Нижегородский научно-исследовательский радиофизический институт
Министерства науки, высшей школы и технической политики
Российской Федерации

Препринт № 346

К ВОПРОСУ ПРИМЕНЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА В ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

В.И.Есипенко
О.Б.Шуко

Нижний Новгород, 1992

Е с и п е н к о В. И., Щ у к о О. Б.

К ВОПРОСУ ПРИМЕНЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА В ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТИ // Препринт № 346. - Нижний Новгород: НИРФИ, 1992. - 18 с.

УДК 517.442: 519.213

Выполнен сравнительный анализ нескольких способов отыскания плотности распределения вероятности суммы неотрицательных случайных величин с постоянными коэффициентами. Показаны широкие возможности применения для этих целей интегрального преобразования Лапласа. Рассмотрен ряд примеров.

На рубеже XX века возникли операционное исчисление и аппарат характеристических функций. Операционное исчисление получило первое строгое обоснование с помощью интегрального преобразования Лапласа /I-2/, а его развитие как эффективного аппарата прикладного математического анализа обуславливалось потребностями бурно развивающихся отраслей науки и техники. Аппарат характеристических функций развивался в рамках теории вероятностей, сформировавшейся в 30-е годы в самостоятельную математическую дисциплину /3-4/.

Указанные научные направления имеют много общего, Так, пара преобразований Фурье, связывающая плотность распределения вероятности $\omega(x)$ и характеристическую функцию $f(t)$, имеет вид

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{jtx} \omega(x)\, dx, \tag{I}$$

$$\omega(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-jtx} f(t)\, dt, \tag{2}$$

где t и x - действительные переменные, в общем случае изменяющиеся в интервале $(-\infty, +\infty)$, а пара преобразований Л а п л а с а , связывающая оригинал $h(t)$ и изображение $F(p)$, записываются в форме:

$$F(p) = \int_{0}^{\infty} e^{-pt} h(t)\, dt, \tag{3}$$

$$h(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} e^{pt}F(p)dp, \qquad (4)$$

где $p = x + jy$ - комплексное число (мы сохранили здесь данное обозначение, как это принято в /5/); t - действительная переменная, изменяющаяся в интервале $(0, +\infty)$; $c > 0$, $c > \gamma_c$, γ_c - абсцисса сходимости интеграла (3).

Для сходимости нинтеграла (3) необходимо и достаточно, чтобы /2/

I) интеграл $\int_0^A h(t)dt$ существовал при любом конечном $A > 0$;

2) существовало такое число $\sigma > 0$, что

$$\lim_{t\to+\infty} e^{-\sigma t}\int_0^t h(t)dt = 0.$$

Функции времени $h(t)$, удовлетворяющие условиям физической возможности систем ($h(t) = 0$ при $t \leq 0$), обычно удовлетворяют также указанным необходимым и достаточным условиям сходимости интеграла (3).

Теоремы об изменении масштаба аргумента, о дифференцировании изображений, о свертывании оригиналов (теорема Бореля) имеют свои аналоги в аппарате характеристических функций. Имеют место и другие аналоги. Это обстоятельство обусловило применение преобразования Лапласа в теории вероятности /6/.

На наш взгляд, возможности применения преобразования Лапласа в теории вероятности значительно шире в той области, в которой приходится оперировать с неотрицательными случайными величинами, и обусловлены следующими факторами:

I) плотность распределения вероятности $\omega(x)$ неотрицательных случайных величин ($x \geqq 0$) удовлетворяет всем необходимым и достаточным условиям сходимости интеграла (3), следовательно пара преобразований Лапласа, связывающая оригинал $\omega(x)$ и изображение $F(p)$, запишется в форме

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-px}\omega(x)\,dx, \qquad (5)$$

$$\omega(x) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} e^{px} F(p)\, dp; \qquad (6)$$

2) неотрицательные случайные величины составляют достаточно широкий класс случайных величин (см,, например, /6, 7/);

3) из (I) следует, что для неотрицательных случайных величин характеристическая функция принимает вид

$$f(t) = \int_0^{\infty} e^{jtx} \omega(x)\, dx; \qquad (7)$$

сравнение выражений (7) и (5) показывает, что последнее обладает гораздо лучшей сходимостью, что неизбежно влечет большую наглядность получаемых результатов и уменьшение объема необходимых вычислений;

4) в то время, как теория суммирования независимых случайных величин достигла в настоящее время высокого совершенства /8, 9/, в области суммирования зависимых случайных величин достижения существенно ниже /9/, что объясняется, на наш взгляд, имеющимися здесь значительными математическими трудностями,связанными с необходимостью выполнения довольно сложных операций вычисления многократных сверток соответствующих плотностей распределения вероятности /I0-I3/; применение аппарата характеристических функций позволяет преодолеть многие трудности, однако существенное продвижение вперед, как нам представляется, может быть достигнуто (по крайней мере для неотрицательных случайных величин) посредством применения преобразования Лапласа;

5) в операционном исчислении в настоящее время накоплен обширный табличный материал оригиналов и соответствующих изображений, значение которого трудно переоценить при выполнении многократных переходов от оригиналов к изображениям и обратно;к большому сожалению, соответствующего табличного аналога в аппарате характеристических функций в настоящее время нет.

Рассмотрим несколько примеров. В первом из них с целью выполнения сравнительного анализа используемые методики изложим достаточно подробно.

I. Найдем плотность распределения вероятности $\omega_1(\eta)$ суммы $\eta = x_1 + x_2$ двух независимых рэлеевских случайных величин x_1 и x_2, совместная плотность распределения вероятности которых зависит от одного параметра σ:

$$\omega_2(x_1,x_2) = \frac{x_1}{\sigma^2} e^{-\frac{x_1^2}{2\sigma^2}} \frac{x_2}{\sigma^2} e^{-\frac{x_2^2}{2\sigma^2}}, \tag{8}$$

где $\eta \geq 0,\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$

В соответствии с известным правилом /I4/

$$\omega_1(\eta) = \int_0^{\eta} \frac{x_1}{\sigma^2} e^{-\frac{x_1^2}{2\sigma^2}} \frac{\eta - x_1}{\sigma^2} e^{-\frac{(\eta - x_1)^2}{2\sigma^2}} dx. \tag{9}$$

Среди возможных способов вычисления $\omega_1(\eta)$ отметим следующие:

I) использование стандартных приемов интегрального исчисления;

2) вычисление $\omega_1(\eta)$ с применением аппарата характеристических функций;

3) вычисление $\omega_1(\eta)$ с применением преобразования Лапласа;

4) численное интегрирование (9) с помощью ЭВМ при заданном значении параметра σ.

Здесь мы рассмотрим три первых (аналитических) способа.

I). Преобразуя (9) и вводя обозначения

$$A = \frac{1}{\sigma^4} \exp\left(-\frac{\eta^2}{2\sigma^2}\right), \quad p = \frac{1}{\sigma^2}, \quad q = -\frac{\eta}{\sigma^2}, \tag{I0}$$

получим /I5/

$$\omega_1(\eta) = A\eta \int_0^{\eta} x_1 e^{-px_1^2 - qx_1} dx_1 - A \int_0^{\eta} x_1^2 e^{-px_1^2 - qx_1} dx_1 = \tag{II}$$

$$= -\frac{1}{2} A\eta \sqrt{\frac{\pi}{p}} \frac{\partial}{\partial q}\left[e^{\frac{q^2}{4p}} + e^{\frac{q^2}{4p}} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{-q/2\sqrt{p}} e^{-t^2} dt\right] -$$

$$-\frac{1}{2} A \sqrt{\frac{\pi}{p}} \frac{\partial^2}{\partial q^2}\left[e^{\frac{q^2}{4p}} + e^{\frac{q^2}{4p}} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int^{-q/2\sqrt{p}} e^{-t^2} dt\right] -$$

$$- A\eta \int_\eta^\infty x_1 e^{-px_1^2 - qx_1} dx_1 + A \int_\eta^\infty x_1^2 e^{-px_1^2 - qx_1} dx_1 ,$$

где $\partial / \partial q$ – оператор дифференцирования.

Опуская довольно громоздкие промежуточные вычисления, приведем окончательное известное выражение /I6/:

$$\omega_1(\eta) = \frac{\eta}{2\sigma^2} e^{-\frac{\eta^2}{2\sigma^2}} + \frac{\sqrt{\pi}}{2\sigma}\left(\frac{\eta^2}{2\sigma^2} - 1\right) e^{-\frac{\eta^2}{4\sigma^2}} \Phi\left(\frac{\eta}{2\sigma}\right), \quad (I2)$$

где $\Phi(\cdot)$ – функция Крампа.

2). Свертка (9) двух (в данном случае совпадающих) плотностей распределения вероятности эквивалентна произведению соответствующих характеристических функций /4/

$$f(t) = f_1(t) \cdot f_2(t),$$

где $f(t)$ – характеристическая функция искомой плотности распределения вероятности $\omega_1(\eta)$, $f_1(t)$ и $f_2(t)$ – характеристические функции плотностей распределения вероятности, участвующих в свертке. В нашем случае /7/

$$f_1(t) = f_2(t) = 1 - \frac{t\sigma}{\sqrt{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k k!}{(2k+1)!}(t\sigma\sqrt{2})^{2k+1} + j\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, t\sigma\, e^{-\frac{t^2\sigma^2}{2}}. \quad (I3)$$

Используя (I3) и обратное преобразование Фурье, можно записать /4/

$$\omega_1(\eta)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[f_1(t)\right]^2 e^{-jt\eta}\,dt. \qquad (I4)$$

Подставляя (I3) в (I4) и преобразуя, получим:

$$\omega_1(\eta)=\delta(\eta)+\frac{\sigma^2}{2\pi}\int_0^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(\sigma\sqrt{2})^{2k+1}k!}{(2k+1)!}t^{2k+1}\right]^2 t^2\cos t\eta\,dt-$$

$$-\frac{\sigma^2}{2}\int_0^{\infty}t^2e^{-\sigma^2t^2}\cos t\eta\,dt-\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(\sigma\sqrt{2})^{2k+2}k!}{(2k+1)!}t^{2k+2}\times \qquad (I5)$$

$$\times\cos t\eta\,dt+\sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}t\,e^{-\frac{\sigma^2t^2}{2}}\sin t\eta\,dt-\frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(\sigma\sqrt{2})^{2k+1}k!}{(2k+1)!}t^{2k+3}\sin t\eta\,dt.$$

Вычисление интегралов в (I5), содержащих бесконечные суммы, представляют собой весьма сложную задачу.

К аналогичным трудностям приводит использование другого представления характеристической функции $f_1(t)$ /I6/:

$$f_1(t)=1+j\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\sigma t\left[1+\Phi\left(j\frac{\sigma t}{\sqrt{2}}\right)\right]e^{-\frac{\sigma^2t^2}{2}}, \qquad (I6).$$

где $\Phi(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{x}e^{-z^2}dz$.

Эти обстоятельства побуждают, не останавливаясь на дальнейших вычислениях $\omega_1(\eta)$ с помощью аппарата характеристических функций, перейти к варианту отыскания $\omega_1(\eta)$, основанному на применении операционного исчисления.

3). В соответствии с общим правилом /I/ найдем изображение функции $\omega_1(\eta)$, определяемой выражением (9):

$$F(p) = \int_0^\infty \omega_1(\eta) e^{-p\eta} d\eta . \tag{I7}$$

Функция $\omega_1(\eta)$ удовлетворяет необходимым и достаточным условиям существования изображения /2/. Следуя методике Титчмарша /I/, рассмотрим предварительно неполное изображение, несколько преобразуя показатель экспоненты в (I7):

$$F_T(p) = \int_0^T e^{-p\eta} \omega_1(\eta) d\eta = \tag{I8}$$

$$= \int_0^T d\eta \int_0^\eta e^{-p(\eta - x_1) - p x_1} \frac{x_1}{\sigma^2} e^{-\frac{x_1^2}{2\sigma^2}} \frac{\eta - x_1}{\sigma^2} e^{-\frac{(\eta - x_1)^2}{2\sigma^2}} dx_1 .$$

В (I8) сделаем замену переменной

$$\begin{aligned} \eta - x_1 &= x, & dx &= d\eta , \\ x_1 &= y, & dx_1 &= dy . \end{aligned} \tag{I9}$$

Тогда $0 < x + y < T$, $x > 0$, $y > 0$.
Подставляя (I9) в (I8), имеем:

$$F_T(p) = \int_0^T e^{-px} \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx \times \int_0^{T-x} e^{-py} \frac{y}{\sigma^2} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy =$$

$$= \int_0^T e^{-px} \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx \times \left[\int_0^T \Phi(y) dy - \int_{T-x}^T \Phi(y) dy \right] , \tag{20}$$

где $\Phi(y) = e^{-py} \frac{y}{\sigma^2} e^{-y^2/2\sigma^2}$.

Раскрывая правую часть в (20), получим:

$$F_T(p)=\int_0^T e^{-px}\frac{x}{\sigma^2}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx\times\int_0^T e^{-py}\frac{y}{\sigma^2}e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}dy-\tag{21}$$

$$-\int_0^T e^{-px}\frac{x}{\sigma^2}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx\times\int_{T-x}^T e^{-py}\frac{y}{\sigma^2}e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}dy.$$

Согласно /I/

$$\lim_{T\to\infty}\int_0^T e^{-px}\frac{x}{\sigma^2}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx\times\int_{T-x}^T e^{-py}\frac{y}{\sigma^2}e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}dy=0.\tag{22}$$

Тогда из (2I) с учетом (22) имеем:

$$\lim_{T\to\infty}F_T(p)=F_1(p)\,F_2(p),\tag{23}$$

где

$$F_1(p)=\int_0^\infty e^{-py}\frac{y}{\sigma^2}e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}dy,$$

$$F_2(p)=\int_0^\infty e^{-px}\frac{x}{\sigma^2}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx$$

– изображения входящих в (8) одномерных ПРВ. Вводя в (23) обозначение $b^2=I/2\sigma^2$ и разлагая экспоненты в ряды, получим:

$$F(p)=\frac{1}{\sigma^4}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k b^{2k}}{k!}\int_0^\infty e^{-px}x^{2k+1}dx\times\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m b^{2m}}{m!}\int_0^\infty e^{-py}y^{2m+1}dy.\tag{24}$$

В соответствии с таблицами изображений /5/ выражение (24) принимает вид:

$$F(p)=\frac{1}{\sigma^4}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^{k+m}\frac{b^{2(k+m)}(2k+1)!(2m+1)!}{k!\,m!\;p^{2k+2m+4}}\,. \qquad (25)$$

Изображению (25) соответствует оригинал /5/

$$\omega_1(\eta)=\frac{1}{\sigma^4}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^{k+m}\frac{b^{2(k+m)}(2k+1)!(2m+1)!}{k!\,m!}\,\frac{\eta^{2k+2m+3}}{(2k+2m+3)!}\,. \qquad (26)$$

Нетрудно убедиться, что выражения (9), (I2) и (26) дают одни и те же результаты.

2. Найдем ПРВ $\omega_1(\eta)$ суммы $\eta = x_1 + x_2$ двух независимых рэлеевских случайных величин x_1 и x_2, совместная ПРВ которых зависит от двух параметров σ_1 и σ_2:

$$\omega_2(x_1,x_2)=\frac{x_1}{\sigma_1^2}e^{-\frac{x_1^2}{2\sigma_1^2}}\times\frac{x_2}{\sigma_2^2}e^{-\frac{x_2^2}{2\sigma_2^2}}\,, \qquad (27)$$

где по-прежнему $x_1 \geq 0$; $x_2 \geq 0$; $\eta \geq 0$.

В соответствии с /I4/

$$\omega_1(\eta)=\int_0^{\eta}\frac{x_1}{\sigma_1^2}e^{-\frac{x_1^2}{2\sigma_1^2}}\times\frac{\eta-x_1}{\sigma_2^2}e^{-\frac{(\eta-x_1)^2}{2\sigma_2^2}}\,dx_1\,. \qquad (28)$$

Как и ранее, рассмотрим три способа вычисления $\omega_1(\eta)$.

I). Методика прямого вычисления интеграла (28) остается прежней (см.(I0) и (II)), за тем лишь исключением, что в данном случае вводимые обозначения имеют вид:

$$A=\frac{1}{\sigma_1^2\sigma_2^2}e^{-\frac{\eta^2}{2\sigma_2^2}}\,,\quad p=\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2}\,,\quad q=-\frac{\eta}{\sigma_2^2}\,.$$

а выполняемые преобразования дополнительно осложняются различием параметров σ_1^2 и σ_2^2 .

Опуская, как и ранее, довольно громоздкие промежуточные вычисления, приведем окончательное выражение для $\omega_1(\eta)$:

$$\omega_1(\eta)=\frac{\sigma_1^2\eta}{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)^2}e^{-\frac{\eta^2}{2\sigma_1^2}}+\frac{\sigma_2^2\eta}{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)^2}e^{-\frac{\eta^2}{2\sigma_2^2}}+$$

$$+\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\sigma_1\sigma_2}{\sqrt{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)^3}}\left(\frac{\eta^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}-1\right)e^{-\frac{\eta^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}}\times \tag{29}$$

$$\times\left[\Phi\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\frac{\eta}{\sqrt{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}}\right)+\Phi\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\frac{\eta}{\sqrt{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}}\right)\right].$$

Нетрудно видеть, что при $\sigma_1^2=\sigma_2^2$ выражение (29) совпадает с (I2).

2). Использование аппарата характеристических функций для вычисления интеграла (28), как и выше для вычисления интеграла (9), представляет собой весьма трудную задачу и дополнительно осложнено различием характеристических функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$ ($f_1(t)$ описывается выражением (I3) либо (I6) при $\sigma=\sigma_1$, а $f_2(t)$ – теми же выражениями при $\sigma=\sigma_2$). Учитывая эти обстоятельства, для вычисления интеграла (28) применим операционное исчисление.

3). В соответствии с изложенной выше методикой изображение $F(p)$ ПРВ $\omega_1(\eta)$ равно произведению изображений ПРВ, входящих в подынтегральное выражение в (28):

$$F(p)=F_1(p)\cdot F_2(p),$$

где

$$F_1(p)=\int_0^\infty e^{-py}\frac{y}{\sigma_1^2}e^{-\frac{y^2}{2\sigma_1^2}}dy, \tag{30}$$

$$F_2(p)=\int_0^\infty e^{-px}\frac{x}{\sigma_2^2}e^{-\frac{x^2}{2\sigma_2^2}}dx.$$

Вводя обозначения

$$b_1^2 = \frac{1}{2\sigma_1^2}, \qquad b_2^2 = \frac{1}{2\sigma_2^2} \tag{31}$$

и заменяя в (30) экспоненты соответствующими рядами, получим:

$$\begin{aligned}
F(p) &= \int_0^\infty \frac{1}{\sigma_1^2} e^{-py} y \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{b_1^{2k}}{k!} y^{2k} dy \times \\
&\times \int_0^\infty \frac{1}{\sigma_2^2} e^{-px} x \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{b_2^{2m}}{m!} x^{2m} dx = \\
&= \frac{1}{\sigma_1^2 \sigma_2^2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{b_1^{2k}}{k!} \int_0^\infty e^{-py} y^{2k+1} dy \times \\
&\times \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{b_2^{2m}}{m!} \int_0^\infty e^{-px} x^{2m+1} dx = \\
&= \frac{1}{\sigma_1^2 \sigma_2^2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{b_1^{2k}}{k!} \frac{(2k+1)!}{p^{2k+2}} \times \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{b_2^{2m}}{m!} \frac{(2m+1)!}{p^{2m+2}} = \\
&= \frac{1}{\sigma_1^2 \sigma_2^2} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{k+m} \frac{b_1^{2k}\, b_2^{2m}\, (2k+1)!\,(2m+1)!}{k!\, m!\, p^{2k+2m+4}}.
\end{aligned} \tag{32}$$

Изображению (32) соответствует оригинал /I6/:

$$\omega_1(\eta) = \frac{1}{\sigma_1^2 \sigma_2^2} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{k+m} \frac{b_1^{2k} b_2^{2m} (2k+1)!(2m+1)!}{k!\, m!\, (2k+2m+3)!} \eta^{2k+2m+3}. \tag{33}$$

Вычисление значений $\omega_1(\eta)$ показывает, что выражения (28), (29) и (33) дают совпадающие результаты.

3. Наконец, рассмотрим еще более сложную задачу нахождения ПРВ $\omega_1(\eta)$ суммы $\eta = x_1 + x_2$ двух зависимых рэлеевских случайных величин x_1 и x_2, совместная ПРВ которых задана выражением (см., например, /17/)

$$\omega_2(x_1,x_2)=\omega_1(x_1)\,p(x_2|x_1),$$

где (34)

$$\omega_1(x_1) = \frac{x_1}{\sigma_2^2}\exp\left(-\frac{x_1^2}{2\sigma_1^2}\right),$$

$$p(x_2|x_1)=\frac{x_2}{\sigma_2^2}\exp\left(-\frac{x_1^2 e^{-2\alpha|\tau|}+x_2^2}{2\sigma_2^2}\right)I_0\left(\frac{x_1 x_2 e^{-\alpha|\tau|}}{\sigma_2^2}\right),$$

$p(x_2|x_1)$ - вероятность перехода, α - постоянный коэффициент, τ - временной интервал, σ_1 и σ_2 - параметры, $I_0(\cdot)$ - модифицированная функция Бесселя нулевого порядка.

В соответствии с общим правилом

$$\omega_1(\eta)=\int_0^{\eta}\omega_1(x_1)\,p(\eta-x_1|x_1)\,dx_1 = \tag{35}$$

$$=\int_0^{\eta}\frac{x_1}{\sigma_1^2}e^{-\frac{x_1^2}{2\sigma_1^2}}\times\frac{\eta-x_1}{\sigma_2^2}\exp\left[-\frac{x_1^2 e^{-2\alpha|\tau|}+(\eta-x_1)^2}{2\sigma_2^2}\right]I_0\left[\frac{x_1 e^{-\alpha|\tau|}(\eta-x_1)}{\sigma_2^2}\right]dx_1.$$

Учитывая весьма большие сложности, связанные с прямым вычислением интеграла (35) и с использованием для этих целей аппарата характеристических функций, при отыскании выражения для $\omega_1(\eta)$ воспользуемся сразу операционным исчислением.

Как и выше, запишем сначала неполное изображение величины $\omega_1(\eta)$ /1/:

$$F_T(p)=\int_0^T e^{-p\eta}\omega_1(\eta)\,d\eta=\int_0^T d\eta\int_0^{\eta}e^{-p(\eta-x_1)-px_1}\,\frac{x_1}{\sigma_1^2}\,e^{-\frac{x_1^2}{2\sigma_1^2}}\times \tag{36}$$

$$\times \frac{\eta - x_1}{\sigma_2^2} \exp\left[-\frac{x_1^2 e^{-2\alpha|\tau|} + (\eta - x_1)^2}{2\sigma_2^2}\right] \times I_0\left[\frac{x_1 e^{-\alpha|\tau|}(\eta - x_1)}{\sigma_2^2}\right] dx_1 .$$

Используем замену переменной (I9). Тогда

$$F_T(p) = \int_0^T e^{-px} \frac{x}{\sigma_2^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_2^2}} dx \times \int_0^T \Phi(y) dy - \text{O.r.}, \tag{37}$$

где

$$\Phi(y) = e^{-py} \frac{y}{\sigma_1^2} \exp\left[-\frac{(\sigma_2^2 + \sigma_1^2 e^{-2\alpha|\tau|}) y^2}{2\sigma_1^2 \sigma_2^2}\right] I_0\left(\frac{x y e^{-\alpha|\tau|}}{\sigma_2^2}\right),$$

остаточный член

$$\text{O.r.} = \int_0^T e^{-px} \frac{x}{\sigma_2^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_2^2}} dx \times \int_{T-x}^T \Phi(y) dy .$$

Вводя обозначения

$$b_1^2 = \frac{\sigma_2^2 + \sigma_1^2 e^{-2\alpha|\tau|}}{2\sigma_1^2 \sigma_2^2}, \qquad b_2^2 = \frac{1}{2\sigma_2^2}, \qquad a = \frac{1}{\sigma_2^2} e^{-\alpha|\tau|} \tag{38}$$

и заменяя $I_0(\cdot)$ соответствующим рядом, преобразуем (37) к виду

$$F_T(p) = \frac{1}{\sigma_1^2 \sigma_2^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{2n}}{2^{2n} n! \Gamma(n+1)} \times$$

$$\times \left[\int_0^T e^{-px} x^{2n+1} \exp(-b_2^2 x^2) dx \times \right. \tag{39}$$

$$\left. \times \int_0^T e^{-py} y^{2n+1} \exp(-b_1^2 y^2) dy \right] - \text{O.r.} =$$

$$= \frac{1}{\sigma_1^2\sigma_2^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{2n}}{2^{2n}\cdot n!\,\Gamma(n+1)} \left[F_{1T}(p)\cdot F_{2T}(p)\right] - \text{O.r.}$$

При $T \to \infty$ имеем /I/:

$$\lim_{T\to\infty} F_{1T}(p) = F_1(p), \qquad \lim_{T\to\infty} F_{2T}(p) = F_2(p), \tag{40}$$

$$\lim_{T\to\infty} \text{O.r.} = 0.$$

Преобразуя (39) с учетом (40) и заменяя входящие в него экспоненты соответствующими рядами, получим

$$F(p) = \frac{1}{\sigma_1^2\sigma_2^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{2n}}{2^{2n} n!\,\Gamma(n+1)} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{b_2^{2m}}{m!} \int_0^{\infty} e^{-px} x^{2n+2m+1} dx \times$$

$$\times \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{b_1^{2k}}{k!} \int_0^{\infty} e^{-py}\, y^{2n+2k+1}\, dy. \tag{4I}$$

В соответствии с /5/ окончательное выражение для $F(p)$ имеет вид

$$F(p) = \frac{1}{\sigma_1^2\sigma_2^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^{2n}}{n!\,\Gamma(n+1)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m b_2^{2m}(2n+2m+1)!}{m!\, p^{2n+2m+2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k b_1^{2k}(2n+2k+1)!}{k!\, p^{2n+2k+2}} \tag{42}$$

Изображению (42) соответстсует оригинал /5/

$$\omega_1(\eta) = \frac{1}{\sigma_1^2\sigma_2^2} \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f_n A_{nm} B_{nk}}{(4n+2m+2k+3)!}\, \eta^{4n+2m+2K+3},$$

где $$f_n = \frac{1}{(n!)^2}\left(\frac{a}{2}\right)^{2n}, \quad A_{nm} = (-1)^m \frac{b_2^{2m}(2n+2m+1)!}{m!}, \quad (43)$$

$$B_{nk} = (-1)^k \frac{b_1^2(2n+2k+1)!}{k!}.$$

Расчеты показывают, что выражения (35) и (43) дают одинаковые результаты.

Заключение

Выполненные исследования показывают, что интегральное преобразование Лапласа представляет собой весьма эффективный аппарат прикладного математического анализа. Его применение в теории вероятности может быть существенно расширено, по крайней мере, применительно к вычислению многократных сверток плотностей распределения вероятности неотрицательных случайных величин. При этом, в тех случаях, когда применение прямого метода либо аппарата характеристических функций позволяет получить необходимые результаты, использование интегрального преобразования Лапласа существенно упрощает решение задач. В других случаях необходимые результаты удается получить только при применении преобразования Лапласа.

Литература

1. Диткин В.А., Прудников А.П. Операционное исчисление. – М.: Высш.шк., 1966. – 406.с.
2. Андре Анго. Математика для электро- и радиоинженеров. – М.: Наука, 1964. – 772 с.
3. Рамачандран Б. Теория характеристических функций. – М.: Наука, 1975. – 224 с.
4. Лукач Е. Характеристические функции. – М.: Наука, 1979. – 424 с.
5. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. – М.: Наука, 1969. – Т.I. – 343 с.

6. Справочник по теории вероятностей и математической статистике/Под ред.В.С.Королюка. - Киев: Наукова думка, 1978.-582 с.
7. Заездный А.М. Основы расчетов по статистической радиотехнике. - М.: Связь, 1969. - 448 с.
8. Золотарев В.М. Современная теория суммирования независимых случайных величин. - М.: Наука, 1986. - 416 с.
9. Ибрагимов И.А., Линник Ю.В. Независимые и стационарно связанные величины. - М.: Наука, 1965. - 524 с.
10. Алехин В.А., Евдокимов Ю.Ф. Вычисления интеграла свертки // Изв.вузов. - Радиоэлектроника. - 1973. - Т.16, № 7. - С.112.
11. Фортес В.Б. Вычисление интеграла свертки//Изв.вузов. - Радиоэлектроника. - 1974. - Т.17, № 7. - С.128.
12. Козлов И.А., Серебряков В.П. Вычисление интеграла свертки // Изв.вузов. - Радиоэлектроника. - 1979. - Т.22, № 3. - С.76-78.
13. Лёвшин В.П., Симонов А.И. Модификация полиномиального метода вычисления свертки сигналов//Радиотехника и электроника. - 1986. - Т.31, № 9. - С.1757-1764.
14. Тихонов В.И. Статистическая радиотехника. - М.: Сов.радио, 1966. - 678 с.
15. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. - М.: Наука, 1981. - 406 с.
16. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. - М.: Сов.радио, 1969. - 751 с.
17. Тихонов В.И. Марковский характер огибающей квазигармонических флуктуаций//Радиотехника и электроника. - 1961. - Т.6, № 7. - С.1082-1091.