Нижегородский научно-исследовательский радиофизический институт
Министерства науки, высшей школы и технической политики
Российской Федерации

Препринт № 345

ОДНОМЕРНАЯ ПЛОТНОСТЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТИ СУММЫ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

В.И.Есипенко
О.Б.Щ у к о

Нижний Новгород, 1992

Е с и п е н к о В. И., Щ у к о О. Б.

ОДНОМЕРНАЯ ПЛОТНОСТЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТИ СУММЫ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН//Препринт № 345. - Нижний Новгород: НИРФИ, 1992. - 14 с.

УДК 519.213

Развит прямой метод отыскания одномерной плотности распределения вероятности суммы произвольного числа зависимых случайных величин с постоянными коэффициентами. Рассмотрены несколько примеров.

В теориях вероятностей, связи, автоматического регулирования и других областях часто приходится иметь дело с задачей отыскания статистических характеристик суммы

$$z = \sum_{k=1}^{n} a_k z_k \qquad (I)$$

множества $\{z_1, \ldots, z_n\}$ в общем случае зависимых случайных величин z_k, характеризующихся совместной плотностью распределения вероятности $W_n^*(z_1, \ldots, z_n)$, где коэффициенты a_k - постоянные действительные числа. Для определенности полагаем, что случайные величины $z_1, \ldots, z_n$ могут принимать любые действительные значения от $-\infty$ до $+\infty$.

Эта задача, в принципе, разрешима, например, с помощью кумулянтного анализа /I/. Однако, в настоящее время не получил развития метод, который позволяет в общем случае непосредственно (прямо) находить одномерную плотность вероятности суммы (I) по заданной совместной плотности вероятности $W_n^*(z_1, \ldots, z_n)$.

В данной работе такой метод развивается и анализируется. Его уместно назвать прямым методом. На наш взгляд, он обладает наглядностью и сравнительной простотой реализации (например, с помощью ЭВМ).

Вводя в (I) новую переменную $x_k = a_k z_k$ и используя известные правила функционального преобразования случайных величин/2/, нетрудно перейти от $W_n^*(z_1, \ldots, z_n)$ к совместной плотности вероятности $W_n(x_1, \ldots, x_n)$ множества случайных величин $\{x_1, \ldots, x_n\}$:

$$W_n(x_1,\dots,x_n) = W_n^*\left(\frac{x_1}{a_1},\dots,\frac{x_n}{a_n}\right)\cdot|D_n|,$$

где $D_n = 1/a_1 \times a_2 \times \dots \times a_n$ – Якобиан преобразования от случайных величин $z_1,\dots,z_n$ к случайным величинам $x_1,\dots,x_n$.

Известно, что плотность вероятности $W_n(x_1,\dots,x_n)$ представима в виде произведения условных плотностей вероятности

$$W_n(x_1,\dots,x_n) = W_1(x_1)\times W_2(x_2|x_1)\times\dots\times W_n(x_n|x_1,\dots,x_{n-1}), \quad (2)$$

где

$$W_k(x_k|x_1,\dots,x_{k-1}) = \frac{W_k(x_1,\dots,x_k)}{W_{k-1}(x_1,\dots,x_{k-1})}. \quad (3)$$

При этом для совместной условной плотности вероятности $\omega_{k+1}(x_k, x_{k+1}|x_1,\dots,x_{k-1})$ величин x_k и x_{k+1} имеет место выражение:

$$\omega_{k+1}(x_k, x_{k+1}|x_1,\dots,x_{k-1}) = W_k(x_k|x_1,\dots,x_{k-1})\times W_{k+1}(x_{k+1}|x_1,\dots,x_k). \quad (4)$$

Рассмотрим сумму $y_{n-1} = x_{n-1} + x_n$. Согласно (4) условная совместная плотность вероятности величин x_{n-1} и x_n запишется в виде:

$$\omega_n(x_{n-1}, x_n|x_1,\dots,x_{n-2}) = W_{n-1}(x_{n-1}|x_1,\dots,x_{n-2})\times W_n(x_n|x_1,\dots,x_{n-1}). \quad (5)$$

В соответствии с общим правилом отыскания плотности вероятности суммы двух случайных величин /2/ для условной плотности вероятности случайной величины y_{n-1} имеем

$$W_{n-1}(y_{n-1}|x_1,\dots,x_{n-2}) = \int_{-\infty}^{+\infty} W_{n-1}(x_{n-1}|x_1,\dots,x_{n-2})\times W_n(y_{n-1}-x_{n-1}|x_1,\dots,x_{n-1})\,dx_{n-1}. \quad (6)$$

Выражение (6) есть свертка условных плотностей вероятности, входящих в (5).

Плотность вероятности $W_{n-1}(y_{n-1}|x_1,\dots,x_{n-2})$ определена при тех же исходных условиях, что и условная плотность вероятности $W_{n-1}(x_{n-1}|x_1,\dots,x_{n-2})$ случайной величины x_{n-1}. Следовательно, множество случайных величин $\{x_1,\dots,x_{n-2},y_{n-1}\}$, полученное после суммирования x_{n-1} и x_n, имеет совместную плотность вероятности $W_{n-1}(x_1,\dots,x_{n-2},y_{n-1})$, также представимую в виде произведения условных плотностей вероятности:

$$W_{n-1}(x_1,\dots,x_{n-2},y_{n-1})=W_1(x_1)\times\dots\times W_{n-2}(x_{n-2}|x_1,\dots,x_{n-3})\times \tag{7}$$

$$\times W_{n-1}(y_{n-1}|x_1,\dots,x_{n-2}).$$

Рассмотрим далее сумму $y_{n-2}=x_{n-2}+y_{n-1}$. С учетом (7) для условной плотности вероятности случайной величины y_{n-2}, как и ранее для y_{n-1}, имеем:

$$W_{n-2}(y_{n-2}|x_1,\dots,x_{n-3})=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}W_{n-2}(x_{n-2}|x_1,\dots,x_{n-3})\times W_{n-1}(y_{n-2}-x_{n-2}|x_1,\dots,x_{n-2})\times dx_{n-2}. \tag{8}$$

Подставляя в (8) вместо $W_{n-1}(y_{n-1}|x_1,\dots,x_{n-2})$ соответствующее выражение (6), получим:

$$W_{n-2}(y_{n-2}|x_1,\dots,x_{n-3})=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}W_{n-2}(x_{n-2}|x_1,\dots,x_{n-3})\times W_{n-1}(x_{n-1}|x_1,\dots$$

$$\dots,x_{n-2})\times W_n(y_{n-2}-x_{n-2}-x_{n-1}|x_1,\dots,x_{n-1})dx_{n-2}dx_{n-1}.$$

Условная плотность вероятности $W_{n-2}(y_{n-2}|x_1,\dots,x_{n-3})$ определена при тех же условиях, что и $W_{n-2}(x_{n-2}|x_1,\dots,x_{n-3})$. Следовательно, множество случайных величин $\{x_1,\dots,x_{n-3},y_{n-2}\}$, полученное после суммирования величин x_{n-2}, x_{n-1} и x_n, имеет совместную плотность вероятности $W_{n-2}(x_1,\dots,x_{n-3},y_{n-2})$, также представимую в виде произведения условных плотностей вероятности:

$$W_{n-2}(x_1,\dots,x_{n-3},y_{n-2})=W_1(x_1)\times\dots\times W_{n-3}(x_{n-3}|x_1,\dots,x_{n-4})\times W_{n-2}(y_{n-2}|x_1,\dots,x_{n-3}).$$

Рассматривая далее последовательно суммы $y_{n-3}=x_{n-3}+y_{n-2}$, $y_{n-4}=x_{n-4}+y_{n-3},\dots,y_1=x_1+y_2$, находя рассмотренным выше путем соответствующие условные плотности вероятности и совместные плотности вероятности получаемых множеств $\{x_1,\dots,x_{n-4},y_{n-3}\}$, $\{x_1,\dots,x_{n-5},y_{n-4}\},\dots,\{x_1,y_2\}$, получим окончательное выражение для одномерной плотности вероятности $W_1(z)$ суммы (I):

$$W_1(z)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}W_1(x_1)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}W_2(x_2|x_1)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dots\int\limits_{-\infty}^{+\infty}W_{n-2}(x_{n-2}|x_1,\dots,x_{n-3})\times \tag{9}$$

$$\times\int\limits_{-\infty}^{+\infty}W_{n-1}(x_{n-1}|x_1,\dots,x_{n-2})\times W_n(z-x_1-\dots-x_{n-2}-x_{n-1}|x_1,\dots,x_{n-1})dx_1\dots dx_{n-1}.$$

Когда случайная величина z_k принимает действительные значения от 0 до $+\infty$, выражение (9) принимает вид:

$$W_1(z)=\int\limits_0^{z}W_1(x_1)\int\limits_0^{z-x_1}W_2(x_2|x_1)\int\limits_0^{z-x_1-x_2}\dots\int\limits_0^{z-x_1-\dots-x_{n-1}}W_{n-1}(x_{n-1}|x_1,\dots,x_{n-2})\times \tag{I0}$$

$$\times W_n(z-x_1-\dots-x_{n-2}-x_{n-1}|x_1,\dots,x_{n-1})dx_1\dots dx_{n-1}.$$

Используя (3), выражения (9) и (I0) можно записать в более компактном виде соответственно:

$$W_1(z)=\underbrace{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dots\int\limits_{-\infty}^{+\infty}}_{(n-1)\text{ раз}}W_n(x_1,x_2,\dots,x_{n-1},z-x_1-\dots-x_{n-1})dx_1\dots dx_{n-1}.$$

$$W_1(z)=\int_0^{z}\int_0^{z-x_1}\dots\int_0^{z-x_1-\dots-x_{n-2}} W_n(x_1,x_2,\dots,x_{n-1},z-x_1-\dots-x_{n-1})\,dx_1\dots dx_{n-1}.$$

Для случайных величин $\{z_1,\dots,z_n\}$, образующих простую цепь Маркова с одномерной плотностью вероятности $W_1(z_1)$ и вероятностью перехода $\rho(z_k|z_{k-1})$, выражения (9) и (I0) запишутся в форме:

$$W_1(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}W_1(x_1)\int_{-\infty}^{+\infty}\rho(x_2|x_1)\int_{-\infty}^{+\infty}\dots\int_{-\infty}^{+\infty}\rho(x_{n-1}|x_{n-2})\rho(z-x_1-\dots-x_{n-1}|x_{n-1})\times dx_1\dots dx_{n-1}, \quad (II)$$

$$W_1(z)=\int_0^{z}W_1(x_1)\int_0^{z-x_1}\rho(x_2|x_1)\int_0^{z-x_1-x_2}\dots\int_0^{z-x_1-\dots-x_{n-2}}\rho(x_{n-1}|x_{n-2})\rho(z-x_1-\dots-x_{n-1}|x_{n-1})dx_1\dots dx_{n-1}. \quad (I2)$$

Наиболее простой вид выражения (9) и (I0) принимают для множества независимых случайных величин $\{z_1,\dots,z_n\}$, имеющих одномерные плотности вероятности $W_1(z_k)$:

$$W_1(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}W_1(x_1)dx_1\int_{-\infty}^{+\infty}W_1(x_2)dx_2\int_{-\infty}^{+\infty}\dots\int_{-\infty}^{+\infty}W_1(x_{n-1})\times W_1(z-x_1-\dots-x_{n-1})dx_{n-1},$$

$$W_1(z)=\int_0^{z}W_1(x_1)dx_1\int_0^{z-x_1}W_1(x_2)dx_2\int_0^{z-x_1-x_2}\dots\int_0^{z-x_1-\dots-x_{n-2}}W_1(x_{n-1})\times W_1(z-x_1-\dots-x_{n-1})dx_{n-1}.$$

Рассмотренный прямой метод отыскания одномерной плотности распределения вероятности $W_1(z)$ суммы (I) справедлив, как нетрудно видеть, для совместных плотностей распределения вероятности $W_n(z_1,\dots,z_n)$ любых видов.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример I. Пусть $\{x_1,\dots,x_n\}$ есть множество независимых гауссовских случайных величин с математическими ожиданиями $m_1,\dots,$ m_n, дисперсиями $\sigma_1^2,\dots,\sigma_n^2$ и совместной плотностью распределения вероятностей (ПРВ)

$$W_n(x_1,\dots,x_n)=\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{\sigma_k\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(x_k-m_k)^2}{2\sigma_k^2}\right]. \qquad (I3)$$

Этот простой пример позволяет, с одной стороны, апробировать рассмотренный в работе метод отыскания одномерной ПРВ суммы случайных величин, оперируя сравнительно простыми функциями, описывающими ПРВ, а с другой - рассмотреть применение специфической методики вычисления свертки гауссовых ПРВ.

Исходя из (I3) и рассмотренного в работе подхода, запишем (n - I)-мерную совместную ПРВ множества случайных величин $\{x_1,$ $\dots,x_{n-2},y_{n-1}$, где $y_{n-1}=x_{n-1}+x_n$, в виде:

$$W_{n-1}(x_1,\dots,x_{n-2},y_{n-1})=\prod_{k=1}^{n-2}\frac{1}{\sigma_k\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(x_k-m_k)^2}{2\sigma_k^2}\right]\times \qquad (I4).$$

$$\times\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi\sigma_{n-1}\sigma_n}\exp\left[-\frac{\sigma_n^2(x_{n-1}-m_{n-1})^2+\sigma_{n-1}^2(y_{n-1}-x_{n-1}-m_n)^2}{2\sigma_{n-1}^2\sigma_n^2}\right]dx_{n-1}.$$

Преобразуя в (I4) числитель показателя экспоненты под интегралом и переходя к новой переменной: $z^2=(\sigma_{n-1}^2+\sigma_n^2)x_{n-1}^2$, выделяя в показателе экспоненты полный квадрат, получим:

$$W_{n-1}(x_1,\dots,x_{n-2},y_{n-1})=\prod_{k=1}^{n-2}\frac{1}{\sigma_k\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(x_k-m_k)^2}{2\sigma_k^2}\right]\times\frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_{n-1}^2+\sigma_n^2)}}\times$$

$$\times\exp\left\{-\frac{\left[y_{n-1}-(m_{n-1}+m_n)\right]^2}{2(\sigma_{n-1}^2+\sigma_n^2)}\right\}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sigma_{n-1}\sigma_n\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{\left[\frac{m_{n-1}\sigma_n^2+\sigma_{n-1}^2 y_{n-1}-\sigma_{n-1}^2 m_n}{\sqrt{\sigma_{n-1}^2+\sigma_n^2}}-z\right]^2}{2\sigma_{n-1}^2\sigma_n^2}\right\}dz \quad (15)$$

Входящий в (I5) интеграл в силу нормировки равен единице, а предшествующее ему выражение есть совместная ПРВ множества $\{x_1, \dots, x_{n-2}, y_{n-1}\}$. Используя рассмотренную методику последовательно для определения совместных ПРВ множеств случайных величин $\{x_1, \dots, x_{n-3}, y_{n-2}\}, \{x_1, \dots, x_{n-4}, y_{n-3}\}, \dots, \{x_1, y_2\}$, получим окончательно известное выражение одномерной ПРВ суммы $z = \sum_{k=1}^{n} x_k$ произвольного числа "n" независимых гауссовских случайных величин:

$$W_1(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2}}\exp\left[-\frac{\left(z-\sum_{k=1}^{n}m_k\right)^2}{2\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2}\right].$$

<u>Пример 2</u>. Пусть $\{x_1, \dots, x_n\}$ есть множество зависимых гауссовских случайных величин с математическими ожиданиями $m_1, \dots, m_n$ и дисперсиями $\sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2$ соответственно и совместной n-мерной ПРВ:

$$W_n(x_1,\dots,x_n)=\frac{1}{\sigma_1\times\dots\times\sigma_n\sqrt{(2\pi)^n D}}\exp\left[-\frac{1}{2D}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}D_{ik}\frac{x_i-m_i}{\sigma_i}\frac{x_k-m_k}{\sigma_k}\right] \quad (16)$$

где D – определитель n-го порядка, имеющий вид

$$D = \begin{vmatrix} 1 & R_{12} \dots & R_{1n} \\ R_{21} & 1 & R_{2n} \\ \multicolumn{3}{c}{----------} \\ R_{n1} & R_{n2} \dots & 1 \end{vmatrix}, \tag{17}$$

$R_{ik} = R_{ki}$, $|R_{ik}| \leq 1$ - коэффициенты корреляции, D_{ik} - алгебраическое дополнение элемента R_{ik} в (17).

Полагая в (16) последовательно $n = 2$, $n = 3$ и т.д., используя рассмотренную в работе методику вычисления совместных ПРВ множеств случайных величин $\{x_1, \dots, x_{n-2}, y_{n-1}\}, \dots, \{x_1, y_2\}$ и достаточно подробно в примере I методику вычисления свертки гауссовых ПРВ, получим искомое выражение для одномерной ПРВ суммы $z = \sum_{k=1}^{n} x_k$ зависимых гауссовских случайных величин (довольно громоздкие при больших n вычисления опущены):

$$W_1(z) = \frac{1}{\sigma_z \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(z - m_z)^2}{2\sigma_z^2} \right], \tag{18}$$

$$\text{где } m_z = \sum_{k=1}^{n} m_k, \quad \sigma_z^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} R_{ik} \sigma_i \sigma_k . \tag{19}$$

Выражения (18) и (19) согласуются с известными /2/, но полученными на основе использования корреляционной теории.

<u>Пример 3</u>. Пусть x_1 и x_2 есть зависимые случайные величины, совместная плотность распределения вероятности которых равна произведению одномерной плотности распределения вероятности Релея $W_1(x_1)$ и вероятности перехода $p(x_2|x_1)$:

$$W_2(x_1, x_2) = W_1(x_1) \cdot p(x_2|x_1),$$

где

$$W_1(x_1) = \frac{x_1}{\sigma_1^2} \exp\left(-\frac{x_1^2}{2\sigma_1^2} \right), \tag{20}$$

$$p(x_2|x_1) = \frac{x_2}{\sigma_2^2} \exp\left(-\frac{x_1^2 R_{12}^2 + x_2^2}{2\sigma_2^2} \right) I_0\left(\frac{x_1 R_{12} x_2}{\sigma_2^2} \right), \tag{21}$$

$\sigma^2, \sigma_1^2, \sigma_2^2 = \sigma^2(1 - R_{12}^2)$ - параметры распределений; R_{12} - коэффициент корреляции случайных величин x_1 и x_2, определяемый выражением $R_{12}(\tau) = \exp(-\alpha|\tau|)$ (α - постоянный коэффициент); $I_0(\cdot)$ - модифицированная функция Бесселя нулевого порядка.

Согласно (I2), плотность распределения вероятности суммы $z = x_1 + x_2$ будет иметь вид:

$$W_1(z) = \int_0^z W_1(x_1)\, p(z - x_1 | x_1)\, dx_1 = \tag{22}$$

$$= \int_0^z \frac{x_1}{\sigma_1^2} e^{-\frac{x_1^2}{\sigma_1^2}} \times \frac{z - x_1}{\sigma_2^2} \exp\left[-\frac{(z-x_1)^2 + x_1^2 R_{12}^2}{2\sigma_2^2}\right] I_0\left[\frac{(z-x_1)x_1 R_{12}}{\sigma_2^2}\right] dx_1 .$$

Воспользуемся аппаратом операционного исчисления и найдем изображение искомой плотности распределения вероятности $W_1(z)$ /3/:

$$F(p) = \int_0^\infty W_1(z)\, e^{-pz}\, dz =$$

$$= \int_0^\infty dz \int_0^z e^{-p(z-x_1) - px_1} \frac{x_1}{\sigma_1^2} e^{-\frac{x_1^2}{2\sigma_1^2}} p(z - x_1 | x_1)\, dx_1 .$$

Функция $W_1(z)$ имеет изображение, т.к. обладает всеми свойствами функций, его определяющих, и удовлетворяет необходимым и достаточным условиям существования изображения /4/.

Делая в неполном изображении

$$F_T(p) = \int_0^T W_1(z)\, e^{-pz} dz$$

замену переменных (полагая $z - x_1 = x$, $x_1 = y$, тогда $0 < x + y < T$, $y > 0$, $x > 0$), преобразуя $F_T(p)$ в соответствии с известной методикой /3/, разлагая $I_0(\cdot)$ в ряд и переходя к пределу при $T \longrightarrow \infty$, можно показать, что

$$F(p)=\frac{1}{\sigma_1^2\sigma_2^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a_2/2)^{2n}}{n!\,\Gamma(n+1)}\left[F_{1n}(p)\times F_{2n}(p)\right],$$

где

$$F_{1n}(p)=\int_0^{\infty} e^{-px}x^{2n+1}\cdot e^{-b_2^2x^2}\,dx,$$

$$F_{2n}(p)=\int_0^{\infty} e^{-py}\,y^{2n+1}\,e^{-b_1^2y^2}\,dy,$$

$$a_2=\frac{1}{\sigma_2^2}R_{12},\quad b_1^2=\frac{\sigma_2^2+\sigma_1^2R_{12}^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2},\quad b_2^2=\frac{1}{2\sigma_2^2}.$$

Заменяя в $F_{1n}(p)$ и $F_{2n}(p)$ экспоненты соответствующими рядами и интегрируя, получим окончательно:

$$F(p)=\frac{1}{\sigma_1^2\sigma_2^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a_2/2)^{2n}}{n!\,\Gamma(n+1)}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m b_2^{2m}(2n+2m+1)!}{m!\,p^{2n+2m+2}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k b_1^{2k}(2n+2k+1)!}{k!\,p^{2n+2k+2}}.$$

Изображению $F(p)$ соответствует оригинал (искомая одномерная ПРВ случайной величины z) /5/

$$W_1(z)=\frac{1}{\sigma_1^2\sigma_2^2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} f_n A_{nm}B_{nk}\frac{z^{4n+2m+2k+3}}{(4n+2m+2k+3)!}, \quad (23)$$

где $$f_n=\frac{1}{(n!)^2}\left(\frac{a_2}{2}\right)^{2n},\quad A_{nm}=(-1)^m\frac{b_2^{2m}(2n+2m+1)}{m!},$$

$$B_{nk}=(-1)^k\frac{b_1^{2k}(2n+2k+1)!}{k!}.$$

Выражение (23) можно несколько упростить, приведя в нем подобные члены (что снижает объем вычислений примерно на 20%):

$$W_1(z)=\frac{1}{б_1^2б_2^2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{m} f_n A_{nk} B_{n,m-k}\frac{z^{4n+2m+3}}{(4n+2m+3)!}, \quad (24)$$

где $A_{nk}=(-1)^k\frac{б_2^{2k}(2n+2k+1)!}{k!}$, $\quad B_{n,m-k}=(-1)^{m-k}\frac{б_1^{2(m-k)}(2n+2m-2k+1)!}{(m-k)!}$

Результаты вычислений $W_1(z)$, выполненные в помощью ЭВМ непосредственно по (22), а также по (23) и (24) совпадают.

Полагая в (23) $R_{12}=0$ (при этом $a_2=0$), $б_1^2=б_2^2=б^2$, получаем ПРВ суммы двух независимых релеевских случайных величин с одинаковыми параметрами $б$:

$$W_1(z)=\frac{1}{б^4}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{m+k}\frac{(2m+1)!\,(2k+1)!}{(2б^2)^{m+k}m!\,k!\,(2m+2k+3)!}z^{2m+2k+3}$$

Это выражение, отличаясь по форме от выражения, приведенного для аналогичного случая в /6/, дает те же значения $W_1(z)$.

Данный простой пример ($n=2$) дает возможность обобщить применение операционного исчисления для отыскания одномерной плотности распределения вероятности на случай суммы произвольного числа n зависимых неотрицательных случайных величин. Так, в рассматриваемом случае при $n=3$ $W_1(x_1)$ и $p(x_2|x_1)$ определены соответственно выражениями (20) и (21), а случайные величины x_2 и x_3, связаны вероятностью перехода

$$p(x_3|x_2)=\frac{x_3}{б_3^2}\exp\left(-\frac{x_2^2R_{23}^2+x_3^2}{2б_3^2}\right)I_0\left(\frac{x_2R_{23}x_3}{б_3^2}\right).$$

Можно показать, что в рассматриваемом случае $R(\tau)=\exp(-\alpha|\tau|)$ вероятности перехода $p(x_2|x_1)$ и $p(x_3|x_2)$ удовлетворяют уравнению Смолуховского /2/.

Одномерная плотность распределения вероятности $W_1(z)$ суммы $z = x_1 + x_2 + x_3$, полученная на основании использованных выше методик, имеет вид:

$$W_1(z)=\frac{1}{\sigma_1^2\sigma_2^2\sigma_3^2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^{m+s+r}\frac{a_2^{2n}a_3^{2k}b_3^{2m}b_2^{2s}b_1^{2r}}{2^{2(n+k)}n!\,\Gamma(n+1)m!\,k!}\times$$

$$\times\frac{(2n+2m+2k+1)!\,(2k+2s+1)!\,(2n+2r+1)!}{\Gamma(k+1)s!\,r!\,(4n+2m+4k+2s+2r+5)!}z^{4n+2m+4k+2s+2r+5},$$

где

$$a_2=\frac{1}{\sigma_2^2}R_{12}^2,\qquad a_3=\frac{1}{\sigma_3^2}R_{23}^2,\qquad b_3^2=\frac{\sigma_3^2+\sigma_2^2R_{23}^2}{2\sigma_2^2\sigma_3^2},$$

$$b_2^2=\frac{1}{2\sigma_3^2},\qquad b_1^2=\frac{\sigma_2^2+\sigma_1^2R_{12}^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2}.$$

Литература

1. Малахов А.Н. Кумулянтный анализ случайных негауссовых процессов и их преобразований. - М.: Сов.радио, 1978. - 376 с.
2. Тихонов В.И. Статистическая радиотехника. - М.: Сов.радио , 1966. - 678 с.
3. Диткин В.А., Прудников А.П. Операционное исчисление. - М.: Высшая школа, 1966. - 406 с.
4. Андре Анго. Математика для электро- и радиоинженеров. - М.: Наука, 1964. - 772 с.
5. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. - - М.: Наука, 1969. - Т.I. - 343 с.
6. Левин Б.Р. Теоретическее основы статистической радиотехники. - М.: Сов.радио, 1969. - 751 с.

Дата поступления статьи
2 апреля 1992 г.