ГОСУДАРСТВЕННЫЙ КОМИТЕТ РСФСР ПО ДЕЛАМ НАУКИ И ВЫСШЕЙ ШКОЛЫ

Ордена Трудового Красного Знамени
научно-исследовательский радиофизический институт (НИРФИ)

Препринт № 336

# ЭНЕРГИЯ УПРУГИХ ВОЛН, ВОЗБУЖДАЕМЫХ В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ НЕСТАЦИОНАРНЫМИ СИЛОВЫМИ ПОВЕРХНОСТНЫМИ ИСТОЧНИКАМИ

А.Л.Орлов
А.В.Разин

Нижний Новгород 1991

О р л о в  А. Л., Р а з и н  А. В.

ЭНЕРГИЯ УПРУГИХ ВОЛН, ВОЗБУЖДАЕМЫХ В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ НЕСТАЦИОНАРНЫМИ СИЛОВЫМИ ПОВЕРХНОСТНЫМИ ИСТОЧНИКАМИ // Препринт № 336. - Нижний Новгород: НИРФИ, 1991. - 27 с.

УДК 534.232; 621.891

Методом реакции излучения вычислены энергии продольных, поперечных (SV - и SH -поляризаций) и рэлеевских волн, возбуждаемых в однородном изотропном упругом полупространстве силовыми источниками, произвольным образом распределенными по его поверхности и во времени.

Вопросы генерации упругих волн распределенными силовыми источниками, действующими на поверхности твердого тела, представляют интерес для ряда приложений. К ним относятся, например, оценки вибраций, возникающих при работе различных механизмов, находящихся на упругом основании, а также проблемы формирования зондирующих сигналов в сейсморазведке и ультразвуковой дефектоскопии. Возбуждение упругих волн в полупространстве гармоническими силовыми источниками, распределенными по его поверхностин рассмотрено в работе /I/, где вычислены асимптотики волновых полей в дальней зоне, а также диаграммы направленности и мощности излучения продольных, поперечных ( SV - и SH -поляризаций) и рэлеевских волн.

Более важным, однако, является рассмотрение нестационарных источников, поскольку большинство реальных процессов, в результате которых излучаются упругие волны, ограничены во времени (подземные толчки при землетрясениях, импульсное звуковое зондирование твердых сред и материалов). Другим важным примером нестационарного источника является движение переменной нагрузки по границе упругой среды или перемещение тела по шероховатой поверхности. В последнем случае потери на излучение волн дают вклад в работу сил трения, поэтому расчет этого эффекта имеет существенное практическое значение /2, 3/.

Возбуждение упругих волн в полупространстве действующими на его поверхности сложными источниками, произвольно зависящими от времени, ранее, по-видимому, не рассматривалось. Частный случай осесимметричной перпендикулярной к границе упругой среды силы исследован в /4/.

В настоящей работе вычислены энергии продольных, поперечных ( SV- и SH-поляризаций) и рэлеевских волн, возбуждаемых в одно -

родном изотропном упругом полупространстве силовыми источниками, произвольным образом распределенными по его поверхности и во времени. В качестве примера рассмотрено возбуждение волн в полупространстве при движении над его поверхностью точечного объекта, который взаимодействует посредством электромагнитных сил с некоторым элементом границы твердого тела. При этом данный элемент подвергается действию нестационарной нагрузки. Подобные модели источников упругих волн используются в теории трения при описании элементарного акта взаимодействия отдельной микронеровности поверхности твердого тела с движущейся по ней точечной нагрузкой – острием идеально жесткой тонкой иглы, называемой индентором /5/. Энергия излучения упругих волн, возбуждаемых движущимся индентором, дает оценку "снизу" для работы сил трения.

Пусть плоскость $z = 0$ декартовой системы координат совпадает с поверхностью однородного изотропного твердого тела, занимающего полупространство $z > 0$ и характеризуемого плотностью $\rho$ и параметрами Ламэ $\lambda$, $\mu$. Скорости продольной $c_\ell$ и поперечной $c_t$ волн выражаются через параметры упругости и плотность твердого тела формулами: $c_\ell = [(\lambda + 2\mu)/\rho]^{1/2}$, $c_t = (\mu/\rho)^{1/2}$ /6/.

При действии на единицу поверхности твердого тела силы $\vec{f}(x, y, t)$, где $t$ – время, малые смещения в нем описываются уравнением Ламэ /6, 7/.

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} - (\lambda + \mu)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\vec{u} - \mu \Delta \vec{u} = 0 \qquad (1)$$

с граничными условиями при $z = 0$

$$\sigma_{xz} = -f_x(x,y,t), \quad \sigma_{yz} = -f_y(x,y,t), \quad \sigma_{zz} = -f_z(x,y,t). \qquad (2)$$

В (2) $\sigma_{ij}$ – тензор напряжений.

Возмущения в твердом теле будем описывать с помощью скалярного $\psi$ и векторного $\vec{A}$ потенциалов таких, что смещения определяются выражениями:

$$\vec{u} = \mathrm{grad}\,\psi + \mathrm{rot}\,\vec{A}, \qquad \mathrm{div}\,\vec{A} = 0 \qquad (3)$$

Для потенциалов можно получить из (I) волновые уравнения

$$\Delta\psi-\frac{1}{c_\ell^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=0,\qquad \Delta\vec{A}-\frac{1}{c_t^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=0, \tag{4}$$

которые необходимо решать совместно с граничными условиями (2) и условиями излучения при $z\to\infty$.

При наличии в среде плоских границ поперечную волну с произвольным направлением вектора смещений удобно представить в виде суммы волны, в которой вектор смещений параллелен границе ( SH - волны), и волны, в которой вектор смещений имеет перпендикулярную к границе составляющую (SV-волна) /8/. В соответствии с этим векторный потенциал запишем в виде суммы $\vec{A}=\vec{A}_{SV}+\vec{A}_{SH}$.

Для решения краевой задачи (4), (2) воспользуемся преобразованиями Фурье. Введем интегральное представление вектора силы $\vec{f}$ :

$$\vec{f}(\vec{r},t)=\iiint\limits_{-\infty}^{+\infty}\vec{F}(\vec{k},\omega)\,e^{-i\omega t+i\vec{k}\vec{r}}\,d\omega\,d\vec{k} \tag{5}$$

с формулой обращения

$$\vec{F}(\vec{k},\omega)=\frac{1}{(2\pi)^3}\iiint\limits_{-\infty}^{+\infty}\vec{f}(\vec{r},t)\,e^{i\omega t-i\vec{k}\vec{r}}\,dt\,d\vec{r}\,. \tag{6}$$

В (5), (6) $\vec{F}(\vec{k},\omega)$ - пространственно-частотный спектр функции $\vec{f}(\vec{r},t)$, $\vec{r}=(x,y)$ - двумерный вектор, а $\vec{k}=(k_x,k_y)$ - двумерный волновой вектор в плоскости ( $x$ , $y$ ), $\vec{k}\vec{r}=k_x x+k_y y$, $d\vec{k}=dk_x dk_y$, $d\vec{r}=dx\,dy$ . Решение уравнений (4) с граничными условиями (2) имеет следующий интегральный вид /9/:

$$\psi=\frac{1}{\mu}\iiint\limits_{-\infty}^{+}\frac{2\varkappa_t\vec{k}\vec{F}+(k_t^2-2k^2)F_z}{R(k,\omega)}\times$$
$$\times\exp\left[-i\omega t+i(\vec{k}\vec{r}+\varkappa_\ell z)\right]d\omega\,d\vec{k}\;; \tag{7}$$

$$\vec{A}_{SV} = \frac{1}{\mu} \iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\kappa_t^2 - 2\kappa^2)\vec{\kappa}\vec{F} - 2æ_\ell \kappa^2 F_z}{R(\kappa,\omega)} \times$$

$$\times \exp\left[-i\omega t + i(\vec{\kappa}\vec{r} + æ_t z)\right] d\omega\, d\vec{\kappa}\ ; \tag{8}$$

$$\vec{A}_{SH} = \frac{1}{\rho} \iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(æ_t \vec{\kappa} - \kappa^2 \vec{e}_z)(\kappa_x F_y - \kappa_y F_x)}{\omega^2 æ_t\, \kappa^2} \times$$

$$\times \exp\left[-i\omega t + i(\kappa r + æ_t z)\right] d\omega\, d\kappa\ , \tag{9}$$

где $æ_{\ell,t} = (\kappa_{\ell,t}^2 - \kappa^2)^{1/2}$, $\kappa_{\ell,t} = \omega / C_{\ell,t}$ – волновые числа продольной и поперечной волн на частоте $\omega$, $\kappa = |\vec{\kappa}|$, $\vec{\kappa}\vec{F} = \kappa_x F_x + \kappa_y F_y$, $\vec{\kappa} \times \vec{e}_z = \kappa_y \vec{e}_x - \kappa_x \vec{e}_y$, $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$ – орты координатных осей,

$$R(\kappa,\omega) = (\kappa_t^2 - 2\kappa^2) + 4\kappa^2 æ_\ell æ_t\,.$$

Для сходимости интегралов (7)-(9) при $z \to \infty$ необходимо определить аналитические функции $æ_\ell$ и $æ_t$ на комплексной плоскости $\kappa$ следующим образом

$$(\kappa_{\ell,t}^2 - \kappa^2)^{1/2} = i\left|(\kappa^2 - \kappa_{\ell,t}^2)^{1/2}\right| \quad \text{при} \quad \kappa > \frac{|\omega|}{C_{\ell,t}}\,.$$

Вводя в среду малое затухание можно показать, что контур интегрирования по $\omega$ должен проходить в области $\operatorname{Im}\omega > 0$.

Для распределенного поверхностного источника, действие которого ограничено во времени, энергия излучения упругих волн дается выражением (см., например, /I0/):

$$E = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dt \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \vec{f}(\vec{r},t)\dot{\vec{u}}(\vec{r},t)\, d\vec{r} \tag{I0}$$

(точка над символом $\vec{u}$ означает дифференцирование по времени).

Записывая величины $\vec{f}$ и $\dot{\vec{u}}$ в виде разложений в интеграл Фурье, преобразуем формулу (10) к виду:

$$E = 8\pi^3 \iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} \vec{F}^*(\vec{K},\omega)\dot{\vec{U}}(\vec{K},\omega)\,d\omega\,d\vec{K}\,, \tag{11}$$

где

$$\dot{\vec{U}}(\vec{K},\omega)=\frac{1}{(2\pi)^3}\iiint\limits_{-\infty}^{+\infty}\dot{\vec{u}}(\vec{r},t)\,e^{i\omega t-i\vec{K}\vec{r}}\,d\vec{r}\,dt\,. \tag{12}$$

Отметим, что имеет место соотношение

$$\vec{F}^*(\vec{K},\omega)=\vec{F}(-\vec{K},-\omega). \tag{13}$$

Рассмотрим вначале энергию излучения поперечной SH-волны. Скорости смещений в этой волне при $z = 0$, как следует из (9), (3), даются выражениями

$$\left.\dot{u}_x^{(SH)}\right|_{z=0} = -\frac{1}{\rho}\iiint\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{K_y K_t^2(K_x F_y - K_y F_x)}{\omega\varkappa_t K^2}e^{-i\omega t+i\vec{K}\vec{r}}\,d\omega\,d\vec{K}\,, \tag{14}$$

$$\left.\dot{u}_y^{(SH)}\right|_{z=0} = \frac{1}{\rho}\iiint\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{K_x K_t^2(K_x F_y - K_y F_x)}{\omega\varkappa_t K^2}e^{-i\omega t+i\vec{K}\vec{r}}\,d\omega\,d\vec{K}\,. \tag{15}$$

Подставляя (14), (15) в (11) и переходя на плоскости $K_xOK_y$ к полярным координатам посредством формул $K_x = K\cos\varphi$, $K_y = K\sin\varphi$, получим следующее выражение для энергии SH-волны

$$E_{SH}=\frac{8\pi^3}{\rho c_t^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\omega d\omega\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\infty}\frac{F_\varphi F_\varphi^*}{\varkappa_t}\kappa d\kappa, \tag{16}$$

где $F_\varphi = F_y\cos\varphi - F_x\sin\varphi$ – азимутальная компонента спектра силы.

При исследовании интеграла (16) участки интегрирования $\omega > 0$ и $\omega < 0$ следует рассматривать отдельно. Анализ показывает, что при $\omega > 0$ конутр интегрирования по $\kappa$ проходит ниже оси $\mathrm{Re}\,\kappa$, причем квадратный корень $\sqrt{\kappa_t^2-\kappa^2}$ при $\kappa < \kappa_t$ определен как положительная величина. При $\omega < 0$ контур интегрирования по $\kappa$ проходит в области $\mathrm{Re}\,\kappa > 0$ и корень $\sqrt{\kappa_t^2-\kappa^2}$ определен как отрицательная величина. В области $\kappa > \kappa_t$ аналитическая функция $\sqrt{\kappa_t^2-\kappa^2}$ определена как мнимая единица, умноженная на положительное число как при $\omega < 0$, так и при $\omega > 0$.

В соответствии с этим перепишем формулу (16) в виде

$$E_{SH}=\int\limits_{-\infty}^{0}\omega d\omega\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\kappa_t}\frac{F_\varphi(\omega,\kappa\cos\varphi,\kappa\sin\varphi)F_\varphi(-\omega,-\kappa\cos\varphi,-\kappa\sin\varphi)}{-\sqrt{\kappa_t^2-\kappa^2}}\kappa d\kappa+$$

$$+\int\limits_{-\infty}^{0}\omega d\omega\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_{\kappa_t}^{\infty}\frac{F_\varphi(\omega,\kappa\cos\varphi,\kappa\sin\varphi)F_\varphi(-\omega,-\kappa\cos\varphi,-\kappa\sin\varphi)}{i\sqrt{\kappa^2-\kappa_t^2}}\kappa d\kappa+ \tag{17}$$

$$+\int\limits_0^{\infty}\omega d\omega\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\kappa_t}\frac{F_\varphi(\omega,\kappa\cos\varphi,\kappa\sin\varphi)F_\varphi(-\omega,-\kappa\cos\varphi,-\kappa\sin\varphi)}{\sqrt{\kappa_t^2-\kappa^2}}\kappa d\kappa+$$

$$+\int\limits_0^{\infty}\omega d\omega\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_{\kappa_t}^{\infty}\frac{F_\varphi(\omega,\kappa\cos\varphi,\kappa\sin\varphi)F_\varphi(-\omega,-\kappa\cos\varphi,-\kappa\sin\varphi)}{i\sqrt{\kappa^2-\kappa_t^2}}\kappa d\kappa.$$

В первом и втором интегралах, входящих в (I7), сделаем замену $\omega = -\omega'$. При этом следует учитывать, что пределы интегрирования по $K$ также меняют знак, т.к. $K_t = \omega / C_t$. Это приводит к необходимости замены переменной интегрирования $K$ на $K' = -K$. После несложных преобразований из (I7) получаем следующее выражение для энергии $SH$-волны:

$$E_{SH} = \frac{16\pi^3}{\rho c_t^2} \int_0^\infty \omega d\omega \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{K_t} \frac{\left|F_\varphi(\omega, K\cos\varphi, K\sin\varphi)\right|^2}{\sqrt{K_t^2 - K^2}} K dK. \quad (I8)$$

Путем замены переменной $K = K_t \sin\theta$ формулу (I8) можно привести к виду

$$E_{SH} = \frac{16\pi^3}{\rho c_t^3} \int_0^\infty \omega^2 d\omega \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \left|F_\varphi(\omega, K_t\sin\theta\cos\varphi, K_t\sin\theta\sin\varphi)\right|^2 \sin\theta d\theta \quad (I9)$$

Выражение (I9) можно также получить вычисляя поток энергии через поверхность полусферы, которая охватывает источник и имеет центром начало координат.

Перейдем к вычислению энергий излучения продольных ($P$), поперечных $SV$-поляризации и рэлеевских ($R$) волн. Из (7), (8), (3) следует, что суммарные смещения поверхности полупространства в этих волнах имеют вид

$$U_x\Big|_{z=0} = \frac{i}{\mu} \iiint_{-\infty}^{+\infty} \frac{K_x}{K^2 R(K,\omega)} \Big[K_t^2 \varkappa_t \vec{K}\vec{F} + K^2(K_t^2 - 2K^2 - \quad (20)$$

$$- 2\varkappa_\ell \varkappa_t) F_z\Big] e^{-i\omega t + i\vec{K}\vec{r}} d\omega\, d\vec{K};$$

$$U_y\Big|_{z=0} = \frac{i}{\mu}\iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{K_y}{K^2 R(K,\omega)}\Big[K_t^2 æ_t \vec{K}\vec{F} + K^2(K_t^2 - 2K^2 - \tag{21}$$

$$-2æ_\ell æ_t)F_z\Big] e^{-i\omega t + i\vec{K}\vec{r}}\, d\omega\, d\vec{K}\,;$$

$$U_z\Big|_{z=0} = \frac{i}{\mu}\iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{R(K,\omega)}\Big[-(K_t^2 - 2K^2 - 2æ_\ell æ_t)\vec{K}\vec{F} + \tag{22}$$

$$+ K_t^2\, æ_\ell F_z\Big] e^{-i\omega t + i\vec{K}\vec{r}}\, d\omega\, d\vec{K}\,.$$

Подставляя (20)–(22) в (II) и переходя на плоскости $K_x O K_y$ к полярным координатам получим следующее выражение для суммарной энергии P-, SV- и R-волн:

$$E = \frac{8\pi^3}{\mu}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\omega\, d\omega \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\infty} \frac{K}{R(K,\omega)}\Big[K_t^2 æ_t |F_r|^2 + \tag{23}$$

$$+ K_t^2 æ_\ell |F_z|^2 + K(K_t^2 - 2K^2 - 2æ_\ell æ_t)(F_z F_r^* - F_z^* F_r)\Big] K\, dK\,,$$

где $F_r = F_x \cos\varphi + F_y \sin\varphi$.

При $\omega > 0$ контур интегрирования по $K$ в (23) проходит ниже оси $\mathrm{Re}\, K$ и обходит определяемый из решения уравнения

$$R(K_R, \omega) = 0$$

рэлеевский полюс $K = K_R$ снизу, а при $\omega < 0$ путь интегрирования по $K$ лежит в области $\mathrm{Re}\, K > 0$ и обходит полюс $K = K_R$ сверху. Поэтому формулу (23) следует расписать в виде

$$E=\frac{8\pi^3}{\mu}\int\limits_{-\infty}^{0}\omega d\omega\int\limits_{0}^{2\pi}d\varphi\left\{\int\limits_{0}^{K_\ell}\frac{1}{R(K,\omega)}\left[-K_t^2\sqrt{K_t^2-K^2}\,|F_r|^2-\right.\right.$$

$$\left.-K_t^2\sqrt{K_\ell^2-K^2}\,|F_z|^2+K(K_t^2-2K^2-2\sqrt{K_\ell^2-K^2}\sqrt{K_t^2-K^2})(F_zF_r^*-F_z^*F_r)\right]KdK+$$

$$+\int\limits_{K_\ell}^{K_t}\frac{1}{(K_t^2-2K^2)^2-4K^2i\sqrt{K^2-K_\ell^2}\sqrt{K_t^2-K^2}}\left[-K_t^2\sqrt{K_t^2-K^2}\,|F_r|^2+\right.$$

$$\left.+iK_t^2\sqrt{K^2-K_\ell^2}\,|F_z|^2+K(K_t^2-2K^2+2i\sqrt{K^2-K_\ell^2}\sqrt{K_t^2-K^2}(F_zF_r^*-F_z^*F_r)\right)KdK+$$

$$+\int\limits_{K_t}^{\infty}\frac{1}{(K_t^2-2K^2)^2-4K^2\sqrt{K^2-K_\ell^2}\sqrt{K^2-K_t^2}}\left[iK_t^2\sqrt{K^2-K_t^2}\,|F_r|^2+\right.$$

$$\left.+iK_t^2\sqrt{K^2-K_\ell^2}\,|F_z|^2+K(K_t^2-2K^2+2\sqrt{K^2-K_\ell^2}\sqrt{K^2-K_t^2}\,(F_zF_r^*-F_z^*F_r)\right)KdK-$$

$$-\frac{\pi i K_R}{R'(K,\omega)}\left[iK_t^2\sqrt{K_R^2-K_t^2}\,|F_r|^2+iK_t^2\sqrt{K_R^2-K_\ell^2}\,|F_z|^2+\right.$$

$$+K_R\left(K_t^2-2K_R^2+2\sqrt{K_R^2-K_\ell^2}\sqrt{K_R^2-K_t^2}\left(F_zF_r^*-F_z^*F_r\right)\right]\Bigg\}+$$

$$+\frac{8\pi^3}{\mu}\int_0^\infty\omega\,d\omega\int_0^{2\pi}d\varphi\left\{\int_0^{K_\ell}\frac{1}{R(K,\omega)}\left[K_t^2\sqrt{K_t^2-K^2}\,|F_r|^2+\right.\right.$$

$$\left.+K_t^2\sqrt{K_\ell^2-K^2}\,|F_z|^2+K\left(K_t^2-2K^2-2\sqrt{K_\ell^2-K^2}\sqrt{K_t^2-K^2}\left(F_zF_r^*-F_z^*F_r\right)\right]K\,dK+$$

$$+\int_{K_\ell}^{K_t}\frac{1}{\left(K_t^2-2K^2\right)^2+4K^2i\sqrt{K^2-K_\ell^2}\sqrt{K_t^2-K^2}}\left[K_t^2\sqrt{K_t^2-K^2}\,|F_r|^2+\right.$$

$$\left.+iK_t^2\sqrt{K^2-K_\ell^2}\,|F_z|^2+K\left(K_t^2-2K^2-2i\sqrt{K^2-K_\ell^2}\sqrt{K_t^2-K^2}\left(F_zF_r^*-F_z^*F_r\right)\right]K\,dK+$$

$$+\int_{K_t}^{\infty}\frac{1}{\left(K_t^2-2K^2\right)^2-4K^2\sqrt{K^2-K_\ell^2}\sqrt{K^2-K_t^2}}\left[iK_t^2\sqrt{K^2-K_t^2}\,|F_r|^2+\right. \tag{24}$$

$$\left.+iK_t^2\sqrt{K^2-K_\ell^2}\,|F_z|^2+K\left(K_t^2-2K^2+2\sqrt{K^2-K_\ell^2}\sqrt{K^2-K_t^2}\right)\left(F_zF_r^*-F_z^*F_r\right)\right]K\,dK+$$

$$+\frac{\pi iK_R}{R'(K,\omega)}\left[iK_t^2\sqrt{K_R^2-K_t^2}\,|F_r|^2+iK_t^2\sqrt{K_R^2-K_\ell^2}\,|F_z|^2+\right.$$

$$\left.+K_R\left(K_t^2-2K_R^2+2\sqrt{K_R^2-K_\ell^2}\sqrt{K_R^2-K_t^2}\left(F_zF_r^*-F_z^*F_r\right)\right]\right\}.$$

В (24) $\fint$ – символ главного значения, и

$$R'(k,\omega)=\frac{dR}{dk}\bigg|_{k=k_R}=\frac{2}{k_R(2k_R^2-k_t^2)^2}\left[k_t^6(4k_R^2-k_t^2)-8k_R^6(k_t^2-k_l^2)\right].$$

При выводе (24) учитывалось, что аналитическая функция $\sqrt{k_l^2-k^2}$ определена на комплексной плоскости $k$ при $\omega>0$ и $\omega<0$ также, как выше была определена функция $\sqrt{k_t^2-k^2}$, и что результат обхода полюса снизу равен полувычету в этом полюсе, а результат обхода полюса сверху – полувычету, взятому со знаком "минус".

Заменой $\omega=-\omega'$; $k=-k'$ для интегралов, в которых $\omega<0$, преобразуем (24) к виду

$$E=E_V+E_R,$$

где

$$E_V=\frac{16\pi^3}{\rho c_t^4}\int_0^\infty\omega^3d\omega\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{k_l}\frac{1}{R(k,\omega)}\left[\sqrt{k_t^2-k^2}\,|F_r|^2+\sqrt{k_l^2-k^2}\,|F_z|^2\right]k\,dk+$$

$$+\frac{16\pi^3}{\rho c_t^4}\int_0^\infty\omega^3d\omega\int_0^{2\pi}d\varphi\int_{k_l}^{k_t}\frac{\sqrt{k_t^2-k^2}}{|R(k,\omega)|^2}\Big[(k_t^2-2k^2)^2|F_r|^2+4k^2(k^2-k_l^2)|F_z|^2- \tag{25}$$

$$-2ik\sqrt{k^2-k_l^2}\,(k_t^2-2k^2)(F_zF_r^*-F_z^*F_r)\Big]k\,dk$$

– суммарная энергия излучения продольных и поперечных SV-волн,

$$E_R=-\frac{16\pi^4}{\rho c_t^2c_R}\int_0^\infty\omega^2d\omega\int_0^{2\pi}\frac{1}{R'(k_R,\omega)}\Big[k_t^2\sqrt{k_R^2-k_t^2}\,|F_r|^2+k_t^2\sqrt{k_R^2-k_l^2}\,|F_z|^2+ \tag{26}$$

$$+2k_R\left(k_t^2-2k_R^2+2\sqrt{k_R^2-k_l^2}\sqrt{k_R^2-k_t^2}\right)\operatorname{Im}(F_zF_r^*)\Big]d\varphi$$

– энергия излучения рэлеевской волны. В (25) $F_r = F_r(\omega, K\cos\varphi, K\sin\varphi)$, $F_z = F_z(\omega, K\cos\varphi, K\sin\varphi)$, а в (26) $F_r = F_r(\omega, K_R\cos\varphi, K_R\sin\varphi)$ и $F_z = F_z(\omega, K_R\cos\varphi, K_R\sin\varphi)$. В (26) для скорости волны Рэлея введено обозначение $C_R = \omega / K_R$.

Выделим в (25) выражения, описывающие энергии излучения P- и SV-волн. Рассмотрим первый из входящих в эту формулу интегралов. Избавляясь от иррациональности в знаменателе, а затем прибавляя и вычитая из подынтегрального выражения величину

$$\zeta = 2K\sqrt{K_\ell^2 - K^2}\sqrt{K_t^2 - K^2}\,(K_t^2 - 2K^2)(F_z F_r^* + F_z^* F_r),$$

преобразуем этот интеграл к виду

$$E_{(0,K_\ell)} = E_P + \frac{16\pi^3}{\rho c_t^4}\int_0^\infty \omega^3 d\omega \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{K_\ell} \frac{\sqrt{K_t^2 - K^2}}{R^2(K,\omega)}\Big[(K_t^2 - 2K^2)|F_r|^2 + \tag{27}$$

$$+ 4K^2(K_\ell^2 - K^2)|F_z|^2 - 2K\sqrt{K_\ell^2 - K^2}\,(K_t^2 - 2K^2)(F_z F_r^* + F_z^* F_r)\Big] K\,dK,$$

где

$$E_P = \frac{16\pi^3}{\rho c_t^4}\int_0^\infty \omega^3 d\omega \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{K_\ell} \frac{\sqrt{K_\ell^2 - K^2}}{R^2(K,\omega)}\Big[4K^2(K_t^2 - K^2)|F_r|^2 + \tag{28}$$

$$+ (K_t^2 - 2K^2)^2|F_z|^2 + 2K\sqrt{K_t^2 - K^2}\,(K_t^2 - 2K^2)(F_z F_r^* + F_z^* F_r)\Big] K\,dK$$

– энергия продольной волны. Объединяя интегральный член в (27) со вторым из входящих в (25) интегралов, получаем выражение для энергии излучения SV-волны:

$$E_{SV}=\frac{16\pi^3}{\rho c_t^4}\int\limits_0^\infty \omega^3 d\omega \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{k_\ell} \frac{\sqrt{k_t^2-k^2}}{R^2(k,\omega)}\Big[(k_t^2-2k^2)^2|F_r|^2+$$

$$+4k^2(k_\ell^2-k^2)|F_z|^2-2k\sqrt{k_\ell^2-k^2}(k_t^2-2k^2)(F_zF_r^*+F_z^*F_r)\Big]k\,dk+$$

$$+\frac{16\pi^3}{\rho c_t^4}\int\limits_0^\infty \omega^3 d\omega \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{k_\ell}^{k_t} \frac{\sqrt{k_t^2-k^2}}{|R(k,\omega)|^2}\Big[(k_t^2-2k^2)^2|F_r|^2- \tag{29}$$

$$-4k^2(k_\ell^2-k^2)|F_z|^2-2ik\sqrt{k_\ell^2-k^2}(k_t^2-2k^2)(F_zF_r^*-F_z^*F_r)\Big]k\,dk.$$

Формулы (28), (29) можно записать в более компактном виде:

$$E_P=\frac{16\pi^3}{\rho c_t^4}\int\limits_0^\infty \omega^3 d\omega \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{k_\ell} \frac{\sqrt{k_\ell^2-k^2}}{R^2(k,\omega)}\left|2k\sqrt{k_t^2-k^2}F_r+(k_t^2-2k^2)F_z\right|^2 k\,dk, \tag{30}$$

$$E_{SV}=\frac{16\pi^3}{\rho c_t^4}\int\limits_0^\infty \omega^3 d\omega \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{k_t} \frac{\sqrt{k_t^2-k^2}}{|R(k,\omega)|^2}\left|(k_t^2-2k^2)F_r-2k\sqrt{k_\ell^2-k^2}F_z\right|^2 k\,dk. \tag{31}$$

Делая в (30), (31) соответственно замены $k = k_\ell \sin\theta$, $k = k_t \sin\theta$, можно получить следующие представления для энергии излучения P- и SV-волны:

$$E_P=\frac{16\pi^3}{\rho c_\ell^3}\int\limits_0^\infty \omega^2 d\omega \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi/2} \Big|2n\sin\theta\sqrt{1-n^2\sin^2\theta}\,F_r(\omega,\vec{k}_\ell^{(s)})+ \tag{32}$$

$$+(1-2n^2\sin^2\theta)F_z(\omega,\vec{K}_\ell^{(S)})\Big|^2\Big[(1-2n^2\sin^2\theta)^2+4n^3\sin^2\theta\cos\theta\times$$

$$\times\sqrt{1-n^2\sin^2\theta}\,\Big]^{-2}\cos^2\theta\sin\theta\,d\theta;$$

$$E_{SV}=\frac{16\pi^3}{\rho c_t^3}\int\limits_0^\infty\omega^2d\omega\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\pi/2}\Big|\cos2\theta\,F_r(\omega,\vec{K}_t^{(S)})-2\sin\theta\sqrt{n^2-\sin^2\theta}\,\times \tag{33}$$

$$\times F_z(\omega,\vec{K}_t^{(S)})\Big|^2\Big|\cos^22\theta+4\sin^2\theta\cos\theta\sqrt{n^2-\sin^2\theta}\Big|^{-2}\cos^2\theta\sin\theta\,d\theta,$$

В (32), (33) введены обозначения $n=c_t/c_\ell$, $\vec{K}_\ell^{(S)}=K_\ell\sin\theta(\vec{\ell}_x\cos\varphi+\vec{\ell}_y\sin\varphi)$, $\vec{K}_t^{(S)}=K_t\sin\theta\,(\vec{\ell}_x\cos\varphi+\vec{\ell}_y\sin\varphi)$. Формулы (32),(33) можно также получить путем вычисления потока энергии в упругих волнах.

Из общих формул (26), (30), (3I) в случае осесимметричной вертикальной нагрузки следуют известные /4/ результаты.

В качестве примера использования полученных выше результатов рассмотрим процесс возбуждения упругих волн в полупространстве $z>0$ точечным индентором, равномерно движущимся со скоростью $v$ параллельно оси $x$ на высоте $h$ над границей, причем проекция его траектории на плоскость $z=0$ удалена от оси $x$ на расстояние $y=\ell$ (рис.I). Индентор взаимодействует с точечным элементом поверхности полупространства, расположенным в начале координат, причем сила взаимодействия обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними.

Компоненты силы, действующей на поверхность полупространства в точке с координатами $x=y=0$, описываются формулами:

$$f_x=-\frac{F_0\,v t}{(r_0^2+v^2t^2)^{3/2}}\,\delta(x)\,\delta(y), \tag{34}$$

$$f_y = -\frac{F_0 \, \ell}{(r_0^2 + v^2 t^2)^{3/2}} \, \delta(x)\, \delta(y), \tag{35}$$

$$f_z = \frac{F_0 \, h}{(r_0^2 + v^2 t^2)^{3/2}} \, \delta(x)\, \delta(y). \tag{36}$$

В (34)-(36) $F_0$ - некоторый коэффициент, характеризующий силу взаимодействия элемента поверхности твердого тела с индентором и определяемый их механическими свойствами как пары трения, $r_0^2 = h^2 + \ell^2$ и $\delta$ - символ дельта-функции Дирака. При записи этих выражений сделано допущение, что смещения точки $x = y = z = 0$ всегда много меньше $r_0$, так что влиянием изменения положения элемента поверхности вследствие волнового движения на силу взаимодействия с индентором можно пренебречь.

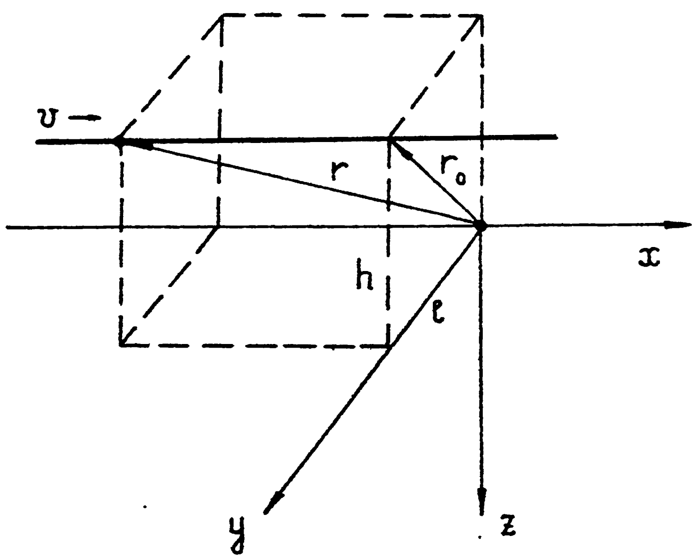



Рис. I

Траектория движения индентора над полупространством $z \geq 0$.

Из (34)-(36), (6) следует, что спектры компонент силы, действующей на поверхность полупространства, имеют вид

$$F_x(\vec{k},\omega) = -\frac{i F_0 \omega}{4\pi^3 v^2} \mathcal{K}_0\left(\omega \frac{r_0}{v}\right), \tag{37}$$

$$F_y(\vec{k},\omega) = -\frac{F_0 \ell \omega}{4\pi^3 v^2 r_0} \mathcal{K}_1\left(\omega \frac{r_0}{v}\right), \tag{38}$$

$$F_z(\vec{k},\omega) = \frac{F_0 h \omega}{4\pi^3 v^2 r_0} \mathcal{K}_1\left(\omega \frac{r_0}{v}\right), \tag{39}$$

где $\mathcal{K}_0$ и $\mathcal{K}_1$ – модифицированные функции Бесселя соответственно нулевого и первого порядка.

Подставляя (37)-(39) в общие формулы (I9), (26), (32), (33) представим энергии излучения упругих волн в виде

$$E_P = E_0(r_0) \frac{v}{c_\ell} \int_0^\infty d\eta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta \, \frac{\cos^2\theta \sin\theta}{R_\ell^2(\theta)} \eta^2 \times$$
$$\times \left\{ \left[\eta \mathcal{K}_1(\eta)\right]^2 \Phi_1(\theta,\varphi) + \left[\eta \mathcal{K}_0(\eta)\right]^2 \Phi_2(\theta,\varphi) \right\}; \tag{40}$$

$$E_{SV} = E_0(r_0) \frac{v c_\ell^2}{c_t^3} \int_0^\infty d\eta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\arcsin n} d\theta \, \frac{\cos^2\theta \sin\theta}{R_t^2(\theta)} \eta^2 \times$$
$$\times \left\{ \left[\eta \mathcal{K}_1(\eta)\right]^2 \Phi_3(\theta,\varphi) + \left[\eta \mathcal{K}_0(\eta)\right]^2 \cos^2\varphi \right\} +$$

$$+ E_0(r_0)\frac{v c_\ell^2}{c_t^3}\int\limits_0^\infty d\eta\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_{\arcsin n}^{\pi/2}d\theta\;\frac{\cos^2\theta\,\sin\theta}{R_*(\theta)}\,\eta^2\,\times$$

$$\times\left\{\left[\frac{\ell}{r_0}\cos 2\theta\,\sin\varphi\cdot\eta\mathcal{K}_1(\eta)\right]^2+\left[\eta\mathcal{K}_0(\eta)\cos\varphi+\right.\right.$$

$$\left.\left.+2\,\frac{h}{r_0}\sin\theta\sqrt{\sin^2\theta-n^2}\,\eta\mathcal{K}_1(\eta)\right]^2\right\}; \qquad (41)$$

$$E_{SH}=E_0(r_0)\frac{v c_\ell^2}{c_t^3}\int\limits_0^\infty d\eta\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\pi/2}\eta^2\sin\theta\,\times$$

$$\times\left\{\left[\frac{\ell}{r_0}\cos\varphi\cdot\eta\mathcal{K}_1(\eta)\right]^2+\left[\sin\varphi\,\eta\,\mathcal{K}_0(\eta)\right]^2\right\}; \qquad (42)$$

$$E_R=-\,E_0(r_0)\frac{c_\ell^2 v}{c_t^2 c_R q}\int\limits_0^\infty\eta^2 d\eta\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\left\{\sqrt{\xi^2-1}\left[\left(\frac{\ell}{r_0}\eta\mathcal{K}_1(\eta)\sin\varphi\right)^2+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left(\eta\mathcal{K}_0(\eta)\cos\varphi\right)^2\right]+\sqrt{\xi^2-n^2}\left(\frac{h}{r_0}\eta\mathcal{K}_1(\eta)\right)^2+\theta\cos\varphi\,\frac{h}{r_0}\mathcal{K}_1(\eta)\mathcal{K}_0(\eta)\,\eta^2\right\} \qquad (43)$$

В (40)–(43) интегрирование по $\omega$ заменено интегрированием по безразмерному параметру $\eta=\omega r_0/v$, и введены обозначения:

$$\Phi_1(\theta,\varphi)=\left[\frac{h}{r_0}(1-2n^2\sin^2\theta)-2\,\frac{\ell}{r_0}\sin\theta\sin\varphi\sqrt{1-n^2\sin^2\theta}\right]^2,$$

$$\Phi_2(\theta,\varphi)\;\left[2n\sin\theta\,\sqrt{1-n^2\sin^2\theta}\,\cos\varphi\right]^2,$$

$$\Phi_3(\theta,\varphi)=\frac{\ell}{r_0}\cos 2\theta \sin\varphi + 2\sin\theta\sqrt{n^2\sin^2\theta}, \quad n \geq \sin\theta,$$

$$R_\ell(\theta)=(1-2n^2\sin^2\theta)^2+4n^3\sin^2\theta\cos\theta\sqrt{1-n^2\sin^2\theta},$$

$$R_t(\theta)=\cos^2 2\theta+4\sin^2\theta\cos\theta\sqrt{n^2-\sin^2\theta},$$

$$R_*(\theta)=\cos^4 2\theta+16\sin^4\theta\cos^2\theta(\sin^2\theta-n^2),$$

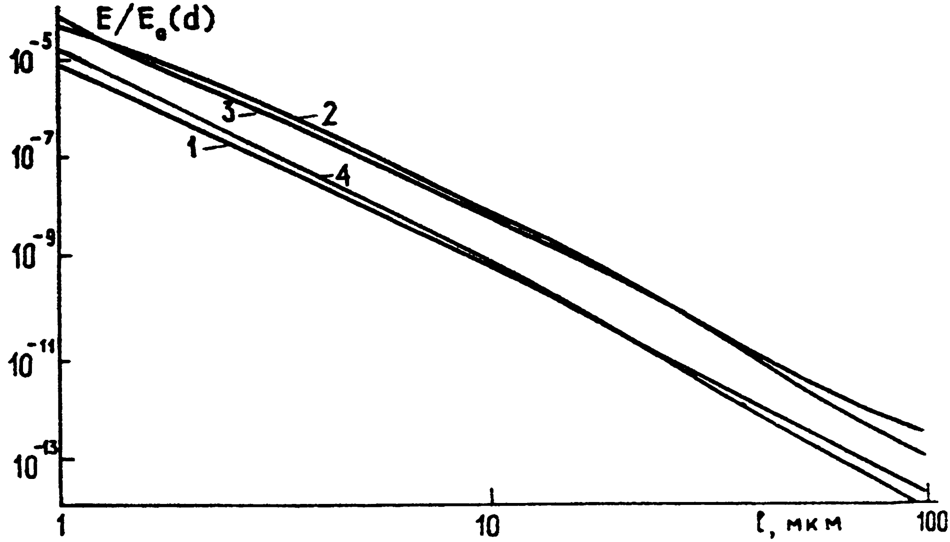
$$q=\frac{2}{\xi(2\xi^2-1)^2}\left[4\xi^2-1-8\xi^6(1-n^2)\right],$$

$$Q=2\xi\left(1-2\xi^2+2\sqrt{\xi^2-1}\sqrt{\xi^2-n^2}\right),$$

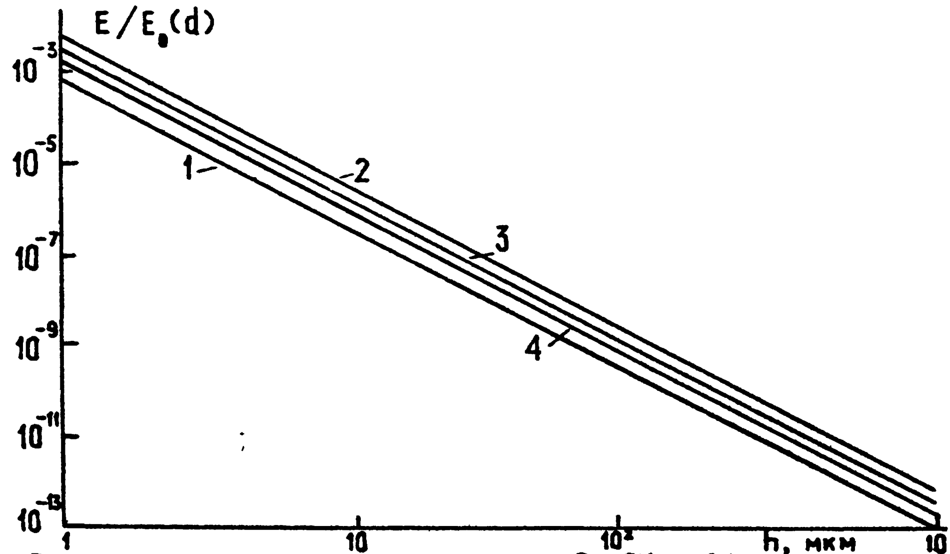
$$\xi=\frac{c_t}{c_R}, \qquad E_0(r_0)=\frac{F_0^2}{\pi^3\rho c_\ell^2 r_0^5}$$

Анализ формул (40)-(43) показывает, что энергии продольной, поперечных ( SV- и SH-поляризаций) и рэлеевской волны прямо пропорциональные скорости $v$ движения индентора. Для определения характера зависимостей $E_P$, $E_{SV}$, $E_{SH}$, $E_R$ от величин $h$ и $\ell$ было проведено численное интегрирование в выражениях (40)-(43). Результаты численных расчетов представлены на рис.2-II. По осям ординат на этих рисунках отложены безразмерные отношения энергий соответствующих типов волн к величине $E_0(d)$, причем для $d$ взято значение $10^{-6}$ м, характерное для максимальных высот шероховатостей полированных поверхностей.

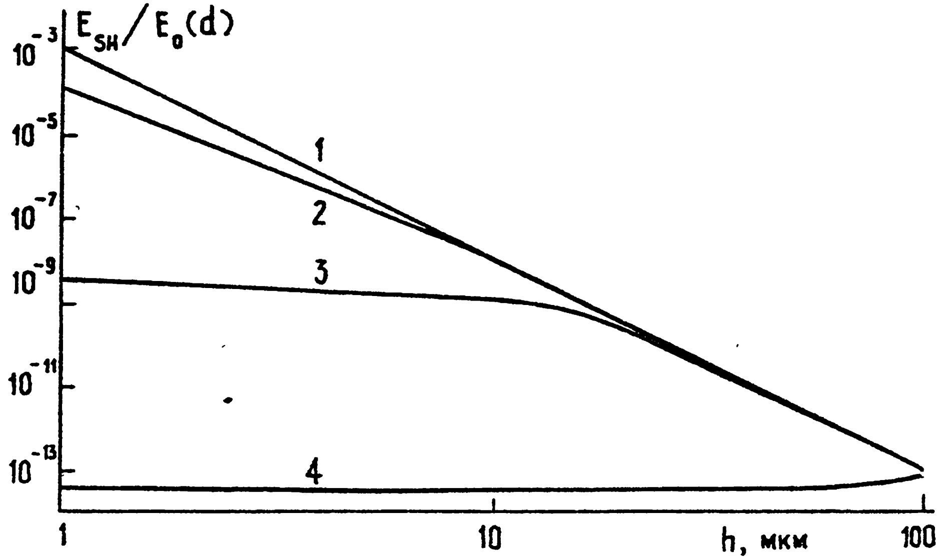
Из рассмотрения рис.2-II следует, что для данных значений $\ell$ и $h$ наибольшей энергией обладает SV-волна, а наименьшей - P-волна. Характер зависимостей энергий излучения от $h$ и $\ell$ определяется ,



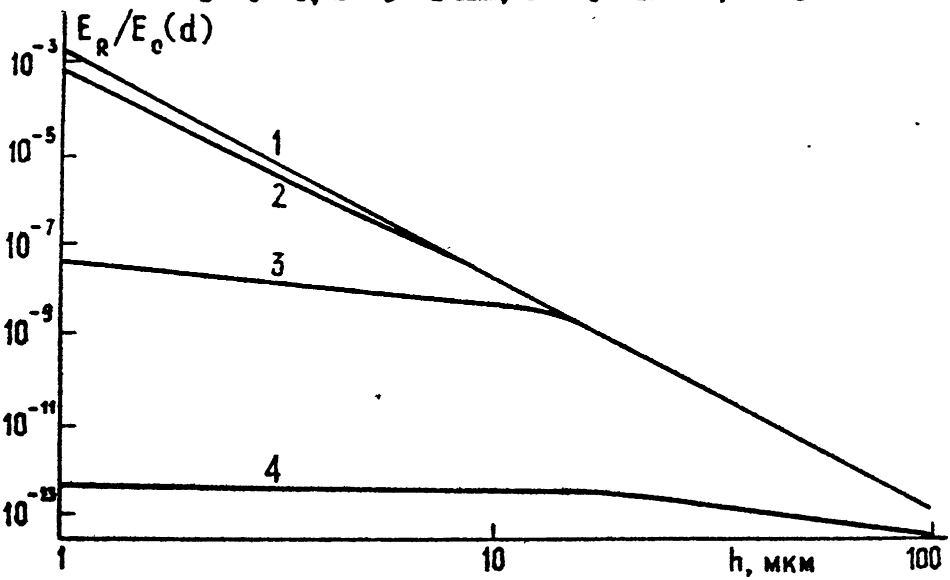

Р и с. 2 Зависимости энергий излучения P-, SV -, SH - и R-волны от параметра $\ell$ при $h$ = I км. I - P-волна; 2 - SV-волна; 3 - SH-волна; 4 - волна Рэлея



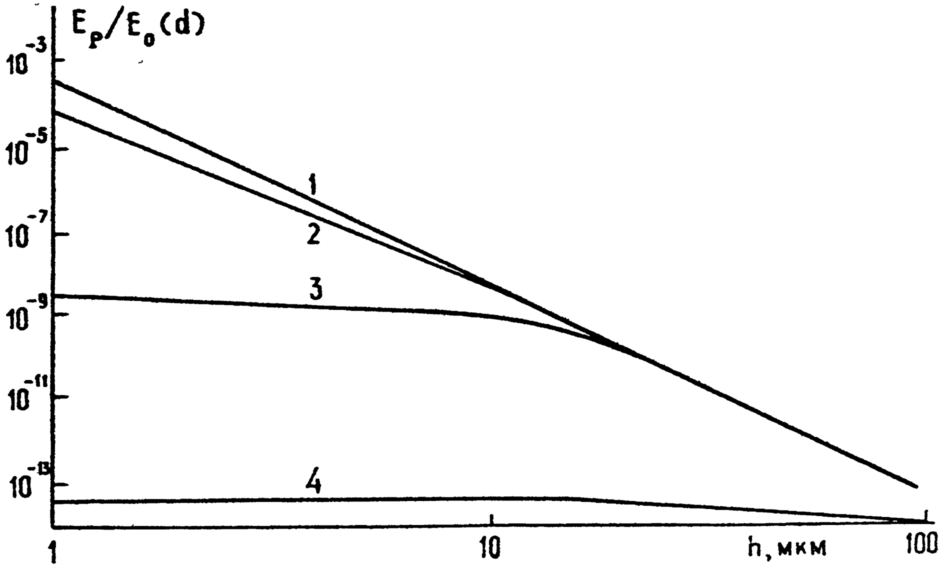

Р и с. 3 Зависимости энергий излучения P-, SV -, SH - и R-волн от параметра $h$ при $\ell$ = 0. I - P-волна; 2 - SV-волна; 3 - SH-волна; 4 - волна Рэлея



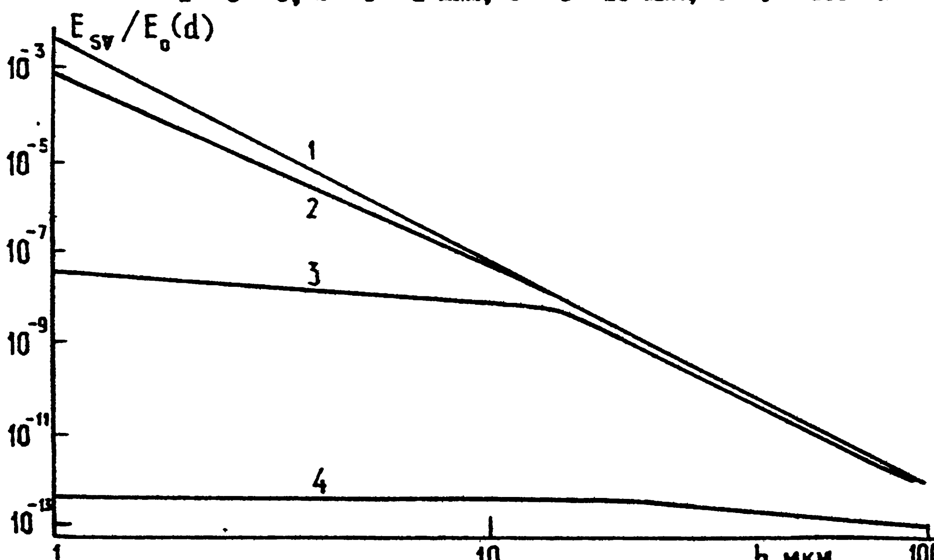

Р и с. 4 Зависимость энергии излучения SH-волны от параметра $h$. I – $\ell = 0$; 2 – $\ell$ = I мкм; 3 – $\ell$ = I0 мкм; 4 – $\ell$ = I00 мкм



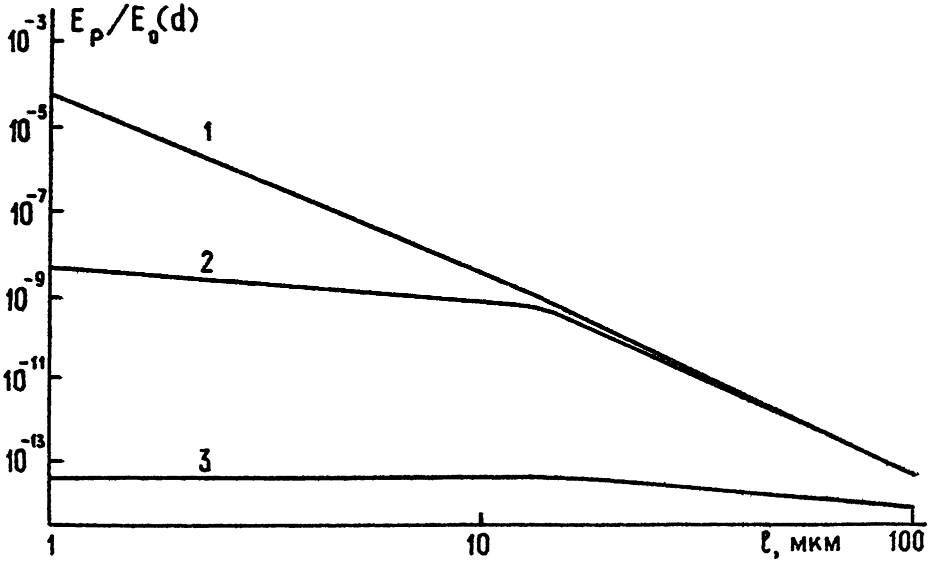

Р и с. 5 Зависимость энергии излучения волны Рэлея от параметра $h$ I – $\ell = 0$; 2 – $\ell$ = 1 мкм; 3 – $\ell$ = I0 мкм; 4 – $\ell$ = I00 мкм



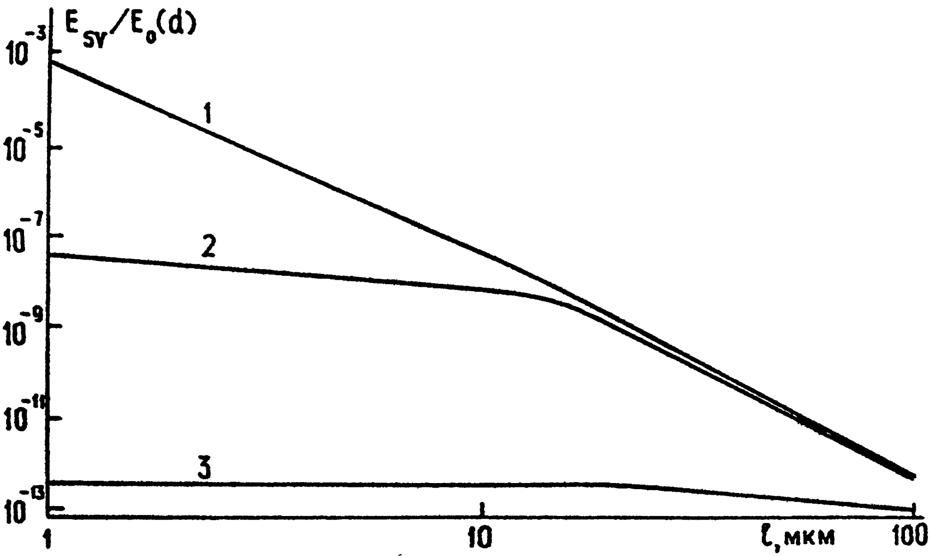

Р и с. 6 Зависимость энергии излучения P-волны от параметра h .
I – $\ell$ = 0; 2 – $\ell$ = I мкм; 3 – $\ell$ = IO мкм; 4 – $\ell$ = IOO мкм



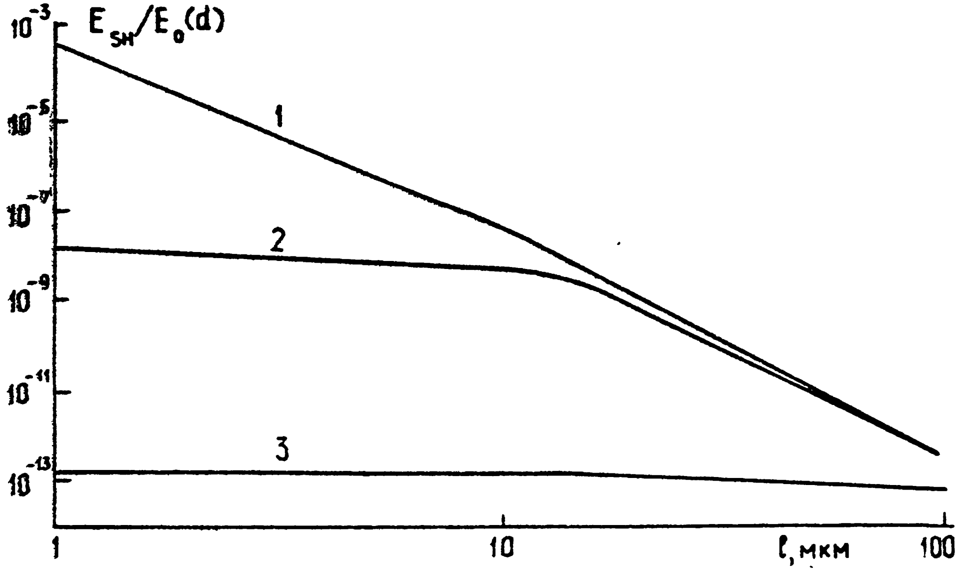

Р и с. 7 Зависимость энергии излучения SV-волны от параметра h .
I – $\ell$ = 0; 2 – $\ell$ = I мкм; 3 – $\ell$ = IO мкм; 4 – $\ell$ = IOO мкм



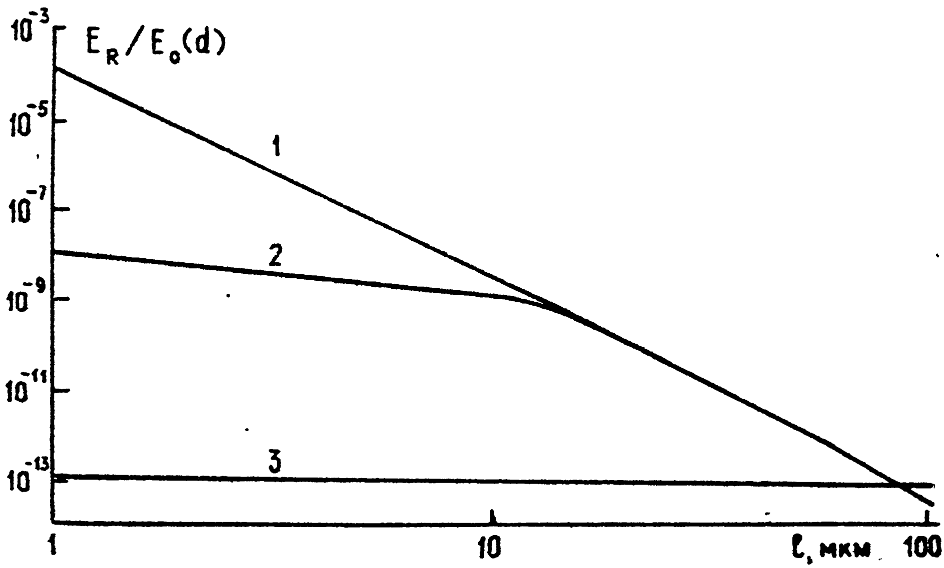

Р и с. 8 Зависимость энергии излучения Р-волны от параметра $\ell$ .
I – h= I мкм; 2 – h= I0 мкм; 3 – h = I00 мкм




Р и с. 9 Зависимость энергии излучения SV-волны от параметра $\ell$.
I – h= I мкм; 2 – h = I0 мкм; 3 – h = I00 мкм




Р и с. I0 Зависимость энергии излучения SH-волны от параметра $\ell$. I – h = I мкм; 2 – h = I0 мкм; 3 – h = I00 мкм




Р и с. II Зависимость энергии излучения волны Рэлея от параметра $\ell$. I – h = I мкм; 2 – h = I0 мкм; 3 – h = I00 мкм главным образом, множителем $r_0^{-5}$ в формулах (40)-(43).

Более адекватным реальному процессу трения разумеется, был бы учет конкретной формы движущегося индентора и конфигураций тех шероховатостей поверхности, с которыми индентор взаимодействует. Основная трудность, возникающая при решении подобной задачи, заключается в вычислении спектров силовых источников, которое не представляется возможным выполнить аналитически по формуле (6). Для некоторых сравнительно простых форм шероховатостей интеграл (6) может быть оценен численно. Соответствующие расчеты будут выполнены в следующей статье.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Докучаев В.П., Разин А.В. Возбуждение упругих волн в однородном полупространстве поверхностными источниками//Изв.АН СССР. Физика Земли. - 1990. - № 10. - С.81-87.
2. Adirovich E., Blokhingev D. On the force of dry friction // J. Phys. USSR. - 1943. - V.7, N5. - P. 29-36.
3. Буфеев В.А. Волновые потери при трении//Изв.вузов. Физика. - - 1972. - № 5. - С.73-78.
4. Коган С.Я. О сейсмической энергии, возбуждаемой источником, находящимся на поверхности//Изв.АН СССР. Сер.Геофизич. - 1963. - № 7. - С.1000-1013.
5. Крысов С.В., Орлов А.Л. О взаимосвязи волновых свойств тел и кинетической зависимости сил трения//Трение и износ. - 1991.- - Т.12, № 4. - С.610-616.
6. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория упругости. - М.: Наука, 1965. - 204 с.
7. Демидов С.П. Теория упругости. - М.: Высшая школа, 1979. - - 432 с.
8. Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах. - М.: Наука, 1973. - - 343 с.
9. Докучаев В.П., Разин А.В. Возбуждение упругих волн в твердом полупространстве поверхностными источниками//Препринт № 224.-

Горький: НИРФИ. - 1987. - 33 с.

10. Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. - Киев: Наукдумка, 1981. - 284 с.

Дата поступления статьи

20 сентября 1991 г.

Андрей Львович Орлов

Андрей Владимирович Разин

ЭНЕРГИЯ УПРУГИХ ВОЛН, ВОЗБУЖДАЕМЫХ В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ НЕСТАЦИОНАРНЫМИ СИЛОВЫМИ ПОВЕРХНОСТНЫМИ ИСТОЧНИКАМИ

Подписано в печать 13.1191 г. Формат 60 x 84/16.
Бумага писчая. Печать офсетная. Объем 1,55 усл.п.л.
Заказ 5217. Тираж 120. Бесплатно.

Отпечатано на ротапринте НИРФИ