Нижегородский научно-исследовательский радиофизический институт

Министерства науки, высшей школы и технической политики
Российской Федерации

Препринт № 354

РАСПРОСТРАНЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛН В ВОЛНОВОДНЫХ СИСТЕМАХ С ФЛУКТУИРУЮЩИМИ ПАРАМЕТРАМИ

Е.Н.Пелиновский
А.В.Разин

Нижний Новгород 1992

П е л и н о в с к и й Е. Н., Р а з и н А. В.

РАСПРОСТРАНЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛН В ВОЛНОВОДНЫХ СИСТЕМАХ С ФЛУКТУИРУЮЩИМИ ПАРАМЕТРАМИ//Препринт № 354. – Нижний Новгород: НИРФИ, 1992. – 11 с.

УДК 534.2+538.574

С помощью галёркинской процедуры исключения "неволновой" координаты получена система одномерных уравнений, описывающая распространение нелинейных волн в двумерном волноводе (типа полосы) со случайными неоднородностями скорости звука. Дан качественный анализ решений этой системы при различных физических условиях.

Одной из актуальных проблем теории волновых процессов явля - ется разработка математического аппарата, пригодного для описания распространения нелинейных волн в случайно-неоднородных средах. Исследованию рассеяния недиспергирующих (звуковых) волн в одномерных нелинейных средах с флуктуирующими параметрами посвящены работы /I, 2/. В них предложен приближенный метод, основанный на асимптотически строгой процедуре многомасштабных разложений /3/, который позволил получить упрощенное эволюционное уравнение, содержащее только детерминированные величины. Представляет интерес обобщение результатов работ /I, 2/ на случай волно - водного распространения. Отметим, что ряд вопросов, касающихся распространения нелинейных волн в волноводах с флуктуирующими параметрами, рассматривался в /4, 5/.

В настоящей статье с помощью галеркинской процедуры исключения "неволновой" координаты /6/ получена система одномерных уравнений, описывающая распространение нелинейных волн в двумерном волноводе (типа полосы) со случайными неоднородностями скорости звука. Дан качественный анализ решений этой системы при различны физических условиях.

Итак, рассмотрим модельное двумерное волновое уравнение

$$u_{tt} - \left[1 + \varepsilon\alpha(x)\right]^2 (u_{xx} + u_{zz}) = \varepsilon^2 (u^2)_{xx} + \varepsilon^2 (u^2)_{zz} , \qquad \text{(I)}$$

определенное в полосе $-\infty < x < \infty$, $0 \leq z \leq H$ принадлежащей плоскости xOz. В (I) подстрочные индексы означают дифференцирование по соответствующей переменной, $0 < \varepsilon << 1$ - малый пара -

метр, $\alpha(x)$ - однородная случайная центрированная функция, средняя безразмерная скорость звука принята равной единице. Будем рассматривать случай, когда края полосы являются свободными, т.е. выполняются граничные условия

$$u_z\Big|_{z=0} = u_z\Big|_{z=H} = 0. \tag{2}$$

Для упрощения уравнения (I) воспользуемся методом Галеркина /6/. Представим его решение в виде разложения в ряд по собственным модам линейного волнового уравнения, получающегося из (I) при $\varepsilon = 0$:

$$u^{(N)}(x,z,t) = \sum_{K=1}^{N} v^{(K)}(x,t)\, C_K\, M_K(z). \tag{3}$$

Функции $M_K(z)$ удовлетворяют граничным условиям (2), а также условиям ортогональности. Число членов ряда N в (3) в рамках галеркинской процедуры не может быть определено. Оно должно выбираться из физических соображений, связанных с условиями возбуждения мод различных номеров и условиями межмодовых взаимодействий.

Граничным условиям (2) соответствуют собственные функции $M_K = \cos[\pi(K-1)z/H]$, так что решение уравнения (I) представляется в виде:

$$u^{(N)}(x,z,t) = \sum_{K=1}^{N} v^{(K)}(x,t)\, C_K \cos\left[\pi(K-1)z/H\right]. \tag{4}$$

После подстановки (4) в (I) приходим к следующему уравнению для суммы членов ряда:

$$\sum_{K=1}^{N} v_{tt}^{(K)}(x,t)\, C_K \cos\left[\pi(K-1)z/H\right] -$$

$$- \left[1+\varepsilon\alpha(x)\right] \sum_{K=1}^{N} v_{xx}^{(K)}(x,t)\, C_K \cos\left[\pi(K-1)z/H\right] +$$

$$+\left[1+\varepsilon\alpha(x)\right]^2\frac{\pi^2}{H^2}\sum_{k=1}^{N} v^{(k)}(x,t)\,C_k(k-1)^2\cos\left[\pi(k-1)z/H\right]=$$

$$=2\varepsilon^2\left\{\sum_{k=1}^{N} v_x^{(k)}(x,t)C_k\cos\left[\pi(k-1)z/H\right]\sum_{m=1}^{N} v_x^{(m)}(x,t)C_m\cos\left[\pi(m-1)z/H\right]+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=1}^{N} v^{(k)}(x,t)\,C_k\cos\left[\pi(k-1)z/H\right]\sum_{m=1}^{N} v_{xx}^{(m)}(x,t)C_m\cos\left[\pi(m-1)z/H\right]\right\}+$$

$$+2\varepsilon^2\frac{\pi^2}{H^2}\left\{\sum_{k=1}^{N} v^{(k)}(x,t)\,C_k(k-1)\sin\left[\pi(k-1)z/H\right]\sum_{m=1}^{N} v^{(m)}(x,t)\,\times\right.$$

$$\times\, C_m(m-1)\sin\left[\pi(m-1)z/H\right]-\sum_{k=1}^{N} v^{(k)}(x,t)C_k\cos\left[\pi(k-1)z/H\right]\times$$

$$\left.\times\sum_{m=1}^{N} v^{(m)}(x,t)C_m(m-1)^2\cos\left[\pi(m-1)z/H\right]\right\}. \qquad (5)$$

Уравнение для ℓ -го члена ряда можно получить умножив уравнение (5) на $M_\ell(z) = \cos\left[\pi(\ell-1)z/H\right]$ и проинтегрировав по z от $z = 0$ до $z = H$:

$$v_{tt}^{(\ell)}-\left[1+\varepsilon\alpha(x)\right]^2 v_{xx}^{(\ell)}+\left[1+\varepsilon\alpha(x)\right]^2\frac{\pi^2}{H^2}(\ell-1)^2 v^{(\ell)}=$$

$$=2\varepsilon^2\sum_{k=1}^{N}\sum_{m=1}^{N}\left[v_x^{(k)}v_x^{(m)}+v^{(k)}v_{xx}^{(m)}\right]\frac{C_k C_m}{C_\ell I_1(\ell)}\,I_2(\ell,k,m)+$$

$$+2\varepsilon^2\frac{\pi^2}{H^2}\sum_{k=1}^{N}\sum_{m=1}^{N} v^{(k)}v^{(m)}\frac{C_k C_m}{C_\ell I_1(\ell)}\left[(k-1)(m-1)I_3(\ell,k,m)-(m-1)^2 I_2(\ell,k,m)\right]. \qquad (6)$$

В (6) использованы обозначения:

$$I_1(\ell)=\int_0^H \cos\left[\pi(\ell-1)z/H\right]\cos\left[\pi(\kappa-1)z/H\right]dz=\begin{cases} H, & \ell=\kappa=1 \\ \frac{H}{2}, & \ell=\kappa>1 \\ 0, & \ell\neq\kappa \end{cases},$$

$$I_2(\ell,\kappa,m)=\int_0^H \cos\left[\pi(\ell-1)z/H\right]\cos\left[\pi(\kappa-1)z/H\right]\cos\left[\pi(m-1)z/H\right]dz=$$

$$=\frac{H}{4}\left[\frac{\sin\pi(\ell+\kappa+m-3)}{\pi(\ell+\kappa+m-3)}+\frac{\sin\pi(\kappa+m-\ell-1)}{\pi(\kappa+m-\ell-1)}+\right.$$

$$\left.+\frac{\sin\pi(\ell+m-\kappa-1)}{\pi(\ell+m-\kappa-1)}+\frac{\sin\pi(\ell+\kappa-m-1)}{\pi(\ell+\kappa-m-1)}\right], \qquad (7)$$

$$I_3(\ell,\kappa,m)=\int_0^H \cos\left[\pi(\ell-1)z/H\right]\sin\left[\pi(\kappa-1)z/H\right]\sin\left[\pi(m-1)z/H\right]dz=$$

$$=\frac{H}{4}\left[\frac{\sin\pi(\ell+\kappa-m-1)}{\pi(\ell+\kappa-m-1)}+\frac{\sin\pi(\ell+m-\kappa-1)}{\pi(\ell+m-\kappa-1)}-\right.$$

$$\left.-\frac{\sin\pi(\ell+\kappa+m-3)}{\pi(\ell+\kappa+m-3)}-\frac{\sin\pi(\kappa+m-\ell-1)}{\pi(\kappa+m-\ell-1)}\right]. \qquad (8)$$

Очевидно, что $I_2 \neq 0$ при выполнении хотя бы одного из четырех условий:

$$\ell + k + m - 3 = 0, \quad k + m - \ell - 1 = 0, \quad \ell + m - k - 1 = 0, \quad \ell + k - m - 1 = 0, \qquad (9)$$

причем первое из этих равенств может выполняться только если $\ell = k = m = 1$. При этих же условиях может быть отличным от нуля также интеграл I_3, если положительные и отрицательные члены суммы в квадратных скобках в (8) не компенсируют друг друга. При любых других соотношениях между ℓ, k и m, кроме указанных в (9), $I_2 = I_3 = 0$.

Детальный анализ показывает, что максимальное число членов в двойных суммах в (6) при $N > 2$ соответствует $\ell = 2$ и равно $M = 2N - 2$. При увеличении ℓ на единицу число членов в суммах уменьшается на единицу и становится равным N при $\ell = N$.

Рассмотрим некоторые частные случаи уравнения (6). Пусть $N = 1$, т.е. в волноводной системе может распространяться единственная мода. Тогда, полагая здесь и далее $C_1 = 1$, из (6) получаем:

$$v_{tt}^{(1)} - \left[1 + \varepsilon\alpha(x)\right]^2 v_{xx}^{(1)} = \varepsilon^2 \left[v^{(1)2}\right]_{xx}. \qquad (10)$$

Итак, уравнение для первой (низшей) моды является одномерным, как и в /1, 2/.

Если число мод в волноводе $N > 1$, то функция $v^{(1)}(x, t)$ описывается уравнением:

$$v_{tt}^{(1)} - \left[1 + \varepsilon\alpha(x)\right]^2 v_{xx}^{(1)} = \varepsilon^2 \sum_{k=1}^{N} \tilde{C}_k^2 \left[v^{(k)2}\right]_{xx}, \qquad (11)$$

где $\tilde{C}_1(k) = 1, \quad \tilde{C}_k = C_k / \sqrt{2}, \quad k > 1.$

Рассмотрим ситуацию, когда начальные условия задачи таковы, что в среде эффективно возбуждается лишь первая мода, так что $v^{(s)}/v^{(1)} \sim \varepsilon$, $s = 2, \ldots, N$. Пользуясь методом последо -

вательных приближений с точностью до ε^2 из (6), (II) получаем следующую систему уравнений для функций первого приближения $v_1^{(K)}$:

$$v_{1tt}^{(1)} - \left[1 + \varepsilon\alpha(x)\right]^2 v_{1xx}^{(1)} = \varepsilon^2 \left[v_1^{(1)2}\right]_{xx}, \qquad (I2)$$

$$v_{1tt}^{(S)} - \left[1+\varepsilon\alpha(x)\right]^2 v_{1xx}^{(S)} + \left[1+\varepsilon\alpha(x)\right]^2 \frac{\pi^2}{H^2}(s-1)^2 v_1^{(S)} = \varepsilon^2 \left[v_1^{(1)2}\right]_{xx} \qquad (I3)$$

Итак, в первом приближении "чужие" моды генерируются только вследствие нелинейности. Генерация же мод, обусловленная флук-туациями параметров среды, в линейном приближении в данном случае невозможна из-за ортогональности мод и специфики выбранных (одномерных) флуктуаций.

Уравнение (I2) является нелинейным уравнением со случайными коэффициентами для одной функции $v_1^{(1)}$, приближенно описывающей основную моду в полосе. Оно полностью совпадает с рассмотренным в /I, 2/, поэтому процедура его статистического усреднения выполняется аналогично /I, 2/.

Система (I3) представляет собой группу из N - I независимых линейных уравнений Клейна-Фока-Гордона со случайными коэффициентами и известной из решения уравнения (I2) правой частью. Линейность этих уравнений позволяет исследовать их стандартным методом среднего поля /7, 8/, причем в правой части в рассматриваемом приближении можно заменить $v_1^{(1)}$ на среднее поле $\langle v_1 \rangle^{(1)}$.

В следующем приближении по ε из (II), (6) получаем уравнения для функций $v_2^{(K)}$:

$$v_{2tt}^{(1)} - \left[1+\varepsilon\alpha(x)\right]^2 v_{2xx}^{(1)} = \varepsilon^2 f(v_2^{(1)}, v_1^{(2)}, \ldots, v_1^{(N)}), \qquad (I4)$$

$$v_{2tt}^{(S)} - \left[1+\varepsilon\alpha(x)\right]^2 v_{2xx}^{(S)} + \left[1+\varepsilon\alpha(x)\right]^2 \frac{\pi^2}{H^2}(s-1)^2 v_2^{(S)} =$$

$$= \varepsilon^2 f\left(v_2^{(1)}, v_1^{(2)}, \ldots, v_1^{(N)}\right). \qquad (15)$$

В (14), (15) символом f обозначена совокупность входящих в правую часть уравнения (6) двойных сумм. В правую часть нелинейного уравнения (14) входят вычисленные в первом приближении функции $v_1^{(S)}$. В правые части линейных уравнений (15) помимо функций $v_1^{(S)}$ входит также функция $v_2^{(1)}$, которую необходимо определить из решения уравнения (14).

Повторяя итерационную процедуру, можно получить для функций $v^{(1)}$ и $v^{(S)}$ уравнения, решения которых позволят найти их с требуемой точностью.

Пусть теперь начальные условия таковы, что эффективно возбуждается единственная мода с номером $p > 1$. При этом $v_2^{(q)}/v^{(p)} \sim \varepsilon$, $q = 1, \ldots, p-1, p+1, \ldots, N$. С точностью до ε для $v^{(p)}, v^{(S)}$ имеем уравнения:

$$v_{1tt}^{(p)} - \left[1+\varepsilon\alpha(x)\right]^2 v_{1xx}^{(p)} + \left[1+\varepsilon\alpha(x)\right]^2 \frac{\pi^2}{H^2}(p-1)^2 v_1^{(p)} = 0, \qquad (16)$$

$$v_{1tt}^{(q)} - \left[1+\varepsilon\alpha(x)\right]^2 v_{1xx}^{(q)} + \left[1+\varepsilon\alpha(x)\right]^2 \frac{\pi^2}{H^2}(q-1)^2 v_1^{(q)} = 0. \qquad (17)$$

Правая часть уравнения (16) должна содержать функцию $v_1^{(p)}$, однако, как нетрудно видеть,

$$I_2(p,p,p) = I_3(p,p,p) = 0 \qquad \text{при} \qquad p > 1. \qquad (18)$$

В следующем приближении по ε для функций $v_2^{(p)}, v_2^{(q)}$ получаем уравнения

$$v_{2tt}^{(p)} - \left[1+\varepsilon\alpha(x)\right]^2 v_{2xx}^{(p)} + \left[1+\varepsilon\alpha(x)\right]^2 \frac{\pi^2}{H^2}(p-1)^2 v_2^{(p)} =$$

$$= \varepsilon^2 f\left(v_1^{(1)}, \ldots, v_1^{(p-1)}, v_1^{(p+1)}, \ldots, v_1^{(N)}\right), \tag{19}$$

$$v_{2tt}^{(q)} - [1+\varepsilon\alpha(x)]^2 v_{2xx}^{(q)} + [1+\varepsilon\alpha(x)]^2 \frac{\pi^2}{H^2}(q-1)^2 v_2^{(q)} =$$

$$= \varepsilon^2 f\left(v_1^{(1)}, \ldots, v_1^{(p-1)}, v_1^{(p+1)}, \ldots, v_1^{(N)}\right). \tag{20}$$

Члены с $v_2^{(p)}$ в правых частях (19), (20) выпадают из двойных сумм в силу условия (18). Аналогично могут быть получены уравнения для функций $v^{(k)}$ в высших порядках метода последовательных приближений.

Отметим важно обстоятельство: если начальные условия задачи таковы, что в среде при $t = 0$ существует единственная мода с номером $p > 1$, то метод последовательных приближений по ε дает только линейные уравнения типа Клейна-Фока-Гордона для функций $v^{(k)}(x, t)$. Это определяется спецификой геометрии данной задачи.

Более сложной является ситуация, когда в волноводе в начальный момент времени возбуждаются несколько мод $v^{(r)}(r = 1,\ldots,n)$. Для этих мод методом последовательных приближений можно получить систему связанных нелинейных уравнений. Оставшиеся $N - n$ мод будут описываться группой линейных независимых уравнений, правые части которых должны содержать функции $v^{(r)}$, полученные на предыдущем этапе применения данного метода.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бенилов Е.С., Пелиновский Е.Н. Распространение нелинейных волн в средах с флуктуирующими параметрами//Докл.АН СССР. - - 1988. - Т.301, № 5. - С.1100-1103.

2. Бенилов Е.С., Пелиновский Е.Н. К теории распространения волн в нелинейных флуктуирующих средах без дисперсии//ЖЭТФ.- 1988. - Т.94, вып.I. - С.175-185.
3. Найфэ А.-Х. Методы возмущений. - М.: Мир, 1976. - 245 с.
4. Дворяковский В.П., Файнштейн С.М. О взаимодействии электро - магнитных волн в плоском плазменном волноводе с поглощением //Изв.вузов. - Радиофизика. - 1981. - Т.24, № 10. - С.1284 - -1286.
5. Урусова Н.А., Файнштейн С.М. О параметрическом взаимодейст - вии волн в плоском плазменном волноводе со случайными неод - нородностями концентрации//Изв.вузов. - Радиофизика. - 1986. - Т.29, № 5. - С.531-536.
6. Пелиновский Е.Н., Фридман В.Е., Энгельбрехт Ю.К. Нелинейные эволюционные уравнения. - Таллин : Валгус, 1984. - 154 с.
7. Канер Э.А. К теории распространения волн в среде со случай - ными неоднородностями//Изв.вузов. - Радиофизика. - 1959. - - Т.2, № 5. - С.827-829.
8. Karal F.C.,Keller J.B. Elastic, electromagnetic and other waves in a random medium// J.Math.Phys. 1964, V.5,N.4, P. 537-547.

Дата поступления статьи
19 ноября 1992 г.