Нижегородский научно-исследовательский радиофизический институт
Министерства науки, высшей школы и технической политики
Российской Федерации

Препринт № 340

# ВОЗБУЖДЕНИЕ ВОЛНЫ СТОНЕЛИ РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ СИЛОВЫМИ ИСТОЧНИКАМИ, ДЕЙСТВУЮЩИМИ НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА ГАЗ - ТВЕРДОЕ ТЕЛО

А.В.Разин

Нижний Новгород, 1992

Р а з и н А. В.
ВОЗБУЖДЕНИЕ ВОЛНЫ СТОНЕЛИ РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ СИЛОВЫМИ ИСТОЧНИКАМИ, ДЕЙСТВУЮЩИМИ НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА ГАЗ - ТВЕРДОЕ ТЕЛО//Препринт № 340. - Нижний Новгород: НИРФИ, 1992. - 21 с.

УДК 534.232

С помощью преобразований Фурье в интегральном виде получено решение задачи о возбуждении упругих волн в однородном изотропном твердом полупространстве и в граничащем с ним однородном газе зависящими от времени силами, произвольно распределенными по границе раздела этих сред. Проведена классификация различных распределений сил с точки зрения генерации ими тех или иных типов поверхностных и объемных волн. В случае гармонических сил получено выражение для средней за период мощности излучения волны Стонели. При произвольной зависимости сил от времени получено выражение, описывающее энергию волны Стонели, излученную за все время действия источников.

В работах /I, 2/ рассмотрено возбуждение упругих волн в полупространстве зависящими от времени силами, произвольным образом распределенными по его поверхности. В /I/ рассмотрен случай гармонических сил, для которых вычислены асимптотики полей смещений в волновой зоне, плотность потоков энергии в продольных, поперечных и рэлеевских волнах, а также получены интегральные выражения для мощностей излучения волн. В /2/ получены выражения для энергии продольных, поперечных и рэлеевских волн, возбуждаемых нестационарными источниками.

В работах /I, 2/ рассмотрена ситуация, когда упругое полупространство граничит с вакуумом. При более строгой постановке задачи следует учитывать, что в реальных условиях твердое тело окружено газом или жидкостью и рассматривать волновые процессы в этих средах совместно. Существенным обстоятельством является то, что в отличие от границы твердое тело - вакуум, на который существует поверхностная волна Рэлея, вдоль границы твердое тело - газ распространяются две волны: волна Рэлея и волна Стонели /3/. В зависимости от соотношения между акустическими параметрами сред одна из этих волн является поверхностной, а другая - вытекающей. Обычно скорости упругих волн в твердом теле существенно выше, чем скорость звука в газе (жидкости), и поверхностной является волна Стонели.

Мощность излучения волны Стонели, возбуждаемой при действии на границу газ - твердое тело перпендикулярной к ней гармонической силы, вычислены в работе /4/, где, в частности, показано, что при близких значениях скоростей акустической волны в газе и волны Рэжая в твердом теле мощность волны Стонели может достигать 40% всей излучаемой мощности. Представляет интерес исследование возбуждения волн Стонели прозвольным распределением поверхностных силовых источников.

В настоящей работе в интегральном виде получено решение задачи о возбуждении упругих волн в однородном изотропном твердом полупространстве и в граничащем с ним однородном газе зависящими от времени силами, произвольно распределенными по границе раздела этих сред. Проведена классификация различных распределений сил с точки зрения генерации ими тех или иных типов поверхностных и объемных волн. В случае гармонических сил получено выражение для средней за период мощности излучения волны Стонели. При произвольной зависимости сил от времени получено выражение, описывающее энергию волны Стонели, излученную за все время действия источников.

Пусть плоскость $z = 0$ декартовой системы координат совпадает с границей раздела однородного газа, имеющего плотность $\rho_1$ и скорость звука $C_1$ и заполняющего полупространство $z < 0$, и однородного изотропного твердого тела, занимающего полупространство $z > 0$ и характеризуемого плотностью $\rho_2$, модулем всестороннего сжатия $\varkappa$ и модулем чистого сдвига $\mu$. Скрости продольной $C_\ell$ и поперечной $C_t$ волн выражаются через параметры упругости и плотность твердого тела формулами /5/:

$$c_\ell = \left[\left(\varkappa + \frac{4}{3}\mu\right)/\rho_2\right]^{1/2}, \qquad c_t = \left(\mu/\rho_2\right)^{1/2}.$$

При действии на единицу объема твердого тела силы $\vec{f}_V(x, y, z, t)$, где $t$ – время, малые смещения $\vec{u}_2$ в нем описываются уравнением Ламэ /6/ :

$$\rho_2 \frac{\partial^2 \vec{u}_2}{\partial t^2} - \left(\varkappa + \frac{1}{3}\mu\right) \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{u}_2 - \mu \Delta \vec{u}_2 = \rho_2 \vec{f}_V, \qquad (I)$$

а возмущения плотности $\rho_1'$, давления $p'$ и скорости $\vec{v}_1$ в газе можно описывать системой уравнений гидродинамики, которые после линеаризации принимают вид /7/

$$\frac{\partial \rho_1'}{\partial t} + \rho_1 \operatorname{div} \vec{v}_1 = 0, \qquad (2)$$

$$\frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} + \frac{\nabla p_1'}{\rho_1} = 0, \qquad (3)$$

$$p_1' = c_1^2 \rho_1' . \qquad (4)$$

На границе раздела газ – твердое тело выполняются условия непрерывности перпендикулярных к границе компонент смещений и тензора напряжений, а также равенства нулю тангенциальных компонент тензора напряжений в твердом теле /3, 8/:

$$u_{1z} = u_{2z}, \quad z = 0, \qquad (5)$$

$$\sigma_{zz} = -p', \quad \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0, \quad z = 0. \qquad (6)$$

Пусть на единицу площади границы раздела действует сила $\vec{f}(x, y, z)$, т.е. в (I)

$$\vec{f}_V(x,y,z,t) = \vec{f}(x,y,t)\,\delta(z),$$

где $\delta$ – дельта-функция Дирака. Нетрудно показать, что в этом случае можно описывать смещения в твердом теле однородным уравнением Ламэ

$$\rho_2 \frac{\partial^2 \vec{u}_2}{\partial t^2} - (\varkappa + \tfrac{1}{3}\mu)\operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{u}_2 - \mu \Delta \vec{u}_2 = 0, \qquad (7)$$

а поверхностную силу перевести в граничные условия (6), переписав их в виде

$$\sigma_{xz} = -f_x(x,y,t), \quad \sigma_{yz} = -f_y(x,y,t), \quad \sigma_{zz} + p' = -f_z(x,y,t) \qquad (8)$$

При решении системы (2)-(5), (7), (8) необходимо также учесть условия излучения при $|z| \to \infty$ /9/.

Возмущения в газе будем описывать с помощью потенциала смещений $\psi_1$, а в твердом теле – с помощью скалярного $\psi_2$ и векторного $\vec{A}$ потенциалсв таких, что смещения $\vec{u}_1$ и давление $p'$ в газе и смещения $\vec{u}_2$ в твердом теле определяются выражениями

$$\vec{u}_1 = \operatorname{grad}\psi_1, \qquad p' = -\rho_1 \frac{\partial^2\psi_1}{\partial t^2}, \tag{9}$$

$$\vec{u}_2 = \operatorname{grad}\psi_2 + \operatorname{rot}\vec{A}, \qquad \operatorname{div}\vec{A} = 0. \tag{I0}$$

Для потенциалов можно получить волновые уравнения

$$\Delta\psi_1 - \frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2\psi_1}{\partial t^2} = 0, \quad \Delta\psi_2 - \frac{1}{c_\ell^2}\frac{\partial^2\psi_2}{\partial t^2} = 0, \quad \Delta\vec{A} - \frac{1}{c_t^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = 0, \tag{II}$$

которые необходимо решать совместно с граничными условиями (5),(8) и условиями излучения.

При наличии в среде плоских границ поперечную волну с произвольным направлением вектора смещений удобно представить в виде суммы волны, в которой вектор смещений параллелен границе (SH-волна), и волны, в которой вектор смещений имеет перпендикулярную к границе составляющую (SV-волна) /3/. В соответствии с этим векторный потенциал запишем в виде суммы:

$$\vec{A} = \vec{A}_{SV} + \vec{A}_{SH}.$$

Для решения уравнений (II) воспользуемся преобразованиями Фурье Введем интегральное представление вектора силы $\vec{f}$:

$$\vec{f}(\vec{r},t) = \iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} \vec{F}(\vec{k},\omega)\, e^{-i\omega t + i\vec{k}\vec{r}}\, d\omega\, d\vec{k} \tag{I2}$$

с формулой обращения

$$\vec{F}(\vec{k},\omega) = \frac{1}{(2\pi)^3}\iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} \vec{f}(\vec{r},t)\, e^{i\omega t - i\vec{k}\vec{r}}\, dt\, d\vec{r}. \tag{I3}$$

В (I2), (I3) $\vec{F}(\vec{k},\omega)$ – пространственно-частотный спектр функции $\vec{f}(\vec{r},t)$, $\vec{r} = (x, y)$ – двумерный радиус-вектор, а $\vec{k} = (k_x, k_y)$ –

– двумерный волновой вектор в плоскости $xOy$ , $\vec{k}\vec{r} = k_x x + k_y y$ , $d\vec{k} = dk_x dk_y$ , $d\vec{r} = dx\,dy$ . Решение уравнений (II) с граничными условиями (5), (8) имеет следующий интегральный вид:

$$\psi_1 = \frac{1}{\mu}\iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(k_t^2 - 2k^2 - 2æ_\ell æ_t)\vec{k}\vec{F} - æ_\ell k_t^2 F_z}{æ_1 S_0(\omega, k)} \times$$

$$\times \exp\left[-i\omega t + i(\vec{k}\vec{r} - æ_1 z)\right] d\omega\, d\vec{k} , \qquad (14)$$

$$\psi_2 = \frac{1}{\mu}\iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(2æ_t æ_1 + \varepsilon k_t^2)\vec{k}\vec{F} + æ_1(k_t^2 - 2k^2)F_z}{æ_1 S_0(\omega, k)} \times$$

$$\times \exp\left[-i\omega t + i(\vec{k}\vec{r} + æ_\ell z)\right] d\omega\, d\vec{k} , \qquad (15)$$

$$\vec{A}_{SV} = \frac{1}{\mu}\iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left[æ_1(k_t^2 - 2k^2) + \varepsilon k_t^2 æ_\ell\right]\vec{k}\vec{F} - 2æ_\ell k^2 æ_1 F_z}{æ_1 k^2 S_0(\omega, k)} \times$$

$$\times (\vec{k} \times \vec{e}_z)\exp\left[-i\omega t + i(\vec{k}\vec{r} + æ_t z)\right] d\omega\, d\vec{k} , \qquad (16)$$

$$\vec{A}_{SH} = \frac{1}{\rho_2}\iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(æ_t \vec{k} - k^2\vec{e}_z)(k_x F_y - k_y F_x)}{\omega^2 æ_t k^2} \times$$

$$\times \exp\left[-i\omega t + i(\vec{k}\vec{r} + æ_t z)\right] d\omega\, d\vec{k} , \qquad (17)$$

где $æ_1 = (k_1^2 - k^2)^{1/2}$, $æ_{\ell,t} = (k_{\ell,t}^2 - k^2)^{1/2}$, $k_1 = \omega / c_1$ , $k_{\ell,t} = \omega / c_{\ell,t}$ – волновые числа звуковой, продольной и поперечной волн на частоте $\omega$ , $k = |\vec{k}|$ , $\vec{k}\vec{F} = k_x F_x + k_y F_y$, $\vec{k} \times \vec{e}_z = k_y \vec{e}_x - k_y \vec{e}_y$, $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ – орты координатных осей,

$$S_0(\omega,k) = R_0(\omega,k) + \varepsilon k_t^4 æ_\ell / æ_1 , \qquad \varepsilon = \frac{\rho_1}{\rho_2},$$

$$R_0(\omega,k) = (k_t^2 - 2k^2)^2 + 4k^2 æ_\ell æ_t .$$

Для сходимости интегралов (14)-(17) при $|z| \to \infty$ необходимо определить аналитические функции $æ_1$ , $æ_\ell$ и $æ_t$ на комплексной плоскости

$K$ следующим образом:

$$(K_{1,\ell,t}^2 - K^2)^{1/2} = i\left|(K^2 - K_{1,\ell,t}^2)^{1/2}\right| \quad \text{при} \quad K > |\omega|/C_{1,\ell,t}\,.$$

Вводя в среды малое затухание волн можно показать, что контур интегрирования по $\omega$ должен проходить в области $\mathrm{Im}\,\omega > 0$.

Интегралы (I4)-(I7) имеют полюса, определяемые из решения уравнения

$$S_0(\omega,K) = 0 \tag{I8}$$

и связанные с излучением волн Рэлея и Стонели. Обычно скорости упругих волн в твердых телах превышают скорость звука в газах и жидкостях. При условии $C_1 < C_R$, где $C_R$ – скорость рэлеевской волны на границе твердое тело – вакуум (соответствующее ей волновое число $K_R$ определяется из уравнения Рэлея $R_0(\omega, K) = 0$), уравнение (I8) имеет один действительный корень $K_S$, соответствующий поверхностной волне Стонели /3, 8/. Второй корень этого уравнения является комплексным /3, 8/. При $\varepsilon << 1$ его действительная часть равна рэлеевскому волновому числу $K_R$, а мнимая часть пропорциональна $\varepsilon$. Этому корню соответствует вытекающая поверхностная волна, называемая иногда псевдорэлеевской /I0/, амплитуда которой экспоненциально спадает вдоль границы. При стремлении плотности газа к нулю вытекающая волна переходит в волну Рэлея /3, 8/.

Выражения (I4)-(I7) позволяют проанализировать возбуждение тех или иных типов волн источниками различных конфигураций. Если вертикальная нагрузка отсутствует, $f_z = 0$, а распределения $f_{x,y}(\vec{r}, t)$ образуют соленоидальное поле горизонтальных сил на границе раздела ($\operatorname{div}\vec{f} = 0$), то отличен от нуля только потенциал $\vec{A}_{SH}$. Такой источник возбуждает только поперечные упругие волны, вектор смещений в которых лежит в горизонтальной плоскости ($SH$-волны). Акустические волны в газе, продольные волны в твердом теле, а также волны Рэлея и Стонели в этом случае не возбуждаются. Наличие над упругим полупространством газа никак не влияет на возбуждение $SH$-волны. Формула (I7) была ранее получена в /II/ при рассмотрении действия силовых источников на поверхность упругого полупространства, граничащего с вакуумом.

Если к границе приложена нормальная сила, или $\operatorname{div} \vec{f} \neq 0$, то генерируются звуковые волны в газе, продольные и поперечные ( SV - и SH-поляризаций) волны в твердом теле, а также волны Рэлея и Стонели. Потенциальное поле сил ( $\operatorname{rot} \vec{f} = 0$) волны SH-поляризации не возбуждает.

Для гармонических силовых воздействий, когда $\vec{f}(\vec{r}, t) = \vec{f}_\omega(\vec{r}) e^{-i\omega_0 t}$, где $\omega_0$ - циклическая частота и $\vec{f}_\omega(\vec{r})$ - распределение сил по границе раздела, из соотношения (I3), следует, что

$$\vec{F}(\omega, \vec{k}) = \delta(\omega - \omega_0) \vec{F}_\omega(\vec{k}), \tag{I9}$$

где

$$\vec{F}_\omega(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \vec{f}_\omega(\vec{r}) e^{-i\vec{k}\vec{r}} d\vec{r} \tag{20}$$

- пространственный спектр гармонического источника. Поля акустической и упругих волн, генерируемых таким источником, выражаются в виде двойных интегралов Фурье по $x$- и $y$ -компонентам волнового вектора:

$$\varphi_1 = \frac{e^{-i\omega_0 t}}{\mu} \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(k_t^2 - 2k^2 - 2æ_\ell æ_t)\vec{k}\vec{F}_\omega - æ_\ell k_t^2 F_{\omega z}}{æ_1 S_0(k)} \times \exp\left[i(\vec{k}\vec{r} - æ_1 z)\right] d\vec{k}, \tag{2I}$$

$$\varphi_2 = \frac{e^{-i\omega_0 t}}{\mu} \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(2æ_t æ_1 + \varepsilon k_t^2)\vec{k}\vec{F}_\omega + æ_1(k_t^2 - 2k^2) F_{\omega z}}{æ_1 S_0(k)} \times \exp\left[i(\vec{k}\vec{r} + æ_\ell z)\right] d\vec{k}, \tag{22}$$

$$\vec{A}_{SV} = \frac{e^{-i\omega_0 t}}{\mu} \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left[æ_1(k_t^2 - 2k^2) + \varepsilon k_t^2 æ_\ell\right]\vec{k}\vec{F}_\omega - 2æ_\ell k^2 æ_1 F_{\omega z}}{æ_1 k^2 S_0(k)} \times (\vec{k} \times \vec{e}_z) \exp\left[i(\vec{k}\vec{r} + æ_t z)\right] d\vec{k}, \tag{23}$$

$$\vec{A}_{SH} = \frac{e^{-i\omega_0 t}}{\tilde{\rho}_2 \omega_0^2} \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\text{æ}_t \vec{K} - K^2 \vec{e}_z)(K_x F_{\omega x} - K_y F_{\omega y})}{\text{æ}_t K^2} \times$$

$$\times \exp\left[i(\vec{K}\vec{r} + \text{æ}_t z)\right] d\vec{K}. \tag{24}$$

Задача о действии произвольных сил на поверхность упругого полупространства, граничащего с вакуумом, рассмотрена в /II/. Полученные там выражения для потенциалов смещений следуют из (I5),(I7) при $\varepsilon = 0$.

Отметим, что частный случай возбуждения объемных звуковых и упругих волн точечной гармонической нагрузкой, приложенной к границе раздела однородный газ – однородное изотропное твердое тело и действующей по нормали к ней, рассматривался в /I2/. В указанной работе, однако, не исследовано излучение поверхностных волн. Более общий случай, когда произвольно направленная сила приложена к одной из граничных или внутренних точек упругого полупространства, находящегося в контакте с газом, рассмотрен в /I3/. Автор работы /I3/ ограничился расчетом полей смещений и не исследовал энергетические характеристики волн.

При действии на поверхность твердого тела силовых источников мгновенная мощность излучения может быть вычислена по формуле /I4/

$$W = \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \vec{f}(\vec{r},t)\, \dot{\vec{u}}(\vec{r},t)\Big|_{z=0} d\vec{r}\,, \tag{25}$$

где точка над символом $\vec{u}$ означает дифференцирование по времени. Из (I5)-(I7), (I0) следует, что компоненты векторов смещений в P-, SV- и SH-волнах даются выражениями

$$u_x^{(P)} = \frac{i}{\mu} \iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left[(2\text{æ}_t \text{æ}_l + \varepsilon K_t^2)\vec{K}\vec{F} + \text{æ}_l (K_t^2 - 2K^2) F_z\right] K_x}{\text{æ}_l\, S_0(\omega, K)} \times$$

$$\times \exp\left[-i\omega t + i(\vec{K}\vec{r} + \text{æ}_l z)\right] d\omega\, d\vec{K}\,, \tag{26}$$

$$u_y^{(P)} = \frac{i}{\mu} \iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left[(2\text{æ}_t\text{æ}_1 + \varepsilon \kappa_t^2)\vec{\kappa}\vec{F} + \text{æ}_1(\kappa_t^2 - 2\kappa^2)F_z\right]\kappa_y}{\text{æ}_1 S_0(\omega,\kappa)} \times$$

$$\times \exp\left[-i\omega t + i(\vec{\kappa}\vec{r} + \text{æ}_\ell z)\right] d\omega\, d\vec{\kappa}, \qquad (27)$$

$$u_z^{(P)} = \frac{i}{\mu} \iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left[(2\text{æ}_t\text{æ}_1 + \varepsilon \kappa_t^2)\vec{\kappa}\vec{F} + \text{æ}_1(\kappa_t^2 - 2\kappa^2)F_z\right]\text{æ}_\ell}{\text{æ}_1 S_0(\omega,\kappa)} \times$$

$$\times \exp\left[-i\omega t + i(\vec{\kappa}\vec{r} + \text{æ}_\ell z)\right] d\omega\, d\kappa, \qquad (28)$$

$$u_x^{(SV)} = \frac{i}{\mu} \iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\kappa_x \text{æ}_t \left\{\left[\text{æ}_1(\kappa_t^2 - 2\kappa^2) + \varepsilon \kappa_t^2 \text{æ}_\ell\right]\vec{\kappa}\vec{F} - 2\text{æ}_\ell \kappa^2 \text{æ}_1 F_z\right\}}{\kappa^2 \text{æ}_1 S_0(\omega,\kappa)} \times \qquad (29)$$

$$\times \exp\left[-i\omega t + i(\vec{\kappa}\vec{r} + \text{æ}_t z)\right] d\omega\, d\vec{\kappa},$$

$$u_y^{(SV)} = \frac{i}{\mu} \iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\kappa_y \text{æ}_t \left\{\left[\text{æ}_1(\kappa_t^2 - 2\kappa^2) + \varepsilon \kappa_t^2 \text{æ}_\ell\right]\vec{\kappa}\vec{F} - 2\text{æ}_\ell \kappa^2 \text{æ}_1 F_z\right\}}{\kappa^2 \text{æ}_1 S_0(\omega,\kappa)} \times \qquad (30)$$

$$\times \exp\left[-i\omega t + i(\vec{\kappa}\vec{r} + \text{æ}_t z)\right] d\omega\, d\vec{\kappa},$$

$$u_z^{(SV)} = -\frac{i}{\mu} \iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left[\text{æ}_1(\kappa_t^2 - 2\kappa^2) + \varepsilon \kappa_t^2 \text{æ}_\ell\right]\vec{\kappa}\vec{F} - 2\text{æ}_\ell \kappa^2 \text{æ}_1 F_z}{\text{æ}_1 S_0(\omega,\kappa)} \times \qquad (3I)$$

$$\times \exp\left[-i\omega t + i(\vec{\kappa}\vec{r} + \text{æ}_t z)\right] d\omega\, d\vec{\kappa},$$

$$u_x^{(SH)} = -\frac{i}{\rho_2} \iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\kappa_y \kappa_t^2 (\kappa_x F_y - \kappa_y F_x)}{\omega^2 x_t \kappa^2} \times \qquad (32)$$

$$\times \exp\left[-i\omega t + i(\vec{k}\vec{r} + \varkappa z)\right] d\omega\, d\vec{k},$$

$$u_y^{(SH)} = \frac{i}{\rho_2} \iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{k_x k_t^2 (k_x F_y - k_y F_x)}{\omega^2 \varkappa_t k^2} \times$$

$$\times \exp\left[-i\omega t + i(\vec{k}\vec{r} + \varkappa_t z)\right] d\omega\, d\vec{k}. \tag{33}$$

Смещения в поверхностной волне Стонели представляет собой суперпозицию полей P- и SV-волн. Отражением этого факта является наличие полюсов в интегралах (26)-(31). Компоненты суммарных смещений поверхности полупространства в P- и SV-волнах имеют вид

$$u_x(0) = \frac{i}{\mu} \iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} \left\{ k_t^2 \left[\varkappa_1 \varkappa_t + \varepsilon(k^2 + \varkappa_\ell \varkappa_t)\right] \vec{k}\vec{F} + k^2 \varkappa_1 (k_t^2 - 2k^2 - \right.$$

$$\left. -2\varkappa_\ell \varkappa_t) F_z \right\} \frac{k_x}{k^2 \varkappa_1 S_0(\omega, k)} e^{-i\omega t + i\vec{k}\vec{r}} d\omega\, d\vec{k}, \tag{34}$$

$$u_y(0) = \frac{i}{\mu} \iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} \left\{ k_t^2 \left[\varkappa_1 \varkappa_t + \varepsilon(k^2 + \varkappa_\ell \varkappa_t)\right] \vec{k}\vec{F} + k^2 \varkappa_1 (k_t^2 - 2k^2 - \right.$$

$$\left. -2\varkappa_\ell \varkappa_t) F_z \right\} \frac{k_y}{k^2 \varkappa_1 S_0(\omega, k)} e^{-i\omega t + i\vec{k}\vec{r}} d\omega\, d\vec{k}, \tag{35}$$

$$u_z(0) = \frac{i}{\mu} \iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left[-(k_t^2 - 2k^2 - 2\varkappa_\ell \varkappa_t)\vec{k}\vec{F} + k_t^2 \varkappa_\ell F_z\right]}{S_0(\omega, k)} \times$$

$$\times\ e^{-i\omega t + i\vec{k}\vec{r}} d\omega\, d\vec{k}. \tag{36}$$

Рассмотрим вначале случай гармонических силовых источников. Средняя за период $T = 2\pi/\omega_0$ мощность излучения дается выражением

$$\overline{W} = -\frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left[i\omega_0 \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \vec{f}^{\,*}_{\omega}(x,y)\,\vec{u}(x,y)\Big|_{z=0} d\vec{r}\,\right], \tag{37}$$

где звездочка означает комплексное сопряжение. В формуле (37) удобно перейти к спектрам, переписав ее в виде

$$\overline{W} = -2\pi^2\omega_0\,\mathrm{Re}\left[i \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} U_{\omega}(\vec{K})\,\vec{F}^{*}_{\omega}(\vec{K})\,d\vec{K}\,\right]. \tag{38}$$

В (38) введено обозначение $U_{\omega}(\vec{K})$ для пространственного спектра смещений поверхности в гармонической волне:

$$U_{\omega}(\vec{K}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \vec{u}(\vec{r})\Big|_{z=0} e^{-i\vec{K}\vec{r}}\,d\vec{r}\,. \tag{39}$$

Подставляя в (38) явный вид величин $U_{\omega}(\vec{K})$ и $\vec{F}^{*}_{\omega}(\vec{K})$, получаем следующее выражение для мощности излучения:

$$\overline{W} = \frac{2\pi^2\omega_0}{\mu}\,\mathrm{Re}\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\vec{K}}{K^2 æ_1 S_0(K)} \Big\{ K_t^2 \left[æ_1 æ_t + \varepsilon(K^2 + æ_\ell æ_t)\right] \times$$

$$\times (\vec{K}\vec{F}_{\omega}\;\vec{K}\vec{F}^{*}_{\omega}) + K^2 æ_1 K_t^2 æ_\ell \left|F_{\omega z}\right|^2 + \tag{40}$$

$$+ K^2 æ_1 (K_t^2 - 2K^2 - 2æ_\ell æ_t)(F_{\omega z}\vec{K}\vec{F}^{*}_{\omega} - F_{\omega z}\vec{K}\vec{F}_{\omega}) \Big\}.$$

Перейдем под интегралом в (40) к полярным координатам на плоскости $K_x O K_y$ в соответствии с формулами

$$K_x = K\cos\varphi, \qquad K_y = K\sin\varphi.$$

Это позволяет представить мощность излучения в виде

$$\overline{W} = \frac{2\pi^2\omega_0}{\mu}\,\mathrm{Re}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\infty} \frac{K\,dK}{æ_1 S_0(K)} \Big\{ K_t^2 \left[æ_1 æ_t + \varepsilon(K^2 + æ_\ell æ_t)\right] \left|F_{\omega r}\right|^2 +$$

$$+ k_t^2 \varkappa_1 \varkappa_\ell |F_{\omega z}|^2 +$$

$$+ k\varkappa_1 (k_t^2 - 2k^2 - 2\varkappa_\ell \varkappa_t)(F_{\omega z} F_{\omega r}^* - F_{\omega z}^* F_{\omega r}) \Big\} , \qquad (41)$$

где

$$F_{\omega r} = F_{\omega x} \cos\varphi + F_{\omega y} \sin\varphi .$$

Вклад в реальную часть интеграла (4I) дают те участки пути интегрирования, где подынтегральная функция действительна (нетрудно видеть, что это интервал $0 \leq k \leq k_1$), а также полувычеты в лежащих на действительной оси полюсах подынтегрального выражения. Как отмечено выше, при условии $C_1 < C_R$ уравнение (I8) имеет один действительный корень $k_S$, соответствующий поверхностной волне Стонели.

Интеграл по $\varphi$ и $k$ в (4I) дает суммарную мощность излучения акустической волны, продольной и поперечной упругих волн и вытекающей волны (обозначим эту сумму $\overline{W}_\Sigma$):

$$\overline{W}_\Sigma = \frac{2\pi^2 \omega_0}{\mu} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{k_1} \frac{k\,dk}{\varkappa_1 S_0(k)} \Big\{ k_t^2 \big[\varkappa_1 \varkappa_t + \varepsilon (k^2 + \varkappa_\ell \varkappa_t)\big] |F_{\omega r}|^2 +$$

$$+ k_t^2 \varkappa_1 \varkappa_\ell |F_{\omega z}|^2 +$$

$$+ k\varkappa_1 (k_t^2 - 2k^2 - 2\varkappa_\ell \varkappa_t)(F_{\omega z} F_{\omega r}^* - F_{\omega z}^* F_{\omega r}) \Big\} . \qquad (42)$$

Мощность излучения поверхностной волны Стонели $\overline{W}_S$ пропорциональна полувычету в полюсе $k = k_S$ в интеграле по $k$ :

$$\overline{W}_S = - \frac{2\pi^3 \omega_0 k_S}{\rho_2 c_t^2 (k_S^2 - k_1^2)^{1/2} S_0'(k_S)} \Big\{ k_t^2 \big[ (k_S^2 - k_1^2)^{1/2} (k_S^2 - k_t^2)^{1/2} -$$

$$-\varepsilon\left(k_s^2-\sqrt{k_s^2-k_\ell^2}\sqrt{k_s^2-k_t^2}\right]\int_0^{2\pi}|F_{\omega r}(\vec{k}_s)|^2 d\varphi +$$

$$+k_t^2(k_s^2-k_1^2)^{1/2}(k_s^2-k_\ell^2)^{1/2}\int_0^{2\pi}|F_{\omega z}(\vec{k}_s)|^2 d\varphi +$$

$$+2k_s(k_s^2-k_1^2)^{1/2}(k_t^2-2k_s^2+2\sqrt{k_s^2-k_\ell^2}\sqrt{k_s^2-k_t^2})\int_0^{2\pi}\mathrm{Im}\left[F_{\omega z}(\vec{k}_s)F^*_{\omega r}(\vec{k}_s)\right]d\varphi\Bigg\}, \qquad (43)$$

где $\vec{F}(\vec{k}_s)=\vec{F}(k_s\cos\varphi,\ k_s\sin\varphi)$,

$$S_0'(k_s)=\left.\frac{dS_0}{dk}\right|_{k=k_s}=8k_s\left[2k_s^2-k_t^2-(k_s^2-k_\ell^2)^{1/2}(k_s^2-k_t^2)^{1/2}\right]+$$

$$+\frac{4k_s^3(k_\ell^2+k_t^2-2k_s^2)}{(k_s^2-k_\ell^2)^{1/2}(k_s^2-k_t^2)^{1/2}}-\varepsilon\frac{k_t^4 k_s(k_1^2-k_\ell^2)}{(k_s^2-k_\ell^2)^{1/2}(k_s^2-k_1^2)^{3/2}}.$$

Полная излучающая мощность $\bar{W}$ представляет собой сумму мощ - ностей $\bar{W}_\Sigma$ и $\bar{W}_s$ .

Рассмотрим частные случаи формулы (43). Пусть сила имеет толь- ко нормальную к границе раздела сред составляющую: $\vec{f}_\omega(\vec{r})=f_{\omega z}(\vec{r})\vec{e}_z$ . При этом

$$\bar{W}_s=-\frac{2\pi^3\omega_0^3 k_s(k_s^2-k_\ell^2)^{1/2}}{\rho_2 c_t^4\ S_0'(k_s)}\int_0^{2\pi}|F_{\omega z}(\vec{k}_s)|^2 d\varphi. \qquad (44)$$

Для цилиндрически симметричного распределения нагрузки из (44) по- лучаем

$$\bar{W}_s=-\frac{4\pi^4\omega_0^3 k_s(k_s^2-k_\ell^2)^{1/2}}{\rho_2 c_t^4\ S_0'(k_s)}|F_{\omega z}(k_s)|^2. \qquad (45)$$

В случае точечного источника, когда

$$f_{\omega z}(r) = f_0\,\delta(x)\,\delta(y)$$

и

$$F_{\omega z}(K_s) = f_0 / 4\pi^2$$

(здесь $f_0$ характеризует величину вертикальной нагрузки) мощность излучения волны Стонели дается выражением

$$\overline{W}_s = -\frac{f_0^2\,\omega_0^3\,K_s\,(K_s^2-K_\ell^2)^{1/2}}{4\rho_2\,c_t^4\,S_0'(K_s)}\,. \tag{46}$$

Ранее формулы (45), (46) были получены соответственно в /I5/ и /4/.

Если к поверхности полупространства приложена только касательная нагрузка, т.е. $\vec{f}_{\omega z} = 0$, $\vec{f}_{\omega r}(\vec{r}) \neq 0$, то выражение для мощности излучения волны Стонели имеет вид

$$\overline{W}_s = -\frac{2\pi^3\omega_0^3 K_s}{\rho_2 c_t^4 (K_s^2-K_1^2)^{1/2} S_0'(K_s)}\Big[\sqrt{K_s^2-K_1^2}\sqrt{K_s^2-K_t^2} - \\ -\varepsilon\Big(K_s^2-\sqrt{K_s^2-K_\ell^2}\sqrt{K_s^2-K_t^2}\Big)\Big]\int_0^{2\pi}\big|F_{\omega r}(\vec{K}_s)\big|^2 d\varphi\,. \tag{47}$$

Если горизонтальная сила действует только вдоль одной из координатных осей (например, оси $x$), и ее распределение по поверхности упругого полупространства таково, что модуль силы не зависит от угла $\varphi$, т.е. $F_{\omega r} = F_{\omega x}(K_s)\cos\varphi$ , то (47) преобразуется к виду

$$W_s = -\frac{2\pi^4\omega_0^3 K_s}{\rho_2 c_t^4 (K_s^2-K_1^2)^{1/2} S_0'(K_s)}\Big[\sqrt{K_s^2-K_1^2}\sqrt{K_s^2-K_t^2} - \\ -\varepsilon\Big(K_s^2\sqrt{K_s^2-K_\ell^2}\sqrt{K_s^2-K_t^2}\Big)\Big]\big|F_{\omega x}(K_s)\big|^2. \tag{48}$$

В случае точечного источника горизонтальной силы, когда

$$f_{\omega x} = f_0\,\delta(x)\,\delta(y)$$

и
$$F_{\omega x}(K_s)=f_0/4\pi^2,$$
из (48) получаем
$$\overline{W}_s=-\frac{f_0^2\,\omega_0^3\,K_s}{8\rho_2 c_t^4(K_s^2-K_1^2)^{1/2}S_0'(K_s)}\left[\sqrt{K_s^2-K_1^2}\sqrt{K_s^2-K_t^2}-\right.$$
(49)
$$\left.-\varepsilon\left(K_s^2-\sqrt{K_s^2-K_\ell^2}\sqrt{K_s^2-K_t^2}\right)\right].$$

Перейдем к рассмотрению генерации волн Стонели импульсными силовыми источниками. Энергия излучения упругих волн, выделенная за все время действия нагрузки, дается выражением (см.(25))
$$E=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}W(t)\,dt=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dt\iint\limits_{-\infty}^{+\infty}\vec{f}(\vec{r},t)\,\dot{\vec{u}}(r,t)\Big|_{z=0}\,d\vec{r}\;. \qquad (50)$$
Записывая величины $\vec{f}$ и $\dot{\vec{u}}$ в виде разложений в интеграл Фурье, преобразуем формулу (50) к виду
$$E=8\pi^3\iiint\limits_{-\infty}^{+\infty}\vec{F}^*(\vec{K},\omega)\,\dot{\vec{U}}(\vec{K},\omega)\,d\omega\,d\vec{K}\;, \qquad (51)$$

где
$$\dot{\vec{U}}(\vec{K},\omega)=\frac{1}{(2\pi)^3}\iiint\limits_{-\infty}^{+\infty}\dot{\vec{u}}(\vec{r},t)\,e^{i\omega t-i\vec{K}\vec{r}}\,d\vec{r}\,dt\;. \qquad (52)$$

Подставляя (13), (26)-(31) в (51) и переходя на плоскости $K_xOK_y$ к полярным координатам, получим следующее выражение для полной излучаемой энергии:
$$E=\frac{8\pi^3}{\mu}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\omega\,d\omega\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{+\infty}\frac{1}{æ_1 S_0(\omega,K)}\left\{K_t^2\left[æ_1æ_t+\varepsilon(K^2+æ_\ell æ_t)\right]|F_r|^2+\right.$$

$$+\varkappa_1 K_t^2 \varkappa_\ell |F_z|^2 + K\varkappa_1(K_t^2-2K^2-2\varkappa_\ell\varkappa_t)(F_z F_r^* - F_z^* F_r)\Big\} K\,dK\,, \tag{53}$$

где $F_r = F_x\cos\varphi + F_y\sin\varphi$. Отметим, что

$$\vec{F}^*(\vec{K},\omega) = \vec{F}(-\vec{K},-\omega).$$

При исследовании интеграла (53) области интегрирования $\omega > 0$ и $\omega < 0$ следует рассматривать отдельно. При $\omega > 0$ контур интегрирования по $K$ в (53) проходит ниже оси $\mathrm{Re}\,K$ и обходит полюс $K = K_S$ снизу, а при $\omega < 0$ путь интегрирования по $K$ лежит в области $\mathrm{Re}\,K > 0$ и обходит полюс $K = K_S$ сверху. Результат обхода полюса снизу равен полувычету в этом полюсе, а результат обхода полюса сверху – полувычету, взятому со знаком "минус".

При $\omega > 0$ аналитические функции $(K_{1,\ell,t}^2 - K^2)^{1/2}$ соответственно при $K < K_{1,\ell,t}$ определены как положительные величины, а при $\omega < 0$ – как отрицательные величины. В областях $K > K_{1,\ell,t}$ аналитические функции $(K_{1,\ell,t}^2 - K^2)^{1/2}$ определены как мнимая единица, умноженная на положительное число и при $\omega < 0$, и при $\omega > 0$.

Вычисляя вклад полюса $K = K_S$ при интегрировании по $K$ в (53), получаем выражение для энергии излучения волны Стонели:

$$E_S = -\frac{16\pi^4}{\rho_2 c_t^2 c_S}\int_0^\infty \frac{\omega^2\,d\omega}{(K_S^2-K_1^2)^{1/2} S_0'(K_S)}\int_0^{2\pi}\Big\{K_t^2\Big[\sqrt{K_S^2-K_1^2}\sqrt{K_S^2-K_t^2} -$$

$$-\varepsilon\Big(K_S^2-\sqrt{K_S^2-K_\ell^2}\sqrt{K_S^2-K_t^2}\Big)\Big]\,|F_r(\omega,\vec{K}_S)|^2 +$$

$$+K_t^2\sqrt{K_S^2-K_1^2}\sqrt{K_S^2-K_\ell^2}\,|F_z(\omega,\vec{K}_S)|^2 +$$

$$+2K_S\sqrt{K_S^2-K_1^2}\Big(K_t^2-2K_S^2+2\sqrt{K_S^2-K_\ell^2}\sqrt{K_S^2-K_t^2}\Big)\mathrm{Im}\big[F_z(\omega,\vec{K}_S)F_r^*(\omega,\vec{K}_S)\big]\Big\}\,d\varphi, \tag{54}$$

где $c_s = \omega / k_s$ – скорость волны Стонели.

В частном случае вертикальной нагрузки формула (54) примет вид

$$E_s = -\frac{16\pi^4 (c_\ell^2 - c_s^2)^{1/2}}{\rho_2 c_\ell c_t^4 c_s^2 \sigma'} \int_0^\infty \omega^2 d\omega \int_0^{2\pi} |F_z(\omega, \vec{k}_s)|^2 \, d\varphi \,. \qquad (55)$$

В (55) использовано обозначение

$$\sigma' = S_0'(k_s)/\omega_3 = \frac{8}{c_\ell c_t^2 c_s^3} \left[ c_\ell (2c_t^2 - c_s^2) - c_t (c_\ell^2 - c_s^2)^{1/2} (c_t^2 - c_s^2)^{1/2} \right] +$$

$$+ \frac{4(c_t^2 c_s^2 + c_\ell^2 c_s^2 - 2c_\ell^2 c_t^2)}{c_\ell c_t c_s^3 (c_\ell^2 - c_s^2)^{1/2} (c_t^2 - c_s^2)^{1/2}} - \varepsilon \frac{c_1 c_s^3 (c_\ell^2 - c_1^2)}{c_\ell c_t^4 (c_\ell^2 - c_s^2)^{1/2} (c_1^2 - c_s^2)^{3/2}} .$$

Если нагрузка обладает осевой симметрией, то энергия волны Стонели дается выражением

$$E_s = -\frac{32\pi^5 (c_\ell^2 - c_s^2)^{1/2}}{\rho_2 c_\ell c_t^4 c_s^2 \sigma'} \int_0^\infty |F_z(\omega, \omega/c_s)|^2 \omega^2 d\omega. \qquad (56)$$

В случае точечного источника, когда

$$f_z(\vec{r}, t) = f_0 \, p(t) \, \delta(x) \delta(y)$$

( $p(t)$ характеризует зависимость нагрузки от времени), пространственно-частотный спектр силы имеет вид

$$F_z(\omega, k_s) = \frac{f_0}{4\pi^2} \mathcal{P}(\omega),$$

где

$$\mathcal{P}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} p(t) \, e^{i\omega t} \, dt$$

– частотный спектр силы. Величина $E_s$ при этом описывается формулой

$$E_s = -\frac{2\pi f_0^2 (c_\ell^2 - c_s^2)^{1/2}}{\rho_2 c_\ell c_t^4 c_s^2 \sigma'} \int_0^\infty |\mathcal{P}(\omega)|^2 \omega^2 d\omega. \qquad (57)$$

Получение из выражения (53) формул для энергий излучения объемных волн и вытекающей псевдорэлеевской волны требует довольно громоздких выкладок, поэтому целесообразно проводить его в отдельной работе.

## Литература


1. Докучаев В.П., Разин А.В. Возбуждение волн в однородном полупространстве поверхностными источниками//Изв.АН СССР. Физика Земли. - 1990. - № 10. - С.81-87.
2. Орлов А.Л., Разин А.В. Энергия упругих волн, возбуждаемых в полупространстве нестационарными силовыми поверхностными источниками//Препринт № 336. - Нижний Новгород: НИРФИ, 1991. - - 27 с.
3. Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах. - М.: Наука, 1973. - - 343 с.
4. Разин А.В. Об излучении волн Стонели нормальным к границе газ-твердое тело гармоническим силовым источником//Изв.АН СССР.Физика Земли. - 1991. - № 10. - С.86-89.
5. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория упругости. - М.: Наука, 1965.- - 204 с.
6. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т.2. - М.: Наука, 1970. - - 568 с.
7. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. - М.: Наука, 1988. - - 736 с.
8. Бреховских Л.М., Годин О.А. Акустика слоистых сред. - М.: Наука, 1989. - 416 с.
9. Фелсен С., Маркувиц Н. Излучение и рассеяние волн/Пер.с англ. под ред. М.Л.Левина. - М.: Мир, 1978. - 551 с.
10. Roever W.L., Vining T.F., Strick E. - Propagation of elastic wave motion from an impulsive source along a fluid/solid interface// Philos.Trans.Roy.Soc.London.-1959.-V.251,N.1000.- P. 455-523.

II. Докучаев В.П., Разин А.В. Возбуждение упругих волн в твердом полупространстве поверхностными источниками"//Препринт № 224.- - Горький: НИРФИ, 1987. - 33 с.

I2. Заславский Ю.М. К оценке мощности инфразвука, побочно излучаемого в атмосферу при вибрационном просвечивании Земли//Изв. АН СССР. Физика Земли. - 1982. - № 9. - С.86-89.

I3. Roberts R.A. Elastodynamic responce of contacting fluid and solid half-spaces to a three-dimensional point load// Wave Motion.-1990.- V.12, N.6.- P. 583-593.

I4. Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. - Киев: Наук.думка, 198I. - 284 с.

I5. Разин А.В. Мощность излучения волны Стонели, возбуждаемой нормальным к границе раздела газ - твердое тело гармоническим силовым воздействием//Препринт № 287. - Горький: НИРФИ, 1989.- - I2 с.

Дата поступления статьи
I7 января 1992 г.

Андрей Владимирович Разин

ВОЗБУЖДЕНИЕ ВОЛНЫ СТОНЕЛИ
РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ СИЛОВЫМИ ИСТОЧНИКАМИ,
ДЕЙСТВУЮЩИМИ НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА
ГАЗ - ТВЕРДОЕ ТЕЛО

---

Подписано в печать 10.02.92 г. Формат 60x84/16.
Бумага писчая. Печать офсетная. Объем 1,05 усл.п.л.
Заказ 5232. Тираж 90. Бесплатно.

---

Отпечатано на ротапринте НИРФИ