

Нижегородский научно-исследовательский радиофизический институт
Министерства науки, высшей школы и технической политики
Российской Федерации

П р е п р и я т № 344

ПРЕЛОМЛЕНИЕ СФЕРИЧЕСКОЙ ГАРМОНИЧЕСКОЙ ЗВУКОВОЙ ВОЛНЫ
НА ПЛОСКОЙ ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА ГАЗ - ТВЕРДОЕ ТЕЛО

Т.В.Ерзякова
А.В.Разин

Нижегород, 1992

Е р г а к о в а Т . В . , Р а з и н А . В .

ПРЕЛОМЛЕНИЕ СФЕРИЧЕСКОЙ ГАРМОНИЧЕСКОЙ ЗВУКОВОЙ ВОЛНЫ НА ПЛОСКОЙ ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА ГАЗ - ТВЕРДОЕ ТЕЛО//Препринт № 344.-
- Нижний Новгород: НИРФИ, 1992. - 25 с.

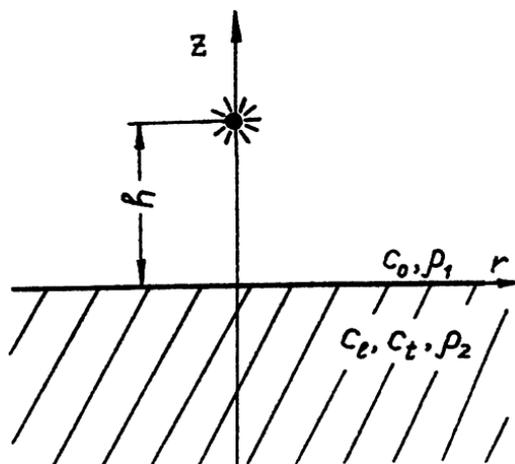
УДК 534.232

Методом преобразований Фурье решена задача о возбуждении упругих волн точечным гармоническим звуковым источником, находящимся в однородном газе над поверхностью однородного изотропного твердого полупространства. Проведены детальные численные и аналитические исследования смещений границы раздела этих сред. Обнаружена сложная пространственная структура поля смещений. Показано, что она обусловлена, главным образом, интерференцией объемных волн, которые возбуждаются звуковой волной, падающей непосредственно на данную область поверхности, и поверхностной волны, распространяющейся от участка границы, располагающегося под источником звука.

Исследование возбуждения упругих волн звуковым источником, находящимся в контактирующем с твердым телом газе, представляет интерес для ряда приложений. Одной из областей применения бесконтактного возбуждения сейсмических волн является сейсморазведка малых глубин. Еще больший интерес оно представляет для ультразвуковой дефектоскопии в ситуации, когда непосредственный контакт с исследуемым образцом по каким-либо причинам затруднен или нежелателен и необходимо возбудить в нем упругие волны дистанционно с помощью звукового источника.

В настоящей работе методом преобразований Фурье решена задача о возбуждении упругих волн точечным гармоническим звуковым источником, находящимся в однородном газе над поверхностью однородного изотропного твердого полупространства. Проведены численные и аналитические исследования смещений границы раздела этих сред. Обнаружена сложная пространственная структура поля смещений. Показано, что она обусловлена, главным образом, интерференцией упругих волн, которые возбуждаются звуковой волной, падающей непосредственно на данную область поверхности, и поверхностной волны, распространяющейся от участка границы, располагающегося под источником.

Пусть плоскость $z = 0$ цилиндрической системы координат r, φ, z совпадает с границей раздела однородного газа, имеющего



плотность ρ_1 и скорость звука c_0 и заповняющего полупространство $z > 0$, и однородного изотропного твердого тела, занимающего полупространство $z < 0$ и характеризуемого плотностью ρ_2 и параметрами Ламе λ и μ . Скорости продольной c_e -и поперечной c_t -волн выражаются через параметры Ламе и плотность твердого тела формулами $c_e = [(\lambda + 2\mu)/\rho_2]^{1/2}$, $c_t = (\mu/\rho_2)^{1/2}$. В газе на высоте h над началом координат расположен точечный гармонический звуковой источник (рис. I), который создавал

К постановке задачи
Рис. I

бы в отсутствие границ возмущение давления в виде сферической волны

$$p_0 = \frac{\rho_1 \omega^2 V_0}{R} e^{-ik_0 R + i\omega t} \quad (I)$$

В (I) t - время, ω - циклическая частота волны, $k_0 = \omega/c_0$ - волновое число звука в газе, V_0 - коэффициент размерности объема, характеризующий амплитуду волны, R - расстояние от источника до точки наблюдения.

Акустические возмущения плотности ρ'_1 , давления p' и скорости \vec{v}'_1 в газе можно описывать системой уравнений гидродинамики, которые после линеаризации принимают вид [2/

$$\frac{\partial \rho'_1}{\partial t} + \rho_1 \operatorname{div} \vec{v}'_1 = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \vec{u}_1}{\partial t} + \frac{\nabla p'_1}{\rho_1} = 0, \quad (3)$$

$$\rho' = c_0^2 \rho'_1. \quad (4)$$

Малые смещения \vec{u}_2 в упругих волнах в твердом теле описываются уравнением Ламэ [3]:

$$\rho_2 \frac{\partial^2 \vec{u}_2}{\partial t^2} - (\lambda + \mu) \text{grad div } \vec{u}_2 - \mu \Delta \vec{u}_2 = 0. \quad (5)$$

На границе раздела газ - твердое тело выполняются условия непрерывности перпендикулярных к границе компонент смещений и тензора напряжений, а также равенства нулю тангенциальных компонент тензора напряжений в твердом теле [4, 5]:

$$u_{1z} = u_{2z}, \quad \sigma_{zz} = -\rho', \quad \sigma_{rz} = 0 \quad \text{при } z = 0. \quad (6)$$

При записи (6) учтено, что тензор напряжений в газе имеет вид $\sigma_{ij} = -\rho' \delta_{ij}$, где

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

- символ Кронекера. Компоненты тензора напряжений в твердом теле связаны со смещениями соотношением

$$\sigma_{ij} = \lambda \text{div } \vec{u}_2 \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial u_{2i}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_{2j}}{\partial x_i} \right). \quad (7)$$

Возмущения в газе будем описывать с помощью потенциала смещений φ_1 , а в твердом теле - с помощью скалярного φ_2 и векторного $\vec{\psi}_2$ потенциалов таких, что смещения \vec{u}_1 и давление ρ' в газе и смещения \vec{u}_2 в твердом теле определяются выражениями

$$\vec{u}_1 = \text{grad } \varphi_1, \quad p' = -\rho_1 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2}, \quad (8)$$

$$\vec{u}_2 = \text{grad } \varphi_2 + \text{rot } \vec{\psi}_2, \quad \text{div } \vec{\psi}_2 = 0. \quad (9)$$

Для потенциалов из (2)–(5), (8), (9) можно получить волновые уравнения

$$\Delta \varphi_1 - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} = 0, \quad (10)$$

$$\Delta \varphi_2 - \frac{1}{c_p^2} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2} = 0, \quad \Delta \vec{\psi}_2 - \frac{1}{c_t^2} \frac{\partial^2 \vec{\psi}_2}{\partial t^2} = 0,$$

которые необходимо решать с граничными условиями (6) и условиями излучения, требующими, чтобы при $|z| \rightarrow \infty$ поля имели вид волн, уходящих от источника [6].

Решая уравнения (10) с граничными условиями (6) методом преобразований Фурье и учитывая цилиндрическую симметрию задачи (она позволяет выбрать векторный потенциал таким образом, что $\vec{\psi}_2 = \psi_2 \vec{e}_\varphi$, где \vec{e}_φ – орт оси φ), представим потенциалы в виде (временной фактор $\exp(i\omega t)$ опущен)

$$\varphi_1 = \varphi_0 + V_0 \int_0^\infty Q_1(k) J_0(kr) e^{-\nu_1(z-h)} dk, \quad (11)$$

$$\varphi_2 = V_0 \int_0^\infty Q_2(k) J_0(kr) e^{\nu_2(z-h)} dk, \quad (12)$$

$$\psi_2 = V_0 \int_0^\infty S_2(k) J_0(kr) e^{\nu_2'(z-h)} dk, \quad (13)$$

где

$$\varphi_0 = V_0 \int_0^\infty \frac{k}{\nu_1} J_0(kr) e^{-\nu_1|z-h|} dk = \frac{V_0}{R} e^{-ik_0 R} \quad (14)$$

$$(R = [(z-h)^2 + r^2]^{1/2}),$$

V_0 – величина, имеющая

размерность объема) есть разложение поля сферической волны в интеграл Зоммерфельда /7/. В формулах (II)-(I4) введены следующие обозначения:

$$Q_1(k) = \frac{k \left\{ \nu_1 [(2k^2 - k_t^2)^2 - 4\nu_2 \nu_2' k^2] - \rho_0 \nu_2 k_t^4 \right\} e^{-2\nu_1 h}}{\nu_1 \Delta(k)},$$

$$Q_2(k) = - \frac{2k(2k^2 - k_t^2) \rho_0 k_t^2 e^{-(\nu_1 - \nu_2)h}}{\Delta(k)},$$

$$S_2(k) = \frac{4k \nu_2 \rho_0 k_t^2 e^{-(\nu_1 - \nu_2')h}}{\Delta(k)},$$

$$\Delta(k) = \nu_1 R_0(k) + \rho_0 \nu_2 k_t^4, \quad \rho_0 = \frac{P_1}{P_2},$$

$$R_0(k) = (2k^2 - k_t^2)^2 - 4k^2 \nu_2 \nu_2',$$

$$\nu_1 = \sqrt{k^2 - k_o^2}, \quad \nu_2 = \sqrt{k^2 - k_e^2}, \quad \nu_2' = \sqrt{k^2 - k_t^2},$$

$k_{e,t} = \omega/c_{e,t}$ - волновые числа продольной и поперечной волн в твердом теле, J_0 - функция Бесселя нулевого порядка.

Исходя из условий излучения, необходимо считать, что при $k > k_{oe,t}$ реальные части аналитических функций ν_1, ν_2, ν_2' являются положительными числами (этим обеспечивается сходимость интегралов (II)-(I4) при $|z| \rightarrow \infty$), а при $k < k_{oe,t}$ выполняются соотношения

$$\sqrt{k^2 - k_{oe,t}^2} = i \sqrt{k_{oe,t}^2 - k^2}$$

(при этом подынтегральные выражения в (II)-(I4) имеют вид волн, уходящих от источника).

Из (I2), (I3), (9) следует, что выражения для вертикальных и горизонтальных смещений в твердом теле ($z < 0$) имеют вид

$$u_{z_2} = 2\rho_0 v_0 k_t^2 \int_0^{\infty} v_2 k e^{-v_1 h} \frac{2k^2 e^{v_2 z} - (2k^2 - k_t^2) e^{v_2 z}}{\Delta(k)} J_0(kr) dk, \quad (I5)$$

$$u_{r_2} = 2\rho_0 v_0 k_t^2 \int_0^{\infty} k^2 e^{-v_1 h} \frac{(2k^2 - k_t^2) e^{v_2 z} - 2v_2 v_1' e^{v_2 z}}{\Delta(k)} J_1(kr) dk, \quad (I6)$$

где J_1 - функция Бесселя первого порядка.

Смещения и давление в газе ($z > 0$) можно получить из (II), (I4), (8), причем следует отдельно рассматривать области $z < h$ и $z > h$. При $0 \leq z < h$ вертикальные и горизонтальные смещения и давление описываются формулами

$$u_{z_1} = v_0 \int_0^{\infty} k e^{-v_1 h} \frac{\Delta(k) e^{v_1 z} - s(k) e^{-v_1 z}}{\Delta(k)} J_0(kr) dk, \quad (I7)$$

$$u_{r_1} = -v_0 \int_0^{\infty} \frac{k^2}{v_1} e^{-v_1 h} \frac{\Delta(k) e^{v_1 z} + s(k) e^{-v_1 z}}{\Delta(k)} J_1(kr) dk, \quad (I8)$$

$$P' = -\rho_1 \omega^2 v_0 \int_0^{\infty} \frac{k}{v_1} e^{-v_1 h} \frac{\Delta(k) e^{v_1 z} - s(k) e^{-v_1 z}}{\Delta(k)} J_0(kr) dk. \quad (I9)$$

При $z > h$ эти величины даются выражениями

$$u_{z_1} = -v_0 \int_0^{\infty} k e^{-v_1 z} \frac{\Delta(k) e^{v_1 h} + s(k) e^{-v_1 h}}{\Delta(k)} J_0(kr) dk, \quad (20)$$

$$u_{r1} = -V_0 \int_0^{\infty} \frac{k^2}{\nu_1} e^{-\nu_1 z} \frac{\Delta(k) e^{\nu_1 h} + s(k) e^{-\nu_1 h}}{\Delta(k)} J_1(kr) dk, \quad (21)$$

$$p' = -\rho_1 \omega^2 V_0 \int_0^{\infty} \frac{k}{\nu_1} e^{-\nu_1 z} \frac{\Delta(k) e^{\nu_1 h} + s(k) e^{-\nu_1 h}}{\Delta(k)} J_0(kr) dk. \quad (22)$$

В (17)-(22) введено обозначение

$$s(k) = \nu_1 \left[(2k^2 - k_t^2)^2 - 4\nu_2 \nu_2' k^2 \right] - \rho_0 \nu_2 k_t^4.$$

Приведем также выражения для смещений поверхности упругого полупространства ($z = 0$):

$$u_z(0) = 2\rho_0 V_0 k_t^4 \int_0^{\infty} \frac{\nu_2 k}{\Delta(k)} e^{-\nu_1 h} J_0(kr) dk, \quad (23)$$

$$u_r(0) = 2\rho_0 V_0 k_t^2 \int_0^{\infty} \frac{2k^2 - k_t^2 - 2\nu_2 \nu_2'}{\Delta(k)} k^2 e^{-\nu_1 h} J_1(kr) dk. \quad (24)$$

Ввиду сложности интегралов (17)-(24) их детальный количественный анализ при произвольном взаимном расположении излучателя и приемника не представляется возможным. Аналитически эти интегралы могут быть приближенно вычислены в волновой зоне, причем следует рассматривать вклады как точек стационарной фазы, так и полюсов подынтегральных выражений. В случае, когда высоты излучателя h и приемника z над границей твердого тела, а также горизонтальное расстояние r между ними составляет не более нескольких длин звуковых волн в газе, интегралы (17)-(24) могут быть оценены численно. Дальнейшее увеличение h , z или r приводит к появлению быстрых осцилляций подынтегральных функций, что делает время счета при численном интегрировании неприемлемо большим.

Наибольший практический интерес представляет расчет смещений в упругих волнах при $Z = 0$, поскольку в реальных условиях они могут быть измерены именно на поверхности твердого тела. Кроме того, во многих приложениях реализуется ситуация, когда источник звука расположен на малой (порядка длины звуковой волны или меньше ее) высоте над упругим полупространством и требуется знать смещения поверхности на малых расстояниях от излучателя. В этом случае вычисление интегралов вида (23), (24) асимптотическими методами может привести к некорректным результатам, так что они могут быть проанализированы только численно.

Помимо того, что подынтегральные функции в (23), (24) являются комплексными и осциллирующими, сложность их численного исследования усугубляется наличием двух полюсов, связанных с волнами Рэлея и Стонели. Соответствующие этим полюсам волновые числа находятся из решения уравнения /4, 5/

$$(2k^2 - k_t^2)^2 - 4k^2 \sqrt{k^2 - k_e^2} \sqrt{k^2 - k_t^2} + \rho_0 k_t^4 \frac{\sqrt{k^2 - k_e^2}}{\sqrt{k^2 - k_0^2}} = 0. \quad (25)$$

Один из корней уравнения (25) является действительным, что соответствует поверхностной волне, а другой комплексным, что соответствует вытекающей волне. В зависимости от соотношения между скоростями волн в газе и в твердом теле одна из волн (Рэлея или Стонели) должна быть поверхностной, при этом другая будет вытекающей /4, 5/. В частности, если скорость звука в газе меньше скоростей упругих волн в твердом теле, то волна Стонели будет поверхностной, а волна Рэлея - вытекающей /4, 5/. В /8/ такая вытекающая волна названа псевдорэлеевской. Подробный анализ решений уравнения (25) дан в /9/.

Для численного интегрирования существенным является тот факт, что при любом соотношении между акустическими параметрами газа и твердого тела на действительной оси, по которой идет интегрирование в (23), (24), лежит полюс.

Численное интегрирование в (23), (24) будем проводить следуя методу, предложенному в работе /10/. Данный метод заключается во введении малых мнимых добавок к волновым числам k_0 , k_e и k_t , что соответствует затуханию волн. При этом оба решения уравнения (25) становятся комплексными, и полюс подынтегральных выражений в (23), (24) смещается с действительной оси, являющейся путем интегрирования. Знак мнимых частей волновых чисел выбирается из условия спада амплитуд волн с ростом расстояния от источника, и для принятой здесь формы записи временного фактора $\exp(i\omega t)$ должен быть отрицательным.

Остановимся на выборе величин мнимых добавок к волновым числам. При численном интегрировании в (23), (24) необходимо перейти к безразмерным величинам. Приняв за единицу измерения волновых чисел k_e и k_t волновое число звука в газе k_0 , перепишем (23) и (24) в виде

$$u_z = 2\rho_0 k_0^2 V_0 c_3^4 \int_0^{\infty} \frac{b_2 a}{\Delta_1} e^{-k_0 b_1 h} J_0(a k_0 r) da, \quad (26)$$

$$u_r = 2\rho_0 k_0^2 V_0 c_3^2 \int_0^{\infty} \frac{a^2 (2a^2 - c_3^2 - 2b_2 b_3)}{\Delta_1} e^{-k_0 b_1 h} J_1(a k_0 r) da. \quad (27)$$

В формулах (26), (27) использованы следующие обозначения:

$$\Delta_1 = b_1 [(2a^2 - c_3^2)^2 - 4b_2 b_3 a^2] + \rho_0 c_3^4 b_2,$$

$$b_1 = \sqrt{a^2 - 1} = \gamma_1 / k_0, \quad b_2 = \sqrt{a^2 - c_2^2} = \gamma_2 / k_0,$$

$$b_3 = \sqrt{a^2 - c_3^2} = \gamma_3 / k_0, \quad c_2 = k_e / k_0,$$

$$c_3 = k_t / k_0, \quad a = k / k_0$$

- безразмерная переменная интегрирования.

При программной реализации метода /10/ для вычисления интегралов (26), (27) мнимая добавка вводилась под корни β_1, β_2 и β_3 , т.е. производились замены:

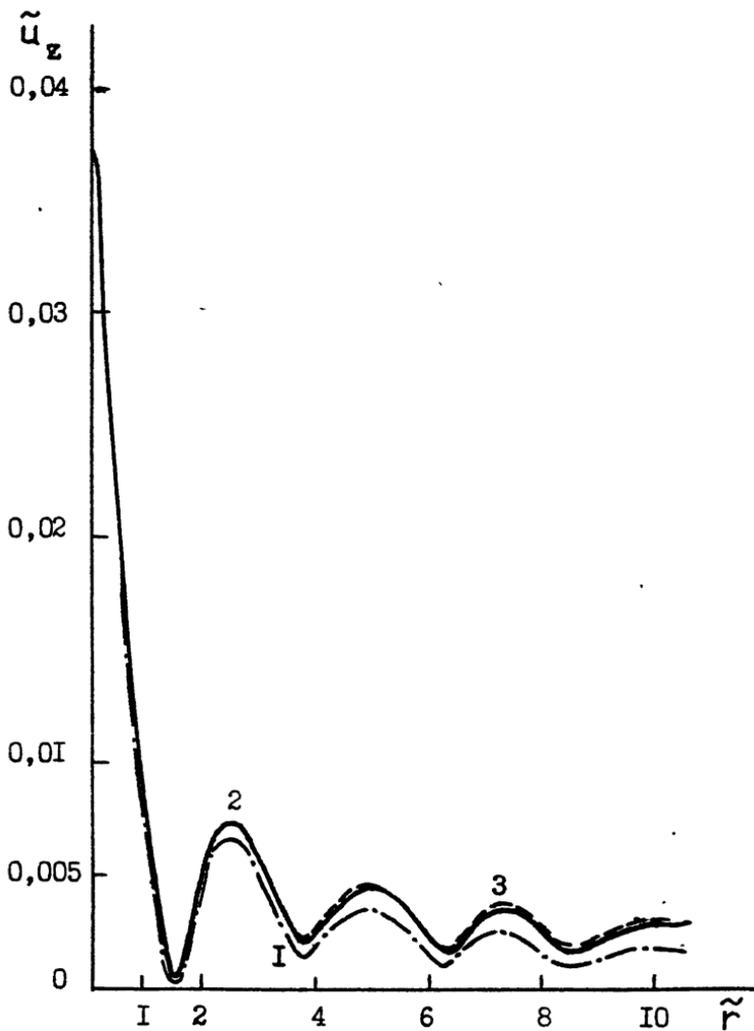
$$\sqrt{a^2-1} \rightarrow \sqrt{a^2-1+i\epsilon}, \quad \sqrt{a^2-c_2^2} \rightarrow \sqrt{a^2-c_2^2+i\epsilon}, \quad \sqrt{a^2-c_3^2} \rightarrow \sqrt{a^2-c_3^2+i\epsilon},$$

где ϵ — действительное положительное число. Величина ϵ выбирается из следующих соображений. Во-первых, значение ϵ должно быть столь малым, что его уменьшение на порядок не приводило бы к практически ощутимым изменениям результата интегрирования. Во-вторых, время счета, которое возрастает при уменьшении ϵ , не должно становиться неприемлемо большим. Расчеты показали (см. рис.2), что целесообразно полагать $\epsilon = 10^{-3}$. Результаты, приведенные на рис.2 и далее, получены при значении плотности газа и скорости звука в нем $\rho_1 = 1,29 \text{ кг/м}^3$, $c_0 = 340 \text{ м/с}$, что соответствует воздуху. Плотность твердого тела всюду принимается равной $\rho_2 = 2000 \text{ кг/м}^3$, а $V_0 = \lambda_0^3$.

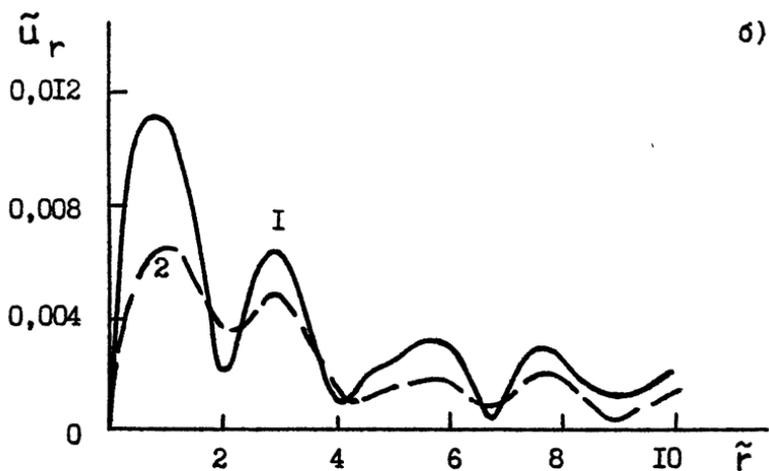
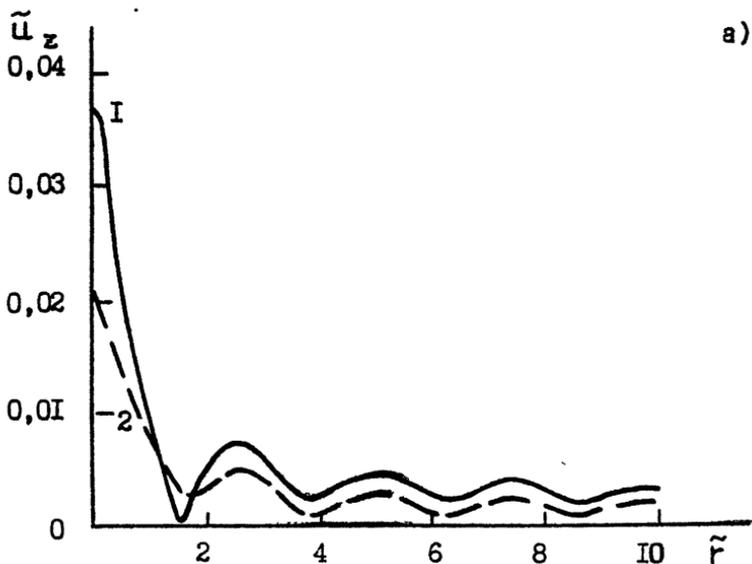
Результаты расчетов зависимостей величин $\tilde{u}_z = u_z / \lambda_0$ и $\tilde{u}_r = u_r / \lambda_0$ от отношения горизонтального расстояния к длине звуковой волны в газе $r = r / \lambda_0$ (будем называть их соответственно приведенными смещениями и приведенным расстоянием) при различных высотах источника звука представлены на рис.3, 4. Из их рассмотрения следует, что пространственное распределение смещений имеет сложный осцилляторный характер. Необходимо отметить, что размах осцилляций уменьшается с ростом высоты источника.

Зависимости $\tilde{u}_z(\tilde{r})$, $\tilde{u}_r(\tilde{r})$ при фиксированной высоте источника звука для различных скоростей упругих волн в твердом теле приведены на рис.5, 6. Их анализ показывает, что при $h \sim \lambda_0$ выраженный осцилляторный характер кривых $\tilde{u}_{z,r}(\tilde{r})$ проявляется только в том случае, когда скорость поперечной волны в твердом теле c_t превышает скорость звука в газе c_0 . Из сравнения рис.5, 6 с рис.3, 4, однако, видно, что при $h < \lambda_0$ осцилляции возникают и при $c_t < c_0$.

Отметим также, что при $h \sim \lambda_0$ и $c_t > c_0$ z — компонента смещений имеет максимальное значение не на проходящей через ис-

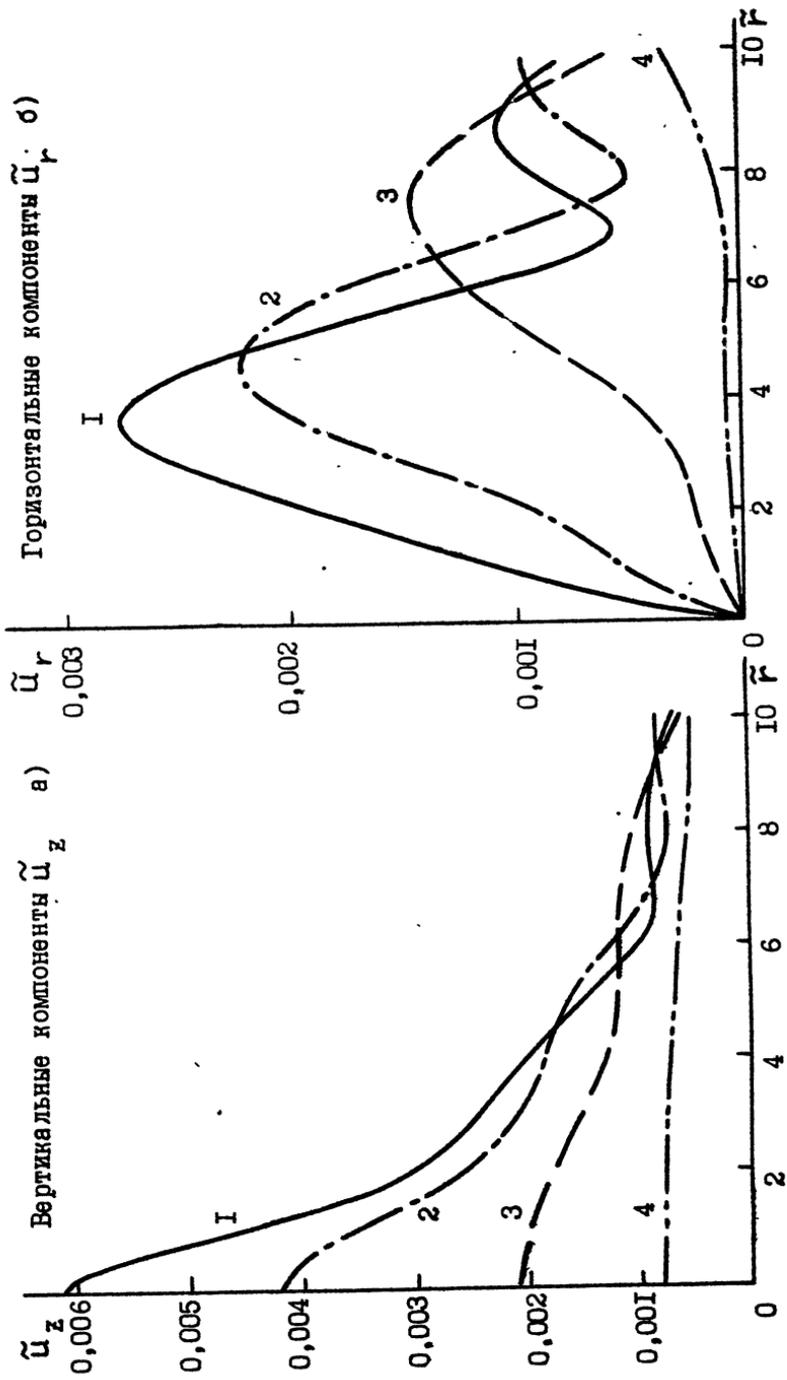


Р и с. 2. Зависимости $\tilde{u}_z = u_z / \lambda_0$ от $\tilde{r} = r / \lambda_0$ при $c_t = 450$ м/с, $c_t = 260$ м/с, $h = 0,147\lambda_0$ для различных величин ϵ :
 1 - $\epsilon = 10^{-2}$
 2 - $\epsilon = 10^{-3}$
 3 - $\epsilon = 10^{-4}$

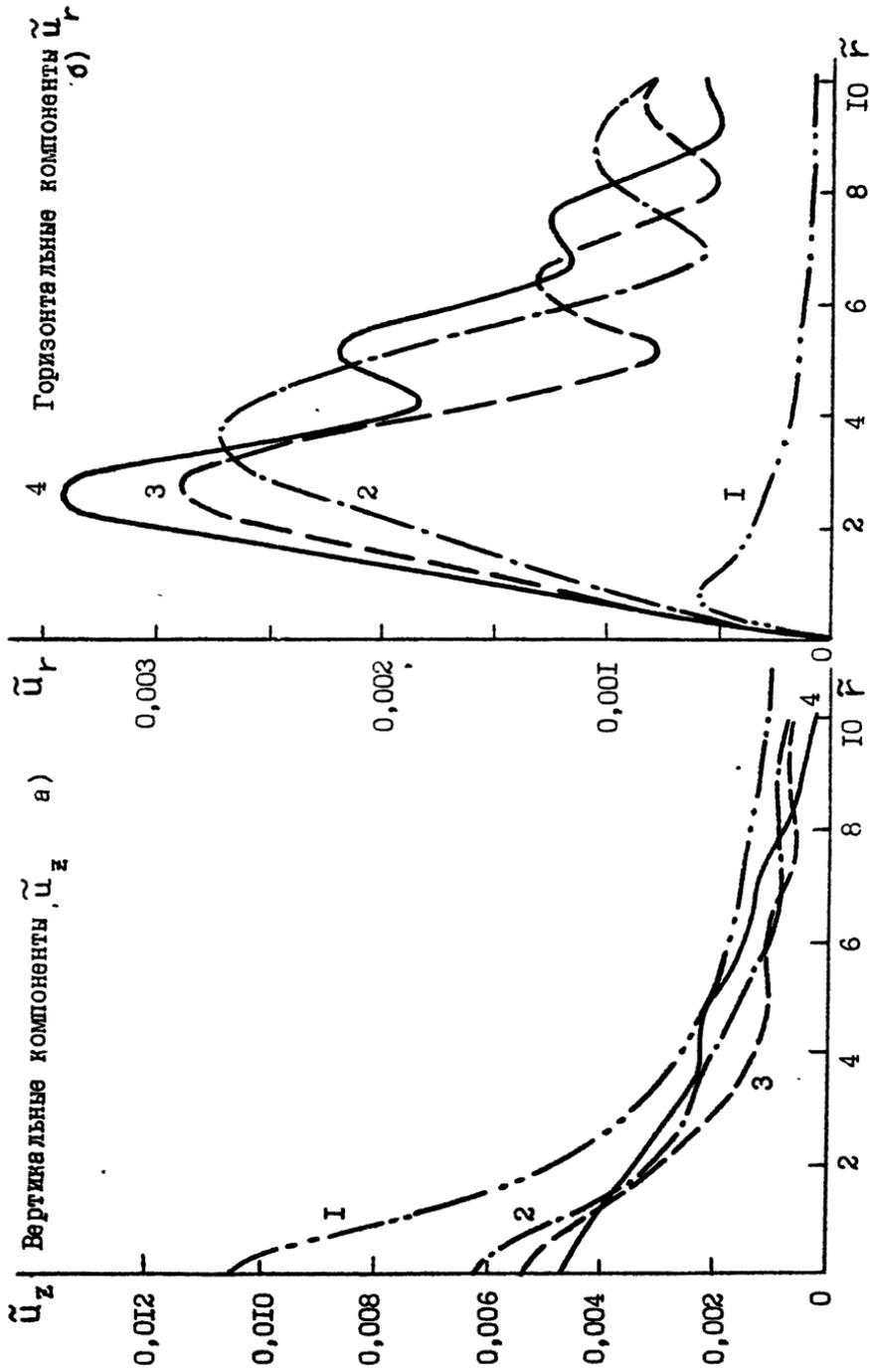


Р и с. 3. Зависимости \tilde{u}_z от \tilde{r} (а) и \tilde{u}_r от \tilde{r} (б) при $c_e = 450$ м/с, $c_t = 260$ м/с.

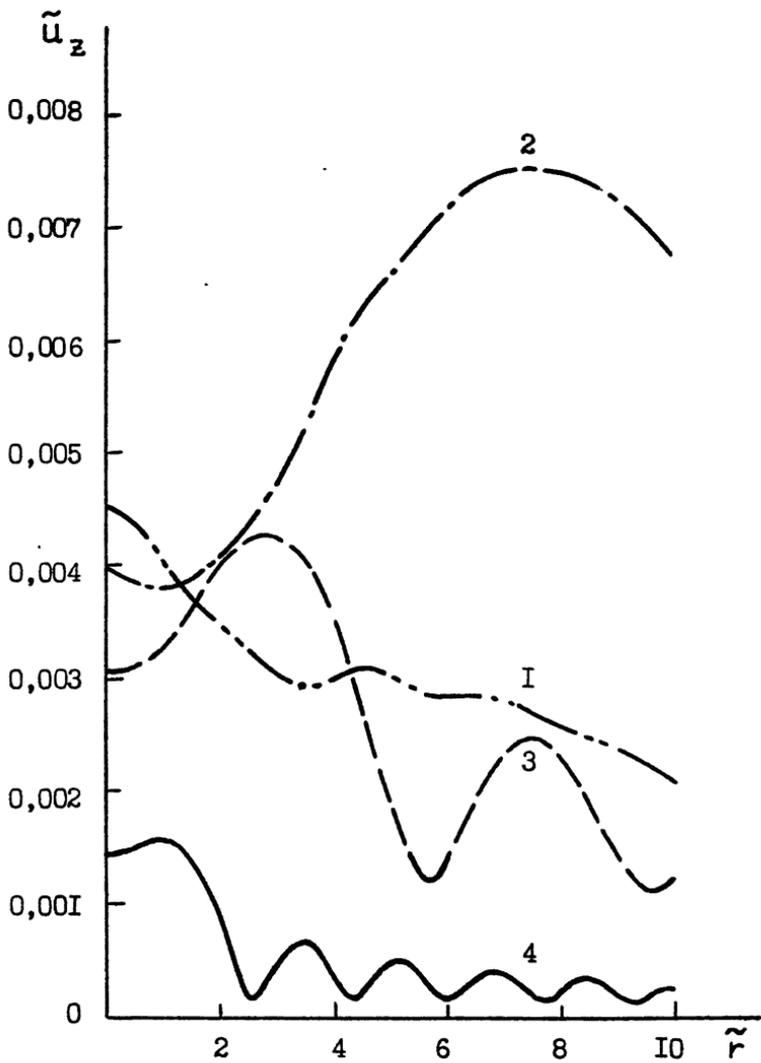
1 - $h = 0,147\lambda_0$, 2 - $h = 0,294\lambda_0$



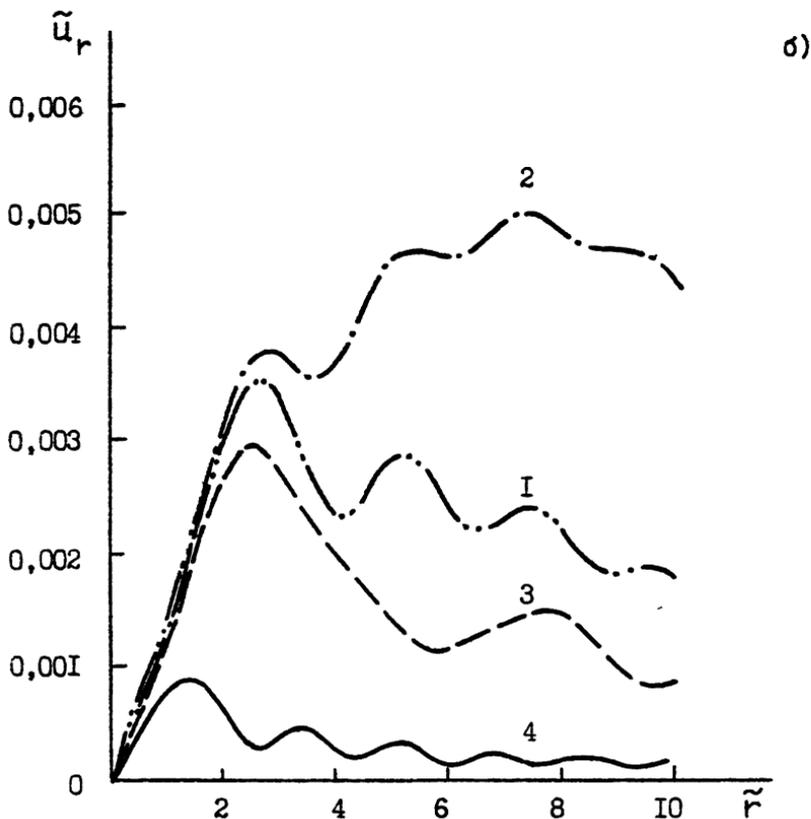
Р и с. 4. Зависимости приведенных смещений от приведенного расстояния для различных высот источника при $\sigma_t = 450$ м/с, $\sigma_t = 260$ м/с: 1 - $h = \lambda_0$, 2 - $h = 1,47 \lambda_0$, 3 - $h = 2,94 \lambda_0$, 4 - $h = 7,35 \lambda_0$.



Р и с. 5. Зависимости приведенных смещений от приведенного расстояния для различных скоростей упругих волн при $h = \lambda_0$: 1 - $\sigma_t = 150$ м/с, $\sigma_r = 259,7$ м/с, 2 - $\sigma_t = 260$ м/с, $\sigma_r = 450$ м/с, 3 - $\sigma_t = 300$ м/с, $\sigma_r = 519,3$ м/с, 4 - $\sigma_t = 340$ м/с, $\sigma_r = 588,5$ м/с



a)



Р и с. 6. Зависимости приведенных смещений от приведенного расстояния для скоростей упругих волн, больших скорости звука в газе, при $h = \lambda_0$:
 1 - $c_t = 350$ м/с, $c_l = 605,9$ м/с,
 2 - $c_t = 400$ м/с, $c_l = 692,4$ м/с,
 3 - $c_t = 500$ м/с, $c_l = 865,5$ м/с,
 4 - $c_t = 1000$ м/с, $c_l = 1500$ м/с .

а) Вертикальные компоненты \tilde{u}_z ,

б) Горизонтальные компоненты \tilde{u}_r .

точник нормали к поверхности твердого тела, а при некотором $r \neq 0$ (см. рис. 6а).

Для выяснения природы осцилляций в зависимостях $\tilde{u}_z(\tilde{r}), \tilde{u}_r(\tilde{r})$ проведем асимптотический анализ интегралов (23), (24). Для этого перейдем в подынтегральных выражениях от функций Бесселя J_0 и J_1 к функциям Ханкеля второго рода $H_0^{(2)}$ и $H_1^{(2)}$, причем используем для них асимптотики при больших значениях аргумента. Это позволяет приближенно представить вертикальные и горизонтальные компоненты смещений в виде

$$u_z \approx \rho_0 V_0 \sqrt{\frac{2}{\pi r}} e^{i\frac{\pi}{4}} \int_{\infty e^{-i\pi}}^{\infty} \frac{k_t^4 \nu_2}{\Delta(k)} e^{-\nu_1 h} e^{-ikr\sqrt{k}} dk, \quad (28)$$

$$u_r \approx \rho_0 V_0 \sqrt{\frac{2}{\pi r}} e^{i\frac{3\pi}{4}} \int_{\infty e^{-i\pi}}^{\infty} \frac{k_t^2 k (2k^2 - k_t^2 - 2\nu_1 \nu_2)}{\Delta(k)} e^{-\nu_1 h} e^{-ikr\sqrt{k}} dk. \quad (29)$$

В (28), (29) контур интегрирования в области $\text{Re } k < 0$ проходит ниже действительной оси (по отрицательной части действительной оси проведен разрез, обеспечивающий однозначность определения аналитической функции \sqrt{k} на комплексной плоскости k). Именно с этим связано задание нижних пределов интегрирования в (28), (29) в виде $\infty e^{-i\pi}/6$.

Оценивая интегралы (28), (29) методом перевала [7] получаем выражения, описывающие смещения поверхности полупространства, вызываемые приходящим непосредственно в данную точку звуковым лучом:

$$u_z^{(n)} \approx \frac{2\rho_0 V_0 k_t^4 \nu_{2n} [k_n (k_n^2 - k_0^2)^{3/2}]^{1/2}}{k_0 \sqrt{hr} \Delta(k_n)} e^{-i(k_0 R - \frac{\pi}{4})}, \quad (30)$$

$$u_r^{(n)} \approx \frac{2\rho_0 V_0 k_t^2 k_n [k_n (k_n^2 - k_0^2)]^{3/2} (2k_n^2 - k_t^2 - 2\gamma_{2n} \gamma'_{2n})}{k_0 \sqrt{hr} \Delta(k_n)} e^{-i(k_0 R - \frac{3\pi}{4})} \quad (31)$$

В (30), (31) введены обозначения

$$\gamma_{2n} = \sqrt{k_n^2 - k_t^2}, \quad \gamma'_{2n} = \sqrt{k_n^2 - k_t^2},$$

$k_n = k_0 (1 + h^2/r^2)^{-1/2}$ - точка перевала, $R = \sqrt{h^2 + r^2}$ - расстояние от источника до точки наблюдения.

Смещения, соответствующие псевдорелевской волне, определяются вычетами в полюсах $k = k_{PR}$ (см. формулу (20) в /9/) подынтегральных выражений (28), (29). Выполняя необходимые вычисления получаем формулы для вертикальных и горизонтальных смещений в этой волне:

$$u_z^{(PR)} = 2\rho_0 V_0 \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \frac{k_t^4 \gamma_{2PR} \sqrt{k_{PR}}}{\Delta'(k_{PR})} \times \\ \times \exp \left[-\gamma_{1PR} h - i \left(k_{PR} r + \frac{\pi}{4} \right) \right], \quad (32)$$

$$u_r^{(PR)} = 2\rho_0 V_0 \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \frac{k_t^2 k_{PR}^{3/2} (2k_{PR}^2 - k_t^2 - 2\gamma_{2PR} \gamma'_{2PR})}{\Delta'(k_{PR})} \times \\ \times \exp \left[-\gamma_{1PR} h - i \left(k_{PR} r - \frac{\pi}{4} \right) \right]. \quad (33)$$

В (32), (33) использованы обозначения

$$\gamma_{1PR} = (k_{PR}^2 - k_0^2)^{1/2}, \quad \gamma_{2PR} = (k_{PR}^2 - k_t^2)^{1/2}, \quad \gamma'_{2PR} = (k_{PR}^2 - k_t^2)^{1/2},$$

$$\Delta'(k_{pR}) = \left. \frac{d\Delta(k)}{dk} \right|_{k=k_{pR}}.$$

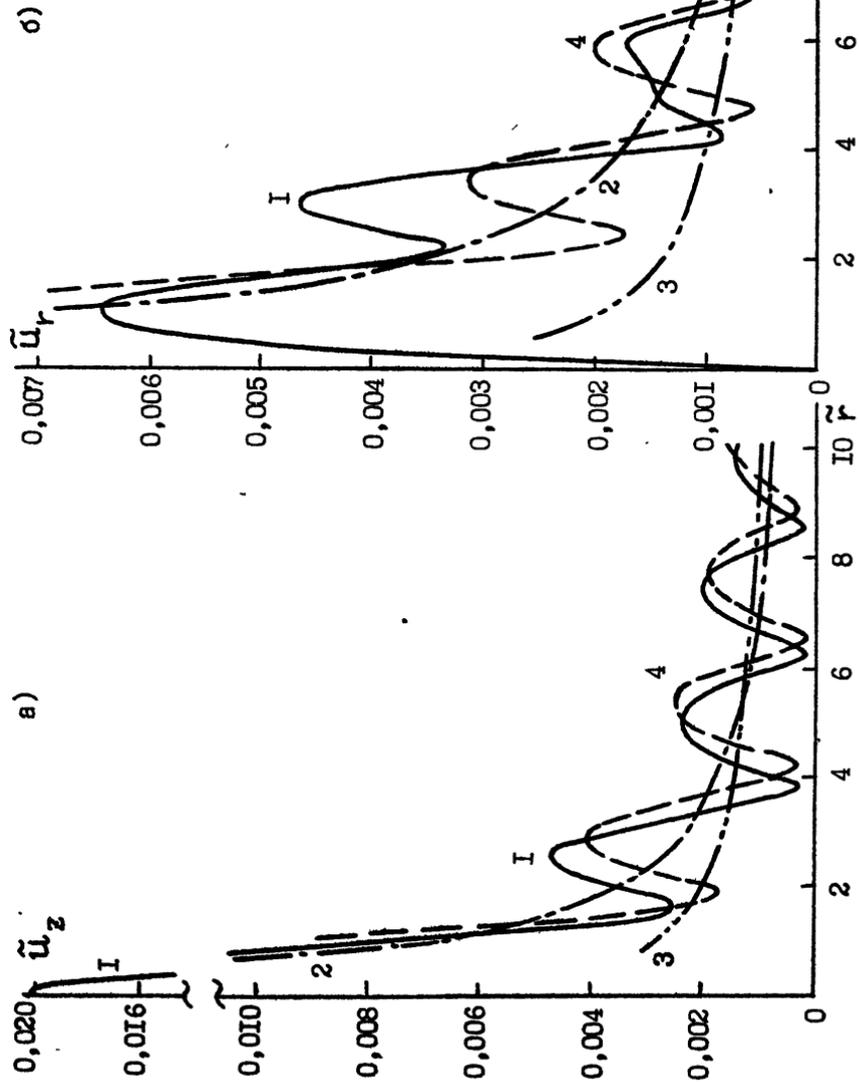
При анализе интегралов (28), (29) необходимо также учесть наличие полюса $k = k_s$, соответствующего волне Стонели, и разрезов, проведенных из точек ветвления $k = k_e$, $k = k_t$. Однако, как показывают вычисления, вклады этих особенностей подинтегральных выражений обычно пренебрежимо малы по сравнению с $u_{z,r}^{(n)}$ и $u_{z,r}^{(pR)}$, и для практических оценок можно представлять смещения в виде суммы

$$u_z^{(\Sigma)} = u_z^{(n)} + u_z^{(pR)}, \quad u_r^{(\Sigma)} = u_r^{(n)} + u_r^{(pR)}. \quad (34)$$

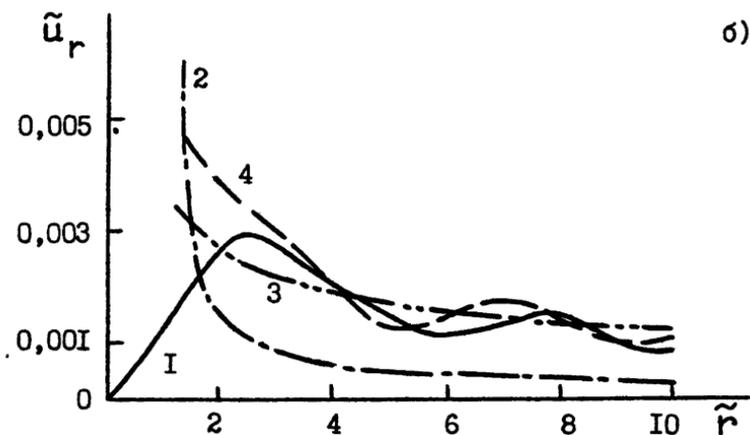
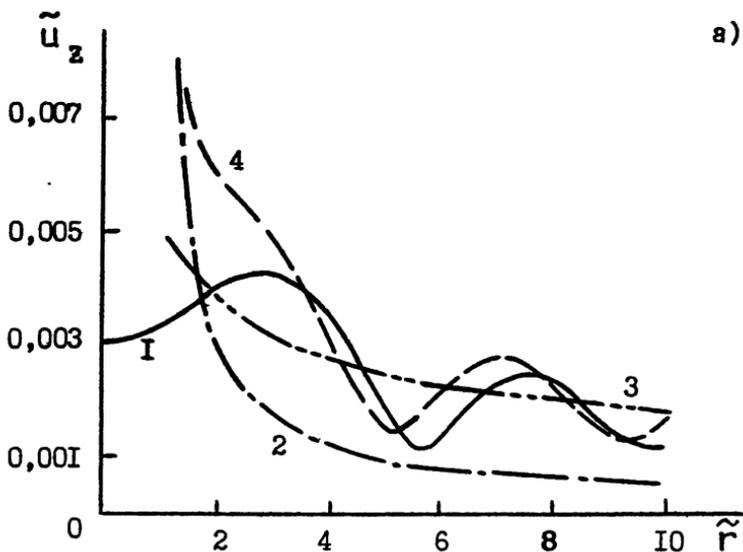
Результаты расчетов, проведенных по формулам (30)–(34) представлены на рис. 7, 8. Следует сразу же отметить, что при высотах и расстояниях $h \lesssim \lambda_0$, $r \sim \lambda_0$ этими формулами можно пользоваться лишь условно, поскольку пределы их применимости нарушаются /4/. Однако, как показывает сравнение кривых $\tilde{u}_{z,r}(\tilde{r})$ с приведенными на тех же рисунках результатами точного численного интегрирования $\tilde{u}_{z,r}(\tilde{r})$, формулы (30)–(34) правильно описывают основные качественные особенности зависимостей $\tilde{u}_{z,r}(\tilde{r})$ и при $h, r \sim \lambda_0$.

Проведенный анализ позволяет сделать вывод, что наличие осцилляций в зависимостях смещений поверхности упругого полупространства от горизонтального расстояния связано, главным образом, с интерференцией объемных волн, которые возбуждаются звуковой волной, падающей непосредственно на данную область поверхности, и псевдорэлеевской волны, распространяющейся от участка границы, располагающегося под источником звука.

Из (32), (33) следует, что с ростом высоты источника из-за наличия экспоненциального множителя $\exp(-\sqrt{k_{pR}^2 - k_0^2} h)$ эффективность генерации псевдорэлеевской волны резко падает в том случае, когда $\text{Re}(k_{pR}^2 - k_0^2) > 0$, т.е. когда упругая среда является низкоскоростной ($c_t < c_0$). Именно этим объясняется малость осцилляций на кривых рис. 4, 5: смещения поверхности твердого тела определяются главным образом падающей в ден-



Р и с. 7. Точные и приближенные зависимости $\tilde{u}_z(\tilde{r})$ (а) и $\tilde{u}_r(\tilde{r})$ (б) при $\sigma_t = 450$ м/с, $\sigma_t = 260$ м/с, $h = 0,294\lambda_0$: 1 - результаты численного интегрирования, 2 - расчеты по формулам (30), (31), 3 - расчеты по формулам (32), (33), 4 - расчеты по формулам (34) (с учетом фаз $\psi_z(r)$ и $\psi_r(r)$)



Р и с. 8. Точные и приближенные зависимости $\tilde{u}_z(\tilde{r})$ (а) и $\tilde{u}_r(\tilde{r})$ (б) при $c_z = 865,5$ м/с, $c_t = 500$ м/с, $h = \lambda_0$:
 I - результаты численного интегрирования, 2 - расчеты по формулам (30), (3I), 3 - расчеты по формулам (32), (33), 4- расчеты по формулам (34) (с учетом фаз $u_{z,r}^{(n)}$ и $u_{z,r}^{(PR)}$)

ную точку звуковой волной. При меньших высотах источника вклады в компоненты смещений членов (30), (32) и (31), (33) сравнимы по величине, и зависимости $\tilde{u}_{z,r}(\tilde{r})$ имеют выраженный осцилля - торный характер (рис.3).

В случае высокоскоростного упругого полупространства ($C_t > C_0$) в показателе экспоненты $Re(k_{pR}^2 - k_0^2) < 0$ и влияние экспоненциального множителя не столь существенно. Смещения $u_{z,r}^{(n)}$ и $u_{z,r}^{(pR)}$ сравнимы по величинам даже при $h \sim \lambda_0$, и результат их интерференции выражается наличием осцилляций в зависимости $\tilde{u}_{z,r}(\tilde{r})$ (рис.6).

Авторы выражают глубокую благодарность Ю.В.Петухову за плодотворные дискуссии и обсуждение результатов работы.

Л и т е р а т у р а

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория упругости. - М.: Наука, 1965. - 204 с.
2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. - М.: Наука, 1988. - 736 с.
3. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т.2. - М.: Наука, 1970. - 568 с.
4. Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах. - М.: Наука, 1973. - 343 с.
5. Бреховских Л.М., Годин О.А. Акустика слоистых сред. - М.: Наука, 1989. - 416 с.
6. Фемен С., Маркувиц Н. Излучение и рассеяние волн. Т.1./Пер. с англ. под ред. М.Л. Левина. - М.: Мир, 1978. - 551 с.
7. Аки К., Ричардс П. Количественная сейсмология. Т.1./Пер. с англ. Л.А. Левшина. - М.: Мир, 1983. - 520 с.
8. Roever W. L., Vining T. F., Strick E. Propagation of elastic wave motion from an impulsive source along a fluid / solid interface // Philos. Trans. Roy. Soc. London. - 1959. - V. 251, N 1000. - P. 455 - 523.
9. Викторов И.А. Типы звуковых поверхностных волн в твердых

телах (обзор)//Акуст.журн. - 1979. - Т.25, № 1. - С.1-17.

10. Петухов Ю.В. Влияние сдвиговых волн в осадках на спектральные резонансы в отраженном акустическом сигнале//Акуст.журн. - 1987. - Т.33, № 4. - С.736-739.

Татьяна Владиславовна ЕРГАКОВА
Андрей Владимирович РАЗИН

ПРЕЛОМЛЕНИЕ СФЕРИЧЕСКОЙ ГАРМОНИЧЕСКОЙ ЗВУКОВОЙ ВОЛНЫ
НА ПЛОСКОЙ ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА ГАЗ – ТВЕРДОЕ ТЕЛО

Подписано в печать 11.06.92 г. Формат 60 x 84/16.
Бумага писчая. Печать офсетная. Объем 1,08 усл.п.л.
Заказ 5253. Тираж 100. Бесплатно.

Отпечатано на ротационной НИРФИ