\omega_2}{i(\omega_1+\vec{K}_1\vec{V}) + D K_1^2}\,. \tag{40}$$

Подставим (40) в соотношение (31) и рассмотрим интеграл:

$$\iint\limits_{-\infty}^{+\infty}\langle u_{\alpha f}(\vec{K}-\vec{K}_1,\omega-\omega_1)n_f(\vec{K}_1,\omega_1)\rangle d\vec{K}_1\, d\omega_1 =$$

$$= -\iiiint\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{iK_{1\beta}\langle u_{\alpha f}(\vec{K}-\vec{K}_1,\omega-\omega_1)u_{\beta f}(\vec{K}-\vec{K}_2,\omega_1-\omega_2)\rangle N_{sf}(\vec{K}_2,\omega_2)}{i(\omega_1+\vec{K}_1\vec{V})+DK_1^2}\times \tag{41}$$

$$\times\, d\vec{K}_1\, d\vec{K}_2\, d\omega_1\, d\omega_2 .$$

Далее, пользуясь δ-корреляцией спектральных компонент скорости (37), найдем

$$\iint\limits_{-\infty}^{+\infty}\langle u_{\alpha f} n_f\rangle d\vec{K}_1 d\omega_1 = -iN_{sf}(\vec{K},\omega)\iint\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{K_{1\beta}F_{\alpha\beta}(\vec{K}-\vec{K}_1,\omega-\omega_1)d\vec{K}_1 d\omega_1}{i(\omega_1+\vec{K}_1\vec{V})+DK_1^2} \tag{42}$$

Таким образом из соотношений (31) и (42) следует, что

$$\left[i(\omega+\vec{K}\vec{V})+DK^2+K_\alpha\iint\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{æ_\beta F_{\alpha\beta}(\vec{K}-\vec{æ},\omega-\Omega)d\vec{æ}d\Omega}{i(\Omega+\vec{æ}\vec{V})+Dæ^2}\right]N_{sf}=Q_f . \tag{43}$$

По аналогии с дисперсионными соотношениями для среднего поля в теории рассеяния волн в турбулентной среде, когда вводятся эффективные показатели преломления и эффективная диэлектрическая проницаемость /12-15/, здесь удобно ввести эффективный коэффициент диффузии пассивной примеси:

$$D_{ef} = D + \frac{K_\alpha}{K^2}\iint\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{æ_\beta F_{\alpha\beta}(\vec{K}-\vec{æ},\omega-\Omega)d\vec{æ}\, d\Omega}{i(\Omega+\vec{æ}\vec{V})+Dæ^2} . \tag{44}$$

При этом уравнение (43) запишется в более компактной форме:

$$\left[i(\omega+\vec{k}\vec{V})+k^2 D_{ef}(\vec{k},\omega)\right] N_{sf} = Q_f(\vec{k},\omega) . \qquad (45)$$

Из соотношений (27) и (45) окончательно получис следующее интегральное решение задачи о средней концентрации пассивной примеси в случайно-неоднородной и нестационарной среде:

$$N_s(\vec{R},t) = \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{Q_f(\vec{k},\omega)\, e^{i\omega t + i(\vec{k}\vec{R})}}{i(\omega+k_\alpha V_\alpha)+k^2 D_{ef}(\omega,\vec{k})}\, d\omega\, d\vec{k} . \qquad (46)$$

Здесь уместно также отметить связь приближения среднего поля в теории турбулентной диффузии с приближением Бурре, разработанным на основе диаграммной техники для волновых процессов в случайно-неоднородной среде /I5/.

Формула (46) вполне аналогична соответствующему соотношению для среднего поля точечного источника монохроматических волн, помещенного в случайно-неоднородную среду, в которой флуктуирует в пространстве диэлектрическая проницаемость /I4, I5/, В случае волн в интегральном соотношении для среднего поля фигурирует некоторая эффективная диэлектрическая постоянная /I4/

$$\Phi(\vec{R},t) = e^{i\omega t} \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{Q_f(k)\, e^{i(\vec{k}\vec{R})}}{k^2 - k_0^2\, \varepsilon_{ef}(\vec{k},\omega)}\, d\vec{k} ,$$

где $k_0 = \omega / c$ - волновое число в однородной среде, ε_{ef} - эффективная диэлектрическая проницаемость. По аналогии с волнами в случае турбулентной диффузии можно говорить о пространственно-временной дисперсии процесса диффузии и ввести $D_{ef}(\vec{k},\omega)$.

4. АНАЛИЗ ДИСПЕРСИОННОГО УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ТУРБУЛЕНТНОЙ ДИФФУЗИИ ПАССИВНОЙ ПРИМЕСИ

Дисперсионное соотношение, описывающее совместное действие молекулярной и турбулентной диффузии на эволюцию средней концентрации пассивной примеси, получается из соотношений (43), (45) при $Q = 0$ путем приравнивания нулю выражения в квадратных скобках:

$$i(\omega+\vec{K}\vec{V})+DK_\alpha^2+K_\alpha \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{æ}_\beta F_{\alpha\beta}(\vec{K}-\vec{\text{æ}}, \omega-\Omega)\, d\vec{\text{æ}}\, d\Omega}{i(\Omega+\vec{\text{æ}}\vec{V})+D\text{æ}_\alpha^2} = 0 . \quad (47)$$

Уравнение (47) определяет также полюсы подынтегрального выражения в (46). Оно описывает связь частоты ω и волнового числа $\vec{K}$ для элементарного возмущения в виде плоской волны $\exp\left[i(\omega t + \vec{K}\vec{R}\ )\right]$. Сумма этих возмущений с определенной связью $\omega = \omega(\vec{K})$ и дает среднюю концентрацию примеси в соответствии с формулой (46).

До сих пор предполагалось, что поле скоростей пульсации статистически однородно и стационарно, то есть

$$B_{\alpha\beta}(\vec{\rho}, \tau) \qquad \text{и} \qquad F_{\alpha\beta}(\vec{K}, \omega). \quad (48)$$

Предположим также, что поле скоростей $\vec{u}(\vec{R}, t)$ статистически изотропно. Как известно, корреляционный тензор изотропного векторного поля $\vec{u}(\vec{R}, t)$ имеет вид /3/

$$B_{\alpha\beta}(\vec{\rho}, \tau) = \left[B_{LL}(\rho,\tau) - B_{NN}(\rho,\tau)\right] \frac{x_\alpha x_\beta}{\rho} + B_{NN}\,\delta_{\alpha\beta}, \quad (49)$$

где $\delta_{\alpha\beta}$ - единичный тензор, $\delta_{\alpha\beta} = 1$ при $\alpha = \beta$ и $\delta_{\alpha\beta} = 0$, если $\alpha \neq \beta$; x_α и x_β при $\alpha, \beta = 1, 2, 3$ - компоненты радиус-вектора $\vec{\rho}$ и $\rho = |\vec{\rho}|$. В соотношении (49) B_{LL} - среднее значение квадрата относительной скорости двух жидких частиц при радиальном сближении, B_{NN} - средний квадрат скорости вращательного движения одной частицы относительно другой. Таким образом, в случае статистически однородного и изотропного поля скоростей матрица корреляционного тензора в (48) полностью определяется двумя скалярными функциями. В исходном дисперсионном соотношении (47) фигурирует спектральное представление $F_{\alpha\beta}(\vec{k}, \omega)$ тензора корреляций $B_{\alpha\beta}$.

Для статистически изотропного поля

$$F_{\alpha\beta}(\vec{k},\omega)=\left[F_{LL}(k,\omega)-F_{NN}(k,\omega)\right]\frac{k_\alpha k_\beta}{k^2}+F_{NN}(k,\omega)\,\delta_{\alpha\beta}, \quad (50)$$

где $k = |\vec{k}|$, F_{LL} и F_{NN} – продольный и поперечный трехмерный спектр поля $\vec{u}(\vec{R}, t)$, индексы L и N здесь относятся к проекциям на направление вектора $\vec{k}$ и перпендикулярное к нему. Известно, что для того, чтобы тензор $B_{\alpha\beta}(\vec{\rho}, \tau)$ был корреляционным тензором изотропного векторного поля, необходимо и достаточно выполнение условий

$$F_{LL}(k,\omega) \geq 0, \qquad F_{NN}(k,\omega) \geq 0. \quad (51)$$

Связь спектров F_{LL} и F_{NN} с функциями B_{NN} и B_{LL} приведена в монографии /3/.

В дальнейшем мы будем пользоваться предположением о несжимаемых течениях жидкости, когда поле скоростей $\vec{u}(\vec{R}, t)$ является соленоидальным в силу условия несжимаемости (12), (24). Для соленоидального поля $F^{s}_{LL}(k, \omega) = 0$ и тензор $F^{s}_{\alpha\beta}$ в соответствии с (50) принимает вид

$$F^{s}_{\alpha\beta}(\vec{k},\omega) = F^{s}_{NN}(k,\omega)\left[\delta_{\alpha\beta} - \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2}\right], \quad (52)$$

то есть корреляционный тензор изотропного соленоидального поля определяется полностью только одной скалярной функцией. Иногда вместо F^{s}_{NN} удобно ввести спектр плотности

$$E^{s}(k,\omega) = 4\pi k^2 F^{s}_{NN}(k,\omega). \quad (53)$$

Здесь и в дальнейшем значок S указывает на соленоидальный характер рассматриваемого поля. Как следствие соотношения (52), для соленоидального поля устанавливаем, что

$$k_\alpha F^{s}_{\alpha\beta} = k_\beta F^{s}_{\alpha\beta} = 0. \quad (54)$$

В этом случае из (47) получаем

$$i(\omega+\vec{K}\vec{V})+DK^2+K_\alpha K_\beta \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{F^s_{\alpha\beta}(\vec{K}-\vec{\varkappa},\omega-\Omega)d\vec{\varkappa}d\Omega}{i(\Omega+\vec{\varkappa}\vec{V})+D\varkappa^2}=0. \qquad (55)$$

Из формул (44), (47) и (55) ясно, что процесс турбулентной диффузии и эффективный коэффициент D_{ef} определяются пространственно-временным спектром тензора корреляции поля скоростей с компонентами $F_{\alpha\beta}$, скоростью переноса $\vec{V}$ и коэффициентом молекулярной диффузии D.

Преобразуем интеграл в (55), воспользовавшись для компонент $F^s_{\alpha\beta}(K,\omega)$ представлением (38):

$$i(\omega+\vec{K}\vec{V})+DK^2+\frac{K_\alpha K_\beta}{(2\pi)^4}\times$$

$$\times\iiiint\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{B^s_{\alpha\beta}(\vec{\rho},\tau)\exp\left[i(\vec{\varkappa}-\vec{K})\vec{\rho}+i(\Omega-\omega)\tau\right]d\vec{\varkappa}d\vec{\rho}d\Omega d\tau}{i(\Omega+\vec{\varkappa}\vec{V})+D\varkappa^2}=0 \qquad (56)$$

С помощью теории вычетов проинтегрируем в (56) по Ω

$$i(\omega+\vec{K}\vec{V})+DK^2+\frac{K_\alpha K_\beta}{(2\pi)^3}\times$$

$$\times\iint\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{0}^{+\infty}B_{\alpha\beta}(\vec{\rho},\tau)\exp\left[-D\varkappa^2\tau+i\vec{\varkappa}(\vec{\rho}-\vec{V}\tau)-i\omega\tau-i\vec{K}\vec{\rho}\right]d\vec{\varkappa}d\vec{\rho}d\tau=0 \qquad (57)$$

Дальнейшее вычисление удобно выполнить по $\vec{\varkappa}$:

$$i(\omega+\vec{K}\vec{V})+DK^2+$$

$$+K_\alpha K_\beta\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{B^s_{\alpha\beta}(\vec{\rho},\tau)}{(4\pi D\tau)^{3/2}}\exp\left[-\frac{(\vec{\rho}-\vec{V}\tau)^2}{4D\tau}-i\omega\tau-i\vec{K}\vec{\rho}\right]d\vec{\rho}\,d\tau=0. \qquad (58)$$

Из соотношений (47), (56)-(58) следует, что процесс турбулентной диффузии сложным образом зависит от скорости молекулярной диффузии.

Проведем качественный анализ подынтегральных выражений в (56), (58). Корреляционный тензор $B_{\alpha\beta}(\vec{\rho},\tau)$ в изотропном случае, по-

-видимому, содержит некоторый радиус корреляции $a_к$ с размерностью длины и время корреляции $\tau_к$. Если выполнены условия для диффузного числа Пекле

$$P_e = \frac{Va_к}{D} \gg 1, \quad a_к^2 \gg 4D\tau_к, \quad V^2 \gg \frac{D}{\tau_к}, \tag{59}$$

то, как показал более детальный анализ, в (57), (58) можно пренебречь под интегралом молекулярной диффузией, то есть положить $D = 0$. Таким образом, при выполнении условий (59) из (57), (58) получаем

$$i(\omega+\vec{k}\vec{V})+Dk^2+\frac{k_\alpha k_\beta}{(2\pi)^3}\iint\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_0^{+\infty} B^s_{\alpha\beta}(\vec{\rho},\tau)\, e^{i\vec{æ}(\vec{\rho}-\vec{V}\tau)}\, d\vec{æ}\, d\vec{\rho}\, d\tau = 0. \tag{60}$$

Интегрируя в (60) по $\vec{æ}$, находим, что

$$i(\omega+\vec{k}\vec{V})+Dk^2+ \\ +k_\alpha k_\beta \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_0^{+\infty} B^s_{\alpha\beta}(\vec{\rho},\tau)\,\delta(\vec{\rho}-\vec{V}\tau)\, e^{-i\omega\tau-i\vec{k}\vec{\rho}}\, d\vec{\rho}\, d\tau = 0. \tag{61}$$

В случае статистически однородного и изотропного поля скоростей матрица корреляционного тензора в (61) полностью определяется двумя скалярными функциями (49). Далее аргумент δ-функции в (61) содержит выделенное направление, определяемое вектором скорости среднего течения $\vec{V}$. В связи с этим выберем систему координат с осью z вдоль вектора $\vec{V}$, подставим (49) в (61) и выполним интегрирование по $\vec{\rho}$. Результат интегрирования удобно записать в форме

$$i(\omega+kV)+Dk^2+D_\parallel k_z^2+D_\perp(k_x^2+k_y^2) = 0, \tag{62}$$

где введены два эффективных коэффициента диффузии в турбулентном потоке:

$$D_\parallel = \int\limits_0^\infty B^s_{LL}(V\tau,\tau)\, e^{-i(\omega+k_zV)\tau}\, d\tau, \tag{63}$$

$$D_{\perp} = \int_0^{\infty} B^S_{NN}(V\tau,\tau) e^{-i(\omega+K_z V)\tau} d\tau \ . \tag{64}$$

Это означает, что в общем случае диффузия в турбулентном потоке описывается двумя различными коэффициентами, то есть является анизо - тропной.

Для полного количественного анализа соотношений (62)-(64) необходимо знать конкретный вид пространственно-временных функций кор - реляции B_{LL} и B_{NN}. В научной литературе приводятся только значения $B_{LL}(\rho, 0)$ и $B_{NN}(\rho, 0)$ на отдельных интервалах ρ - вязком и инерционном /I-4/. Поэтому здесь ограничимся, в основном, качественным анализом соотношений (63) и (64) для коэффициентов диффузии. Так, известно, что в больших интервалах времени и на значи - тельных расстояниях у реальных турбулентных течений временные и пространственные флуктуации скорости взаимосвязаны. В соответствии с гипотезой Тейлора $V \gg |\vec{u}|$ и средний поток сносит флуктуирующие параметры со скоростью $\vec{V}$. Это приводит к представлению о "замороженной турбулентности", для которой выполняется соотношение

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + V \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} \approx 0 \ . \tag{65}$$

Дополнительным аргументом в пользу этого приближения для оценки интегралов может служить представление о том, что $\omega \tau_K \ll I$ и $a_K K_z \ll I$.

Следовательно, в приближении "замороженной турбулентности" из (63), (64) имеем

$$D^S_{\parallel} = \int_0^{\infty} B^S_{LL}(V\tau)\, d\tau , \tag{66}$$

$$D^S_{\perp} = \int_0^{\infty} B^S_{NN}(V\tau,\tau)\, d\tau \ . \tag{67}$$

С другой стороны, для соленоидальных полей выполняется следую - щее соотношение /3/:

$$\int_0^{\infty} B^S_{LL}(\rho)\, d\rho =$$

$$= 2\int_0^{\infty} B^s_{NN}(\rho)\,d\rho = \frac{\pi}{2}\int_0^{\infty} \frac{E(\kappa)}{\kappa}\,d\kappa \,. \qquad (68)$$

Таким образом при условии $V \gg (a_\kappa / \tau_\kappa)$ из (66)-(68) устанавливаем, что

$$D^s_{\parallel} = 2D^s_{\perp} = \frac{\pi}{2}\int_0^{\infty} \frac{E(\kappa)}{\kappa}\,d\kappa \,. \qquad (69)$$

Следовательно, коэффициент турбулентной диффузии средней концентрации пассивной примеси вдоль потока в два раза превосходит коэффициент турбулентной диффузии в поперечном к потоку направлении.

Для полного анализа зависимости $D_{\parallel}$ и $D_{\perp}$ от свойств турбулентного течения необходимо знать корреляционные характеристики течения во всем интервале значений ρ и τ. В настоящее время сведения о них имеются только для вязкого и инерционного интервалов турбулентности. Качественный анализ $D_{\parallel}$ и $D_{\perp}$ позволяет оценить порядок величины этих коэффициентов: $D_{\parallel} \sim \langle u^2 \rangle T$, где в качестве характерного времени T следует выбрать меньшую из величин τ_κ и (a_κ / V).

Исходя из указанных представлений, дисперсионное уравнение для средней концентрации в турбулентном потоке (47) запишем в виде

$$i(\omega + \kappa_z V) + D_{\parallel}\kappa_z^2 + D_{\perp}(\kappa_x^2 + \kappa_y^2). \qquad (70)$$

Здесь коэффициенты $D_{\parallel}$ и $D_{\perp}$ положительные действительные числа,

$$D_{\parallel} = D + D^s_{\parallel}, \qquad D_{\perp} = D + D^s_{\perp}\,. \qquad (71)$$

Легко восстановить соответствующее (70) дифференциальное уравнение, описывающее диффузию средней концентрации пассивной примеси в турбулентном потоке

$$\frac{\partial N_s}{\partial t} + V\frac{\partial N_s}{\partial z} = D_{\parallel}\frac{\partial^2 N_s}{\partial z^2} + D_{\perp}\left(\frac{\partial^2 N_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N_s}{\partial y^2}\right). \qquad (72)$$

Приведем решение уравнения (72) для одного простого частного случая начального распределения концентрации пассивной примеси.

Пусть при $t = 0$

$$N_s(\vec{R},0) = \frac{Q}{(\pi a^2)^{3/2}}\, e^{-\frac{R^2}{a^2}}, \tag{73}$$

где $R = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, Q – полное количество частиц пассивной примеси в гауссовом облаке (73) с радиусом a.

Решение уравнения (72) в этом случае имеет вид

$$N_s = \frac{Q}{(\pi a^2+4D_\perp t)\sqrt{\pi a^2+4D_\parallel t}} \exp\left[-\frac{(z-Vt)^2}{a^2+4D_\parallel t} - \frac{x^2+y^2}{a^2+4D_\perp t}\right]. \tag{74}$$

Из (74) видно, что уравнения поверхностей равной концентрации

$$\frac{(z-Vt)^2}{a^2+4D_\parallel t} + \frac{x^2+y^2}{a^2+4D_\perp t} = \mathrm{const} \tag{75}$$

представляют собой семейство эллипсоидов вращения с осью вдоль z скорости потока $\vec{V}_0$. Начиная с момента времени $t > (a^2/4D_\perp)$, отношение продольного размера эллипсоида к поперечному радиусу достигает в потоке турбулентной несжимаемой жидкости предельного значения $(\ell_\parallel/\ell_\perp) = (D_\perp^s / D_\parallel^s)^{1/2} = \sqrt{2} \approx 1{,}41$. Центр масс диффундирующего облака движется со скоростью V вдоль оси z.

В реальных условиях предположения о статистической однородности и изотропии турбулентных течений выполняются только локально, в некоторых ограниченных пространственно-временных интервалах /1-3/. В связи с этим средние пространственные масштабы $\ell_\parallel$, $\ell_\perp$ и характерные времена эволюции τ_ℓ облаков пассивной примеси должны быть значительно меньше внешнего масштаба течения L и соответствующего ему интервала времени $\tau \sim L/V$.

Здесь уместно пояснить механизм происхождения анизотропии процесса диффузии в турбулентном потоке. Тензор корреляций изотропного случайного поля скоростей (49), который существенно влияет на процесс турбулентной диффузии, не является изотропным, вследствие различия в корреляциях "сближения" жидких частиц и их вращения $B_{NN} \neq$ $\neq B_{LL}$. Однако эта анизотропия, по существу, только кажущаяся, или скрытая, так как в изотропном поле скоростей любое направление вектора $\vec{\rho}$, от которого зависят компоненты тензора $B_{\alpha\beta}$, не являются выделенными. Эта скрытая анизотропия проявляется при условиях (59), когда можно пренебречь влиянием молекулярной диффузии на процесс переноса примеси турбулентным потоком. Только в этом случае проявляется наличие выделенного направления, обусловленного средне-го скоростью $\vec{V}_0$, и в соотношении (61) аргумент δ-функции $\vec{\rho}$ - $\vec{V}_0 t$ ясно указывает на эту причину анизотропии турбулентной диффузии. В турбулентном течении принято воодить продольный и поперечный интегральные масштабы неоднородностей с помощью следующих соотношений /3/:

$$\ell_{LL} = \frac{1}{B_{LL}(0)} \int_0^{\infty} B_{LL}(\rho)\, d\rho ,$$

$$\ell_{NN} = \frac{1}{B_{NN}(0)} \int_0^{\infty} B_{NN}(\rho)\, d\rho ,$$

$$B_{LL}(0) = B_{NN}(0) = \frac{1}{3} \langle \vec{u}^2 \rangle$$

и в случае несжимаемых течений, когда выполняются соотношения (68), $\ell_{LL} = 2\,\ell_{NN}$.

В заключение отметим, что если отказаться от гипотезы Тейлора о "замороженной турбулентности" (65), то эффективные коэффициенты $D_{\parallel}$ и $D_{\perp}$ в (63), (64) будут некоторыми функциями частоты ω и волнового числа K_z. Ясно, что в этом случае вместо уравнения (72), будет иметь место более сложное уравнение турбулентной диффузии. Однако для анализа этих вопросов следует иметь более детальные знания о корреляционных функциях в турбулентных потоках.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика сплошных сред. – М.: Гостехиздат, 1953.
2. Левич В.Г. Физико-химическая гидродинамика. – М.: Гостехиздат 1959.
3. Монин А.С., Яглом А.М. Статистическая гидродинамика. – М.: Наука, ч.I, 1965; ч.II, 1967.
4. Турбулентность /Под ред.У.Фроста и Т.Моулдена. – М.: Мир, 1980.
5. Голицын Г.С. Исследование конвекции с геофизическими приложениями и аналогиями. – Л.: Гидрометеоиздат, 1980.
6. Цытович В.Н. Теория турбулентной плазмы. – М.: Госатомиздат, 1971.
7. Скорер Р. Аэрогидродинамика окружающей среды. – М.: Мир, 1980.
8. Беликович В.В., Бенедиктов Е.А., Иткина М.А., Митяков Н.А., Терина Г.И., Толмачева А.В., Шавин П.Б. Рассеяние радиоволн на периодических искусственных неоднородностях ионосферы//Изв.вузов – Радиофизика. – 1977. – Т.20, № 12. – С.1821-1826.
9. Hocking W.K. Turbulence in the region 80-120 km.// Adv.Space Res.- 1987.- v.7, n.10, p. 171-181.
10. Докучаев В.П. Диффузия в метеорных следах //Изв.вузов – Радиофизика. – 1960. – Т.3, № 1. – С.50 - 56.
11. Taylor.// Diffusion by continuous movements.Proceeding London. Math.Soc.- 1921.-v.20, N2,- p. 196-211.
12. Коган М.Н. Динамика разреженного газа. – М.: Наука, 1967.
13. Гершман Б.Н., Рыжов Ю.А. О турбулентном расплывании искусственных периодических неоднородностях в нижней ионосфере //Изв.вузов – Радиофизика. – 1983. – Т.26, № 10. – С.1210-1213.
14. Басс Ф.Г., Канер Э.А.//Изв.вузов – Радиофизика. – 1959. – Т.2, № 5. – С.827-829; № 6. – С.1015 - 1016.
15. Рыжов Ю.А., Тамойкин В.В.//Изв.вузов – Радиофизика, 1970, Т.13, № 3. – С.356-387.
16. Докучаев В.П., Рыжов Ю.А., Тамойкин В.В. Излучение диполя в хао-

тически неоднородной среде//Изв.вузов - Радиофизика. - 1969 , Т.12, № 10. - С.1512 - 1515.

17. Рытов С.М., Кравцов Ю.А., Татарский В.И. Введение в статистическую радиофизику. Ч.II. Случайные поля. - М.: Наука, 1978. - С.406.

Дата поступления статьи
15 мая 1991 года