

Нижегородский научно-исследовательский радиофизический институт  
Министерства науки, высшей школы и технической политики  
Российской Федерации

П р е п р и н т    № 348

К ВОПРОСУ О СИНХРОТРОННОМ ИЗЛУЧЕНИИ РЕЛЯТИВИСТСКОГО ЭЛЕКТРОНА,  
ДВИЖУЩЕГОСЯ ПО ВИНТОВОЙ ЛИНИИ В РАЗРЕЖЕННОЙ ПЛАЗМЕ.

I. КРИТЕРИИ ОЦЕНКИ ВЛИЯНИЯ ПЛАЗМЫ.

А.Г.Гундырев  
В.А.Разин

Нижний Новгород, 1992

Гундырев А.Г., Разин В.А.

К ВОПРОСУ О СИНХРОТРОННОМ ИЗЛУЧЕНИИ РЕЛЯТИВИСТСКОГО ЭЛЕКТРОНА, ДВИЖУЩЕГОСЯ ПО ВИНТОВОЙ ЛИНИИ В РАЗРЕЖЕННОЙ ПЛАЗМЕ.

I. КРИТЕРИИ ОЦЕНКИ ВЛИЯНИЯ ПЛАЗМЫ. // Препринт № 348.- Нижний Новгород: НИРФИ, 1992. - 35 с.

Подробно исследуется спектр интенсивности синхротронного излучения релятивистского электрона в плазме с показателем преломления  $n^2 = 1 - \omega_p^2 / \omega^2$ . На основании строгого решения задачи показано, что известный критерий [1-3], позволяющий оценивать влияние плазмы на синхротронное излучение релятивистских электронов,  $\omega \lesssim \omega^* = \omega_p^2 / (\omega_H \sin \theta)$ , справедлив приpitch-углах  $\theta \gtrsim mc^2 / E$ . Если же  $\theta < mc^2 / E$ , то учёт плазмы необходим при  $\omega_p \gtrsim \omega_H$ .

## I. ВВЕДЕНИЕ.

В приложениях теории синхротронного механизма генерации электромагнитных волн релятивистскими электронами иногда необходим учёт влияния окружающей "холодной" плазмы<sup>1</sup> на спектр, поляризацию, направленность, реабсорбцию и характер распространения излучения [1-3]. При питч-углах<sup>2</sup> электрона  $\theta \gg mc^2/E$  ( $m$  - масса электрона,  $c$  - скорость света,  $E$  - энергия электрона) в случае разреженной плазмы и слабого магнитного поля этот эффект можно исследовать, вводя должным образом в формулы, справедливые при отсутствии плазмы, в качестве множителя параметр [1-3]:

$$q = 1 + (1 - n^2)(E/mc^2)^2 \quad (1)$$

Полагая

$$n^2 = 1 - (\omega_p^2/\omega^2) \quad (2)$$

---

<sup>1</sup>Т.е. такой плазмы, в которой тепловым движением электронов можно пренебречь.

<sup>2</sup>Питч-угол - угол между направлениями скорости электрона  $v$  и внешнего магнитного поля  $H_0$ .

( $\omega$  - частота излучения,  $\omega_p = (4\pi N e^2 / m)^{1/2}$  - плазменная частота,  $N$  - концентрация электронов плазмы,  $e$  - заряд электрона), получим :

$$q = 1 + (\omega_p^2 / \omega^2) (E / mc^2)^2 = 1 + (\omega_p^2 / \omega^2) \gamma^2 \quad (3)$$

Здесь  $\gamma = E / mc^2$  - релятивистский фактор Лоренца.

При  $\omega_p = 0$  (излучение в вакууме)  $n=1$  и параметр  $q=1$ . Если же  $\omega_p \neq 0$ , то  $q > 1$  и влияние плазмы на синхротронное излучение, вообще говоря, надо учитывать. Для определённости допустим, что  $q = 2$ . Этому значению параметра  $q$  отвечает частота :

$$\omega^* = \omega_p \gamma \quad (4)$$

Если релятивистские электроны излучают преимущественно на частотах  $\omega \leq \omega^*$ , то влияние плазмы будет весьма значительно. Синхротронное излучение электронов в вакууме, как известно, имеет широкий спектр с максимумом мощности излучения  $W_\omega$  на частоте [4]:

$$\omega_{\max} = \omega_H \sin \theta \gamma^2, \quad (5)$$

где  $\omega_H = eH_0 / mc$  - гирочастота электронов,  $H_0$  - напряжённость внешнего магнитного поля. При  $\omega < \omega_{\max}$  мощность излучения  $W_\omega \propto \omega^{1/3}$ . На частотах  $\omega > \omega_{\max}$  мощность излучения квазиэкспоненциально убывает :  $W_\omega \propto \omega^{1/2} \exp(-2\omega/3\omega_{\max})$ . Полагая  $\omega = \omega_{\max} = \omega^*$ , находим:

$$\gamma^2 = \frac{\omega_{\max}}{\omega_H \sin \theta} \quad (6)$$

и по формуле (4):

$$\omega^* = \frac{\omega_p^2}{\omega_H \sin \theta} \approx 2\pi \cdot 30 \frac{N [\text{см}^{-3}]}{H \sin \theta [\text{Гс}]} \quad (7)$$

Таким образом, на частотах

$$\omega \leq \omega^* \quad (8)$$

окружающая плазма сильно влияет на характеристики синхротронного излучения. В частности, на указанных частотах происходит квазиэкспоненциальное уменьшение мощности излучения [1-3].

Возникает вопрос о пределах применимости критерия (8) при уменьшении питч-угла  $\theta$ , так как в случае  $\theta \leq mc^2/E$  характеристики синхротронного излучения радикально меняются. Для выяснения поставленного вопроса необходимо решить задачу о синхротронном излучении релятивистских электронов при произвольных питч-углах с учётом влияния плазмы. Эта задача рассматривалась неоднократно и были получены достаточно общие решения (см., например [5-9] и цитированную там литературу). Однако, ответ на вопрос о пределах применимости критерия (8) при уменьшении  $\theta$  проще всего получить, считая, как и в [1-3], плазму весьма разреженной, а магнитное поле слабым, что и будет сделано в настоящей работе.

Энергию, излучаемую электроном, будем вычислять, как взятую с обратным знаком работу силы радиационного трения [10]. Сила  $f$ , действующая на электрон со стороны создаваемого им электромагнитного поля, в единицу времени совершает работу  $f \cdot v = e \cdot (v \cdot E) = j \cdot E$ , где  $E$  - напряжённость электрического поля в точке нахождения электрона,  $v$  - его скорость,  $j$  - плотность тока, создаваемого электроном. Таким образом, задача заключается в вычислении электрического поля  $E$  при движении электрона по винтовой линии в разреженной плазме и величины  $j \cdot E$ .

## 2. СИНХРОТРОННОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ РЕЛЯТИВИСТСКОГО ЭЛЕКТРОНА В РАЗРЕЖЕННОЙ ПЛАЗМЕ В СЛУЧАЕ СЛАБОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ.

Будем считать выполненными следующие условия [1-3]: показатель преломления плазмы  $n(\omega) < 1$ ,  $1 - n(\omega) \ll 1$ ,  $(\omega_p/\omega) \ll 1$ . Последнее неравенство означает, что плазму можно считать изотропной. При этих условиях показатель преломления даётся выражением (2). Кроме того, примем, что: 1)  $n(\omega)$  не

зависит от координат и времени ; 2) внешнее магнитное поле  $H_0$  однородно и постоянно по величине; 3) энергия релятивистского электрона убывает очень медленно в процессе излучения электромагнитных волн: за период обращения электрона в магнитном поле её можно считать постоянной.

Принимая во внимание частотную дисперсию плазмы и справедливость принципа суперпозиции, уравнения Максвелла для электрического (  $E$  ) и магнитного (  $H$  ) полей излучения запишем в виде, отвечающем гармонической зависимости их от времени  $e^{-i\omega t}$  (магнитную проницаемость плазмы полагаем равной единице) :

$$\operatorname{rot} H = \frac{4\pi}{c} j - i \frac{n^2}{c} \omega E \quad (9)$$

$$\operatorname{rot} E = i \frac{\omega}{c} H \quad (10)$$

$$\operatorname{div} E = \frac{4\pi\rho}{n^2} \quad (11)$$

$$\operatorname{div} H = 0 \quad (12)$$

В уравнениях (9) и (11) плотность заряда

$$\rho = e \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_e) \quad (13)$$

и плотность тока

$$\mathbf{j} = e\mathbf{v} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_e) \quad (14)$$

В этих формулах  $\delta$  - дельта-функция Дирака,  $\mathbf{r}_e$  - радиус-вектор электрона,  $\mathbf{v} = d\mathbf{r}_e/dt$  - скорость электрона. При движении электрона по винтовой линии в однородном постоянном магнитном поле  $H_0$  можно положить:

$$\mathbf{r} = ( r_0 \cos\omega t, r_0 \sin\omega t, v_{\parallel} t ), \quad (15)$$

$$\mathbf{v} = ( -v_{\perp} \sin\omega t, v_{\perp} \cos\omega t, v_{\parallel} ), \quad (16)$$

где  $r_0 = (v_{\perp}/\omega_g)$  - радиус винтовой линии,  $\omega_g = \omega_H/\gamma$ ,  $v_{\perp}$  - величина компоненты скорости электрона, перпендикулярной  $H_0$ .

$v_{\parallel}$  - величина компоненты скорости электрона, параллельной  $H_0$ . Очевидно,  $v_{\perp} = v \sin \theta$ ,  $v_{\parallel} = v \cos \theta$  ( $v = |\mathbf{v}|$ ,  $\theta$  - угол между  $\mathbf{v}$  и  $H_0$  (pitch-угол)).

Для решения системы линейных уравнений (9-12) представим входящие в них векторы  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ ,  $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ ,  $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ , а также плотность заряда  $\rho(\mathbf{r}, t)$  в виде суперпозиции плоских волн (интегралов Фурье) [6,7,9,10]. Например,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} \quad (17)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{-\infty}^{+\infty} d\mathbf{r} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} \quad (18)$$

и т.д. В этих выражениях  $\mathbf{k}$  - волновой вектор,  $d\mathbf{k} = dk_x dk_y dk_z$ ,  $d\mathbf{r} = dx dy dz$ . В силу действительности  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$   $\mathbf{E}(-\mathbf{k}, -\omega) = \mathbf{E}^*(\mathbf{k}, \omega)$ . Из уравнений Максвелла для Фурье-компонент  $\mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega)$ ,  $\mathbf{H}(\mathbf{k}, \omega)$ ,  $\mathbf{j}(\mathbf{k}, \omega)$  и  $\rho(\mathbf{k}, \omega)$  получаем систему алгебраических уравнений:

$$[\mathbf{k} \times \mathbf{H}(\mathbf{k}, \omega)] = -\frac{4\pi i}{c} \mathbf{j}(\mathbf{k}, \omega) - n^2 \frac{\omega}{c} \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega), \quad (19)$$

$$[\mathbf{k} \times \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega)] = \frac{\omega}{c} \mathbf{H}(\mathbf{k}, \omega), \quad (20)$$

$$(\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega)) = -\frac{4\pi i \rho(\mathbf{k}, \omega)}{n^2}, \quad (21)$$

$$(\mathbf{k} \cdot \mathbf{H}(\mathbf{k}, \omega)) = 0. \quad (22)$$

Подставляя  $\mathbf{H}(\mathbf{k}, \omega)$  из (20) в (19) и раскрывая двойное векторное произведение, приходим к соотношению

$$\mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega)) - k^2 \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) + \frac{\omega^2}{c^2} n^2 \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) = -\frac{4\pi i \omega}{c^2} \mathbf{j}(\mathbf{k}, \omega) \quad (23)$$

В результате умножения этого уравнения скалярно на вектор  $\mathbf{k}$

будем иметь :

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) = - \frac{4\pi i}{\omega n^2} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{j}(\mathbf{k}, \omega)) \quad (24)$$

Теперь из уравнений (23) и (24) получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) &= \left[ \frac{4\pi i}{\omega n^2} \mathbf{k} \cdot (\mathbf{k} \cdot \mathbf{j}(\mathbf{k}, \omega)) - \frac{4\pi i \omega}{c^2} \mathbf{j} \right] \left( \frac{\omega^2}{c^2} n^2 - k^2 \right)^{-1} = \\ &= \frac{4\pi i}{\omega} \left[ \mathbf{j}_\perp(\mathbf{k}, \omega) + \mathbf{j}_\parallel \left( 1 - \frac{c^2 k^2}{\omega^2 n^2} \right) \right] \left( \frac{c^2 k^2}{\omega^2} - n^2 \right)^{-1} \quad (25) \end{aligned}$$

где  $\mathbf{j}_\perp(\mathbf{k}, \omega)$  — составляющая Фурье-компоненты тока, перпендикулярная вектору  $\mathbf{k}$ , а  $\mathbf{j}_\parallel(\mathbf{k}, \omega)$  — параллельная ему. Как следует из выражения (25), электрическое поле имеет две независимые компоненты: перпендикулярную волновому вектору  $\mathbf{k}$

$$\mathbf{E}_\perp(\mathbf{k}, \omega) = \frac{4\pi i}{\omega} \mathbf{j}_\perp(\mathbf{k}, \omega) \left( \frac{c^2 k^2}{\omega^2} - n^2 \right)^{-1} \quad (26)$$

(поперечные волны) и параллельную вектору  $\mathbf{k}$

$$\mathbf{E}_\parallel(\mathbf{k}, \omega) = \frac{4\pi i}{\omega n^2} \mathbf{j}_\parallel(\mathbf{k}, \omega) \quad (27)$$

(продольные волны) ( см. также соотношение (24) ).

Для продольных (плазменных) волн  $\mathbf{E}_\parallel(\mathbf{k}, \omega)$  из дисперсионного уравнения  $n^2 = 0$  находим частоту  $\omega = \omega_p^{(1)}$ ; энергией плазменных волн в рассматриваемом нами случае можно пренебречь [ 6 ]. В дальнейшем поэтому речь будет идти только о поперечных электромагнитных волнах  $\mathbf{E}_\perp(\mathbf{k}, \omega)$ , дисперсионное уравнение для которых  $c^2 k^2 = \omega^2 n^2(\omega)$  ( см. (26) ).

<sup>1</sup> Строго говоря, в приближении "холодной" плазмы можно рассматривать только плазменные колебания, так как частота не зависит от волнового вектора и групповая скорость  $\partial\omega/\partial\mathbf{k} = 0$ .



Средняя мощность излучения, генерируемая электроном, равна

$$W = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} dt \int d\mathbf{r} (\mathbf{j}_{\perp}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{E}_{\perp}(\mathbf{r}, t)) = \quad (28)$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} (\mathbf{j}_{\perp}(\mathbf{k}, \omega) \cdot \mathbf{E}_{\perp}^*(\mathbf{k}, \omega)) \quad (29)$$

Воспользовавшись выражением (26),  $W$  можно записать в виде:

$$W = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \left[ -\frac{4\pi i}{\omega} |\mathbf{j}_{\perp}(\mathbf{k}, \omega)|^2 \left( \frac{c^2 k^2}{\omega^2} - n^2 \right)^{-1} \right] \quad (30)$$

Чтобы выполнить интегрирование в (30), воспользуемся стандартным приёмом: введём исчезающе малую мнимую часть показателя преломления. При этом [6]

$$\text{Re} \left[ \frac{-i}{k^2 c^2 / \omega^2 - n^2} \right] \rightarrow \pi \delta \left( \frac{k^2 c^2}{\omega^2} - n^2 \right) \quad (31)$$

Таким образом, получаем:

$$W = \frac{1}{4\pi^2 T} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{\omega} \int d\mathbf{k} |\mathbf{j}_{\perp}(\mathbf{k}, \omega)|^2 \delta \left( \frac{c^2 k^2}{\omega^2} - n^2 \right) \quad (32)$$

Далее (см., например, [13])

$$\delta \left( \frac{c^2 k^2}{\omega^2} - n^2 \right) = \frac{\omega}{c} \frac{\delta[k - (\omega/c)n] + \delta[k + (\omega/c)n]}{2n}; \quad (33)$$

$$d\mathbf{k} = dk_x dk_y dk_z = k^2 \sin\alpha d\alpha d\beta dk = k^2 d\Omega dk, \quad (34)$$

где  $\alpha$  — угол между осью  $z$ , направленной вдоль внешнего магнитного поля  $H_0$ , и вектором  $\mathbf{k}$ ,  $\beta$  — угол между проекцией  $\mathbf{k}$  на плоскость  $(xy)$  и осью  $x$ ,  $d\Omega = \sin\alpha d\alpha d\beta$  — элемент телесного угла. Кроме того, поскольку положительные и отрицательные частоты физически эквивалентны и  $\mathbf{j}(-\mathbf{k}, -\omega) = \mathbf{j}^*(\mathbf{k}, \omega)$ , в (32) можно перейти к интегрированию по положительным частотам. В итоге приходим к выражению:

$$W = \frac{1}{4\pi^2 c^3 T} \int_0^{+\infty} \omega^2 n(\omega) d\omega \int_{k=(\omega/c)n} |j_{\perp}(k, \omega)|^2 d\Omega \quad (35)$$

В (35) индекс  $k=(\omega/c)n$  у квадрата модуля тока  $|j_{\perp}(k, \omega)|^2$  означает, что величину  $|k|$  надо взять равной  $(\omega/c)n$ .

До сих пор мы не конкретизировали характер тока  $j(r, t)$ , генерирующего электромагнитное излучение. Полагая, что ток определяется выражением (14), находим

$$j(k, \omega) = e \int_{-\infty}^{+\infty} dt v(t) e^{-i(kr_0 - \omega t)} \quad (36)$$

Учитывая цилиндрическую симметрию углового распределения излучения, выберем систему координат так, чтобы вектор  $k$  был параллелен плоскости  $YZ$ . При этом  $k_x=0$ ,  $k_y=k \sin\alpha$ ,  $k_z=k \cos\alpha$ . Выражение (36) после подстановки  $r_0(t)$  и  $v(t)$  по формулам (15) и (16) позволяет определить проекции  $j(k, \omega)$  на оси координат:

$$j_x(k, \omega) = ev_{\perp} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \sin\omega_g t e^{-i(x \sin\omega_g t + kv_{\parallel} t \cos\alpha - \omega t)}, \quad (37)$$

$$j_y(k, \omega) = ev_{\perp} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \cos\omega_g t e^{-i(x \sin\omega_g t + kv_{\parallel} t \cos\alpha - \omega t)}, \quad (38)$$

$$j_z(k, \omega) = ev_{\parallel} \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{-i(x \sin\omega_g t + kv_{\parallel} t \cos\alpha - \omega t)}, \quad (39)$$

где  $x=kr_0 \sin\alpha$ .

Дальнейшие вычисления выполним, воспользовавшись следующими соотношениями [13]:

$$e^{-ix \sin\mu} = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} J_s(x) e^{-is\mu}, \quad (40)$$

$$\sin\mu e^{-ix \sin\mu} = i \sum_{s=-\infty}^{+\infty} J'_s(x) e^{-is\mu}, \quad (41)$$

$$\cos\varphi e^{-ix\sin\varphi} = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \frac{s}{x} J_s(x) e^{-is\varphi}, \quad (42)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{i\omega t} = 2\pi \delta(\omega), \quad (43)$$

где  $J_s(x)$  и  $J'_s(x)$  - функция Бесселя и её производная по  $x$ . После несложных преобразований получаем:

$$j_x(k, \omega) = -2\pi i e v_{\perp} \sum_{s=-\infty}^{+\infty} J'_s(x) \delta(y), \quad (44)$$

$$j_y(k, \omega) = 2\pi e v_{\perp} \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \frac{s}{x} J_s(x) \delta(y), \quad (45)$$

$$j_z(k, \omega) = 2\pi e v_{\parallel} \sum_{s=-\infty}^{+\infty} J_s(x) \delta(y), \quad (46)$$

$$x = kr_0 \sin\alpha, \quad y = \omega - s\omega_g - kv_{\parallel} \cos\alpha.$$

Электрический вектор  $E_{\perp}(k, \omega)$  можно представить, как сумму двух ортогональных линейно поляризованных компонент: параллельной и перпендикулярной плоскости  $YZ$ , т.е. в виде  $e_{\alpha} E_{\perp\alpha}(k, \omega) + e_{\beta} E_{\perp\beta}(k, \omega)$ , где  $e_{\alpha}$  и  $e_{\beta}$  - единичные векторы, отвечающие выбранным направлениям поляризации электрического поля. Соответственно и ток  $j_{\perp}(k, \omega)$  разбивается на две составляющие:

$$j_{\perp}(k, \omega) = e_{\beta} j_x(k, \omega) + e_{\alpha} [j_y(k, \omega) \cos\alpha - j_z(k, \omega) \sin\alpha] \quad (47)$$

Из (47) следует

$$|j_{\perp}(k, \omega)|^2 = |j_x(k, \omega)|^2 + |j_y(k, \omega) \cos\alpha - j_z(k, \omega) \sin\alpha|^2 \quad (48)$$

Воспользовавшись выражениями (44)-(46), представим  $j_{\perp}(k, \omega)$  и  $|j_{\perp}(k, \omega)|^2$  в таком виде:

$$J_{\perp}(k, \omega) = 2\pi e \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \left[ e_{\beta}(-tv_{\perp}J'_s(x)) + e_{\alpha}(v_{\perp} \frac{s}{x} \cos\alpha - v_{\parallel} \sin\alpha) J_s(x) \right] \times \delta(y); \quad (49)$$

$$|J_{\perp}(k, \omega)|^2 = 4\pi^2 e^2 \frac{T}{2\pi} \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \left[ (v_{\perp}J'_s(x))^2 + (v_{\perp} \frac{s}{x} \cos\alpha - v_{\parallel} \sin\alpha)^2 J_s^2(x) \right] \times \delta(y) \quad (50)$$

При выводе выражения (50) использовано операторное равенство [7,9] :

$$\delta^2(y) = \frac{T}{2\pi} \delta(y),$$

где  $T$  - полное время, в течение которого излучает электрон.

На основании формул (35), (49) и (50) имеем:

$$W = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} W_s, \quad (51)$$

где  $W_s = W_s^{\alpha} + W_s^{\beta}$ ,  $W_s^{\alpha}$  и  $W_s^{\beta}$  - мощности излучения, отвечающие компонентам вектора  $E(k, \omega)$ , поляризованным в направлениях  $e_{\alpha}$  и  $e_{\beta}$  соответственно. Т.е.,

$$W_s = \frac{e^2}{2\pi c^3} \int \omega^2 n(\omega) \left[ (v_{\perp}J'_s(x))^2 + (v_{\perp} \frac{s}{x} \cos\alpha - v_{\parallel} \sin\alpha)^2 J_s^2(x) \right] \times \delta(y) d\omega d\Omega \quad (52)$$

Здесь

$$x = kr_0 \sin\alpha = \frac{sn\beta_{\perp} \sin\alpha}{1 - \beta_{\parallel} n \cos\alpha}, \quad (53)$$

$$y = \omega(1 - \beta_{\parallel} n \cos\alpha) - s\omega_g, \quad (54)$$

$$v_{\perp} \frac{s}{x} \cos\alpha - v_{\parallel} \sin\alpha = \frac{c(\cos\alpha - \beta_{\parallel} n)}{n \sin\alpha}, \quad (55)$$

$$\beta_{\perp} = v_{\perp}/c, \quad \beta_{\parallel} = v_{\parallel}/c, \quad k = (\omega/c)n.$$

В выражении (52) нетрудно провести интегрирование по частоте. Представим  $\delta(y)$  в виде [13]

$$\delta(y) = \frac{\delta(\omega - \omega_1)}{|y'(\omega_1)|} + \frac{\delta(\omega - \omega_2)}{|y'(\omega_2)|},$$

где  $y'$  - производная  $y$  по частоте  $\omega$ ,  $\omega_1$  и  $\omega_2$  - корни уравнения  $y=0$ :

$$\omega_{1,2} = \frac{\alpha \omega_g}{2(1 - \beta_1 \cos \alpha)} \left[ 1 \mp \sqrt{1 - \frac{2\beta_1 \omega_p^2 \cos \alpha}{s^2 \omega_g^2} (1 - \beta_1 \cos \alpha)} \right] \quad (56)$$

Отсюда (если подкоренное выражение близко к единице)

$$\omega_1 \approx \frac{\beta_1 \omega_p^2 \cos \alpha}{2\alpha \omega_g}, \quad (56')$$

$$\omega_2 \approx \frac{\alpha \omega_g}{1 - \beta_1 \cos \alpha} - \frac{\beta_1 \omega_p^2 \cos \alpha}{2\alpha \omega_g}$$

Таким образом,

$$W_a = \frac{e^2 s^2 \omega_g^2 n^2(\omega_2)}{2\pi c (1 - \beta_1 \cos \alpha)^2 |n(\omega_2) - \beta_1 \cos \alpha|} \times \quad (57)$$

$$\times \left\{ \beta_{\perp}^2 J_a'^2(x) + \frac{(\cos \alpha - \beta_1 n)^2}{n^2 \sin^2 \alpha} J_a^2(x) \right\} d\Omega$$

Здесь учтено, что  $|y'(\omega_2)| = |n - \beta_1 \cos \alpha|/n$  и  $\omega_1 \ll \omega_p$ . С погрешностью, не превышающей  $\omega_p^2/\omega^2$ , формулу (57) можно преобразовать к виду<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup> Формулу (57') можно сразу получить из (52), если при интегрировании по частоте считать показатель преломления  $n = \text{const}$ .

$$W_0 = \frac{e^2 s^2 \tilde{\omega}_g}{2\pi c s \sin^2 \alpha (1 - \beta_1 \mu \cos \alpha)} \left[ x_1^2 J_0'^2(\alpha x_1) + z^2 J_0^2(\alpha x_1) \right] d\Omega, \quad (57')$$

где  $x_1$  - значение  $x$  при  $s=1$ .

$$z = \frac{\cos \alpha - \beta_1 \mu}{1 - \beta_1 \mu \cos \alpha}, \quad (58)$$

$$\omega = \frac{\alpha \omega_g}{1 - \beta_1 \mu \cos \alpha} \quad (59)$$

Этот же результат можно легко получить, представляя  $E(k, \omega)$ , как сумму двух циркулярно поляризованных волн. Введём комплексные ортогональные единичные векторы

$$e_+ = (e_\alpha + i e_\beta) / 2^{1/2}, \quad (60)$$

$$e_- = (e_\alpha - i e_\beta) / 2^{1/2}. \quad (61)$$

Вектор  $e_+$  отвечает волне, поляризованной по левому кругу (если смотреть навстречу волне, то электрический вектор в ней вращается против часовой стрелки), вектор  $e_-$  соответствует волне, поляризованной по правому кругу. Из (60) и (61) следует:

$$e_\alpha = (e_+ + e_-) / 2^{1/2}, \quad (62)$$

$$e_\beta = (e_+ - e_-) / 2^{1/2} \quad (63)$$

Выражение (49) с учетом (62) и (63) преобразуется в такое:

$$J_\perp(k, \omega) = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \left\{ e_+ \cdot \left[ -v_\perp J_0'(x) + \left[ \frac{v_\perp s}{x} \cos \alpha - v_\parallel s \sin \alpha \right] J_0(x) \right] + \right. \\ \left. + e_- \cdot \left[ v_\perp J_0'(x) + \left[ v_\perp \frac{s}{x} \cos \alpha - v_\parallel s \sin \alpha \right] J_0(x) \right] \right\} \delta(y) \quad (64)$$

И далее по формуле (35)

$$W_{\alpha}^{\pm} = \frac{e^2 d\Omega}{4\pi c^3} \int_0^{\infty} \omega^2 n(\omega) \left[ \mp v_{\perp} J'_{\alpha}(x) + (v_{\perp} \frac{z}{x} \cos \alpha - v_{\parallel} \sin \alpha) J_{\alpha} \right]^2 \times \\ \times \delta[\omega(1 - \beta_{\parallel} n \cos \alpha) - z\omega_0] d\omega \quad (65)$$

где  $W_{\alpha}^{\pm}$  — мощности излучения гармоник с левой и правой круговой поляризациями. Очевидно,

$$W_{\alpha} = W_{\alpha}^{+} + W_{\alpha}^{-} \quad (66)$$

и мы снова получаем выражения (52), (57) и (57').

По поводу суммирования по  $z$  в (52) заметим следующее. Как уже отмечалось при выводе формулы (35), положительные и отрицательные частоты физически эквивалентны. Кроме того,  $J_{-\alpha}(x) = (-1)^{\alpha} J_{\alpha}(x)$ , а в формулы для интенсивности излучения входят квадраты этих функций, поэтому каждому слагаемому с  $z > 0$  отвечает равное ему по величине слагаемое с  $z < 0$ . Следовательно,

$$W = \sum_{z=-\infty}^{+\infty} W_{\alpha} = W_{z=0} + 2 \sum_{z=1}^{+\infty} W_{\alpha} \quad (67)$$

Отметим ещё, что в рассматриваемом нами случае  $n(\omega) < 1$  величина  $1 - \beta_{\parallel} n \cos \alpha$  не может обратиться в нуль. При  $\omega > 0$  и  $z = 0$  аргумент дельта-функции в (52) также не может принять значение, равное нулю, поэтому  $W_{z=0} = 0$ .<sup>41</sup>

С учётом этих замечаний формулу (57') заменим выражением (см. также [7,9]):

<sup>41</sup>Если электрон движется в среде с показателем преломления  $n > 1$  и  $\beta_{\parallel} n > 1$ , то  $W_{z=0} \neq 0$  (возникает излучение Вавилова-Черенкова).

$$W_s = \frac{e^2 s^2 \omega_s^2}{2\pi c s \sin^2 \alpha (1 - \beta_1 \cos \alpha)} \left[ x_1^2 J_s'^2(sx_1) + z^2 J_s^2(sx_1) \right] d\Omega, \quad (68)$$

в котором  $s = 1, 2, 3, \dots$

### 3. СПЕКТР ИЗЛУЧЕНИЯ ПРИ БОЛЬШИХ ПИТЧ-УГЛАХ.

Чтобы исследовать спектральное распределение мощности синхротронного излучения, надо проинтегрировать выражение (52) по телесному углу. В силу цилиндрической симметрии углового распределения излучения можно положить  $d\Omega = 2\pi s \sin \alpha da$ .

Покажем сначала, как влияет плазма на спектр синхротронного излучения при больших питч-углах ( $\theta \sim 1$ ). Воспользуемся следующими асимптотическими представлениями бесселевых функций [18] (см. также [19]):

$$J_s(s + \zeta s^{1/3}) \approx \frac{2^{1/3}}{s^{1/3}} Ai(-2^{2/3} \zeta), \quad (69)$$

$$J_s'(s + \zeta s^{1/3}) \approx -\frac{2^{2/3}}{s^{2/3}} Ai'(-2^{1/3} \zeta). \quad (70)$$

Здесь

$$Ai(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos\left(\frac{t}{3} + xt\right) dt \quad (71)$$

функция Эйри первого рода,  $s \gg 1$ ; штрих означает производную по аргументу. Введём вместо  $\zeta$  новую переменную  $x$  с помощью равенства

$$s + \zeta s^{1/3} = sx_1$$

Отсюда

$$\zeta = -s^{2/3} (1 - x_1)$$



Теперь<sup>1)</sup>

$$J_0(sx_1) \approx \frac{2^{1/3}}{s^{1/3}} At \left[ 2^{1/3} s^{2/3} (1-x_1) \right], \quad (69')$$

$$J'_0(sx_1) \approx \frac{2^{2/3}}{s^{2/3}} At' \left[ 2^{1/3} s^{2/3} (1-x_1) \right] \quad (70')$$

Величине  $x_1$  можно придать значение (53) при  $s=1$  и использовать (69') и (70') для вычислений по формуле (68). Вычисления существенно упрощаются, если ввести мгновенную систему координат  $(x', y', z')$  такую, что  $x'=x$ , а ось  $y'$  параллельна скорости электрона  $v$  в момент времени  $t=0$ . В новой системе координат угол  $\alpha$  заменяется на  $\alpha'=\pi/2-\xi$ , где  $\xi$  — угол между волновым вектором  $k$  и скоростью электрона  $v$  ( $\xi < 1$ ). Далее,  $v'_z=v'_z=0$ ,  $v'_x=v'_x=v$ . Соответственно,  $x_1 \rightarrow n\beta \cos \xi$ ,  $z \rightarrow s \sin \xi \approx \xi$ ,  $\omega_g \rightarrow \omega_0 = \omega_g \sin \theta$ ,  $\omega = s\omega_0$ , и мы приходим к модифицированной формуле Шотта [13]:

$$W_0 = \frac{e^2 \omega^2}{2\pi c} \left[ J_0'^2(s n \beta \cos \xi) + \xi^2 J_0^2(s n \beta \cos \xi) \right] d\Omega \quad (72)$$

Пользуясь соотношениями (69') и (70'), из (72) получаем

$$W_0 \approx \frac{2e^2}{\pi^2 c} \omega_0^2 \left( \frac{\omega}{2\omega_0} \right)^{2/3} \left[ v'^2(\tau) + \eta^2 v^2(\tau) \right] d\Omega, \quad (73)$$

где, следуя [19], введено обозначение  $v(\tau) = At(\tau)\sqrt{\pi}$ ,

<sup>1)</sup> Широко используются также функции Макдональда  $K_\nu(x)$ , связанные с функцией Эйри соотношениями [18,19]:

$$At(\tau) = \frac{1}{\pi} (\tau/3)^{1/2} K_{1/3} \left( \frac{2}{3} \tau^{3/2} \right),$$

$$At'(\tau) = -\frac{1}{\pi} \frac{\tau}{\sqrt{3}} K_{2/3} \left( \frac{2}{3} \tau^{3/2} \right).$$

$$\tau = 2^{2/3} \left[ \frac{\omega}{\omega_0} \right]^{2/3} (1 - \beta \cos \xi), \quad \eta = \xi \left[ \frac{\omega}{2\omega_0} \right]^{1/3}$$

Параметр  $\tau$  запишем следующим образом

$$\begin{aligned} \tau &= 2^{2/3} \left[ \frac{\omega}{\omega_0} \right]^{2/3} \left( 1 - \beta n + \frac{\xi^2}{2} \right) = \\ &= 2^{2/3} \left[ \frac{\omega}{\omega_0} \right]^{2/3} \left[ \frac{mc^2}{E} q + \xi^2 \right] = q\chi + \eta^2, \end{aligned}$$

$$\chi = \left[ \frac{\omega}{2\omega_1} \right]^{2/3}, \quad \omega_1 = \left[ \frac{eH_{01}}{mc} \right] \left[ \frac{E}{mc^2} \right]^2,$$

Здесь  $H_{0\perp} = H_0 \sin \theta$ ,  $q = 1 + (1 - \beta^2)(E/mc^2)^2$ .

В новых обозначениях формула (73) запишется так:

$$W_s \approx \frac{2e^2}{\pi^2 c} \omega_0^2 \left[ \frac{\omega}{2\omega_0} \right]^{2/3} \left[ \nu'^2 (q\chi + \eta^2) + \eta^2 \nu'^2 (q\chi + \eta^2) \right] d\Omega, \quad (74)$$

Проинтегрируем теперь (74) по телесному углу, учтя, что  $d\Omega = 2\pi d\xi$  и область существенных значений  $W_s$  ограничена очень малыми углами  $\xi$ . Заменяем, кроме того, переменную интегрирования  $\xi$  на  $\eta$ . Из-за эффекта Доплера каждому номеру гармоники  $s$  при изменении угла  $\xi$  в пределах ширины "луча"  $\sim (mc^2/E) = \gamma^{-1}$  отвечает интервал частот (ширина "линии")  $(\Delta\omega)_\xi \approx \omega_s \gamma^2 \cos \theta / \sin^3 \theta^{1)}$ . В тоже время изменение частот при переходе от номера гармоники  $s$  к номеру  $s+1$   $(\Delta\omega)_s \approx \omega_s / \sin^2 \theta$ . Отношение  $(\Delta\omega)_\xi / (\Delta\omega)_s \approx \gamma^2 \cot \theta$ . При  $\theta \sim 1$  оно  $\sim \gamma^2 \gg 1$ , т.е. спектральные "линии" существенно перекрываются. Целесообразно поэтому провести ещё суммирование по  $s$  в пределах частотного интервала  $d\omega$  и перейти таким образом от  $W_s$  к спектральной плотности мощности излучения  $W_\omega$ . Так как  $W_s ds =$

<sup>1)</sup> Относительная ширина "линии"  $(\Delta\omega)_\xi / \omega \approx \gamma^{-1} \cot \theta$ .

$=\dot{W}_\omega d\omega$ , а  $ds = \dot{\alpha}\omega/\omega_0$ , то  $\dot{W}_\omega = \dot{W}_\omega/\omega_0$ . В итоге для спектральной плотности мощности излучения, отечающей интервалу частот  $\omega, \omega + d\omega$ , получаем выражение:

$$\dot{W}_\omega = \frac{8e^2}{\pi c} \omega_0 \left[ \frac{\omega}{2\omega_0} \right]^{1/3} I(q\chi) \quad (75)$$

где 
$$I(q\chi) = \int_0^\infty \left\{ \left[ \nu'(q\chi + \eta^2) \right]^2 + \eta^2 \left[ \nu(q\chi + \eta^2) \right]^2 \right\} d\eta \quad (76)$$

Эти формулы были получены ранее в работах [1-3] и подробно анализировались в [16]. При  $n=1$  (излучение в вакууме)  $q=1$  они переходят в формулы В.В.Владимирского [15].

Выражение (75) удобно записать, как функцию параметра  $f = 2(q\chi)^{2/3} = f_1 q^{2/3}$ ,  $f_1 = \omega/\omega_1$ :

$$\dot{W}_\omega = \frac{8}{\pi} \frac{e^3 H_{0\perp}}{mc^2} q^{-1/2} y(f) \quad (77)$$

где 
$$y(f) = (f/2)^{1/3} I \left[ (f/2)^{2/3} \right] \quad (78)$$

- универсальная функция, характеризующая спектр излучения ультрарелятивистского электрона, движущегося в магнитном поле [15]. При  $q=1$  в предельных случаях низких и высоких частот функция  $y(f_1)$  имеет вид [15]

$$0,256 (f_1/2)^{1/3} \quad (f_1 \ll 1); \quad (79)$$

$$\frac{1}{16} (\pi f_1)^{1/2} e^{-(2f_1^{1/3})} \quad (f_1 \gg 1). \quad (80)$$

Таким образом, приходим к хорошо известному результату: на низких частотах интенсивность синхротронного излучения в вакууме увеличивается с ростом частоты, как  $\omega^{1/3}$ , на высоких же частотах она квазиэкспоненциально убывает.

Функции  $y(f_1)$  и  $I(\chi)$  были впервые протабулированы в работе [15]. Функция  $y(f_1)$  имеет максимум при  $f_1 \approx 0,5$ , причем  $y(0,5) \approx 0,1$ . Следовательно, максимальная мощность синхротронного излучения в вакууме приходится на частоты  $\nu = \omega/2\pi$  около

$$\nu_{\max} \approx 0,5(\omega_1/2\pi) \approx 1,4 \cdot 10^9 H_{o\perp} (E/mc^2)^2 \quad (81)$$

( В этой формуле частота выражается в герцах, а магнитное поле  $H_{o\perp}$  - в гауссах ).

Соответствующая частоте  $\nu_{\max}$  спектральная плотность мощности синхротронного излучения ( см. (77) ) в вакууме

$$W_{\nu_{\max}} = 2\pi W_{\omega_{\max}} \approx 3 \cdot 10^{22} H_{o\perp} [\text{эрг с}^{-1} \text{ Гц}^{-1}] \quad (82)$$

При  $q > 1$ , т.е. когда влиянием окружающей плазмы пренебречь нельзя, спектр синхротронного излучения существенно изменяется. Спектральное распределение излучения в основном определяется функцией  $J(f)$ . На частоте [2,16]

$$\omega_{f_{\min}} = \sqrt{2} \omega_p \gamma \quad (83)$$

параметр  $f$  имеет минимальную величину

$$f_{\min} = \frac{3^{3/2}}{2} \frac{\omega_p}{\omega_1} \gamma \approx \frac{\omega_{f_{\min}}}{\omega_{\max}} \quad , \quad (84)$$

где  $\omega_{\max} \approx 0,5\omega_1$  - частота максимальной мощности синхротронного излучения в вакууме. Если  $f_{\min} < 1$  ( $\omega^* < \omega_1$ ), то из-за наличия нерелятивистской плазмы подавляются только низкочастотные гармоники, для которых  $f > 1$ . При  $(\omega^*/\omega)^2 \gg 1$  параметр  $f \approx (\omega^*/\omega)^2$  и

$$W_\nu \approx \sqrt{\pi} \frac{e^3 H_{o\perp}}{mc^2} e^{-\frac{2}{3} \left\{ \frac{\omega^*}{\omega} \right\}^2} \quad , \quad (85)$$

т.е. спектр резко обрывается на частотах  $\omega \leq \omega^*$ . Полная мощность синхротронного излучения в этом случае убывает на величину

$$\int_0^{\omega^*} W_\omega d\omega \approx \frac{1,22}{\pi} \frac{e^3 H_{o\perp}}{mc^2} \omega^* \left\{ \frac{\omega^*}{\omega_1} \right\}^{1/3} \quad (86)$$

В диапазоне частот  $\omega^* < \omega < 0,5\omega_1$  мощность излучения  $W_\omega \propto \omega^{1/3}$ , как и в отсутствие плазмы. Если же  $f_{\min} > 1$ , то спектр

синхротронного излучения радикально меняется и на высоких частотах: максимум излучения смещается в сторону более высоких частот ( $\sim \omega_{f_{\min}}$ ), а спектральная плотность мощности сильно уменьшается. При  $\omega^* > \omega_1$  параметр  $f(\omega) = (\omega/\omega_1)(1 + \omega^{*2}/\omega^2)^{3/2}$  приблизительно может быть выражен двумя членами ряда, получающегося путём разложения  $f(\omega)$  в окрестностях  $\omega = \omega_{f_{\min}} = \sqrt{2} \omega^*$ :

$$\begin{aligned} f(\omega) &\approx f(\omega_{f_{\min}}) + (1/2)f''(\omega_{f_{\min}}) (\omega - \omega_{f_{\min}})^2 = \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{\omega^*}{\omega_1} + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{\omega_1 \omega^*} (\omega - \sqrt{2} \omega^*)^2 \end{aligned} \quad (87)$$

Воспользовавшись формулами (77), (80) и (87), получаем (медленно меняющуюся с частотой преэкспоненциальную функцию заменяем её значением при  $\omega = \omega_{f_{\min}}$ ):

$$W_{\nu} \approx 3^{1/4} \sqrt{\pi} \frac{e^3 H_{\perp}}{mc^2} \left[ \frac{\omega^*}{\omega_1} \right]^{1/2} e^{-\sqrt{3} \frac{\omega}{\omega_1}} e^{-\frac{(\omega - \sqrt{2} \omega^*)^2}{\sqrt{3} \omega_1 \omega^*}} \quad (88)$$

Таким образом, при сильном влиянии плазмы спектр синхротронного излучения становится квазигaussianовым с полушириной "линии" на уровне  $e^{-1}$  равной  $(3^{1/2} \omega_1 \omega^*)^{1/2}$ . Нетрудно показать, что полная мощность излучения в этом случае квазиэкспоненциально убывает с ростом  $\omega^*$ :

$$W \approx \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{e^3 H_{\perp}}{mc^2} \omega^* e^{-\sqrt{3} \frac{\omega}{\omega_1}} \quad (89)$$

Спектральная плотность мощности синхротронного излучения ансамбля релятивистских электронов, имеющих степенной энергетический спектр, также квазиэкспоненциально убывает на частотах  $\omega \lesssim \omega^* \gtrsim \omega_1$  [1-3, 16]:

$$W \propto \left[ \frac{\omega}{\omega^*} \right]^{1-\alpha} \cdot e^{-\sqrt{3} \frac{\omega}{\omega_1}} \quad (89')$$

( $\alpha$  - показатель энергетического спектра релятивистских электронов  $N(E) \propto E^{-\alpha}$ .)

#### 4. СПЕКТР ИЗЛУЧЕНИЯ ПРИ МАЛЫХ ПИТЧ-УГЛАХ.

Перейдём к анализу спектра синхротронного излучения при малых питч-углах электрона ( $\theta \ll 1$ ). Проинтегрируем сначала формулу (52) для  $W_s$  по телесному углу  $d\Omega = 2\pi \sin\alpha d\alpha$ , а затем просуммируем полученное выражение по номерам гармоник  $s$ .

Введём новую переменную  $\mu = \cos\alpha$ . Тогда  $d\Omega = -2\pi d\mu$ ,  $\sin\alpha = \sqrt{1-\mu^2}$ ,

$$\delta(y) = \delta(-y) = \delta(\omega\beta_1 n \mu - \omega + s\omega_g) = \frac{\delta(\mu - \mu_0)}{\omega\beta_1 n},$$

$$\mu_0 = \frac{\omega - s\omega_g}{\omega\beta_1 n}, \quad \beta_1 \neq 0.$$

После несложных преобразований получаем следующее выражение для мощности излучения в интервале частот  $\omega, \omega + d\omega$ :

$$W(\omega, \theta) d\omega = \frac{2e^2 \omega d\omega}{c \beta \cos\theta} \sum_s \left\{ \left[ \beta s t n \theta J'_s(x) \right]^2 + \frac{(\mu_0 - \beta n \cos\theta)^2}{n^2 (1 - \mu_0^2)^2} J_s^2(x) \right\}, \quad (90)$$

$$\text{где} \quad x = \frac{s n \beta s t n \theta \sqrt{1 - \mu_0^2}}{1 - n \beta \cos\theta \cdot \mu_0} \quad (91)$$

Значения номеров гармоник  $s$ , по которым проводится суммирование в формуле (90), определяются неравенствами

$$\frac{\omega}{\omega_g} (1 - n \beta \cos\theta) \leq s \leq \frac{\omega}{\omega_g} (1 + n \beta \cos\theta), \quad (92)$$

которые следуют из неравенств  $-1 \leq \mu_0 \leq 1$ . Подставив в формулу (90) выражение  $\mu_0$ , получим

$$W(\omega, \theta) d\omega = \frac{2e^2 \omega d\omega}{c n^2 \beta \cos\theta} \sum_s \left\{ \left[ n \beta s t n \theta J'_s(x) \right]^2 + \frac{(\omega - s\omega_g - \omega n^2 \beta^2 \cos^2\theta)^2}{\omega^2 n^2 \beta^2 \cos^2\theta - (\omega - s\omega_g)^2} J_s^2(x) \right\}, \quad (93)$$

$$x = \frac{tg\theta}{\omega_g} \sqrt{\omega^2 n^2 \beta^2 \cos^2 \theta - (\omega - \alpha \omega_g)^2} \quad (94)$$

Частотный интервал  $\Delta\omega$  в формуле (93) ограничен неравенствами  $\omega_1 \leq \omega \leq \omega_2$ , где  $\omega_1$  и  $\omega_2$  - корни уравнения  $\mu_0 = 1$  при  $\alpha=0$ .

$$\Delta\omega = \frac{\alpha \omega_g}{1 - \beta \cos \theta} \sqrt{1 - \frac{2\beta \cos \theta \omega_p^2}{s^2 \omega_g^2} (1 - \beta \cos \theta)} \quad (95)$$

Формула (93) позволяет вычислять спектральную плотность мощности электронов, движущихся с произвольными скоростями по винтовым линиям в разреженной плазме с показателем преломления  $n^2 = 1 - \omega_p^2/\omega^2$ .

Если питч-угол  $\theta \ll (mc^2/E) < 1$ , то, ограничиваясь в формуле (100) приближениями  $\sim \theta^2$ , получаем

$$W(\omega, \theta) d\omega = \frac{2e^2}{c} \theta^2 \omega d\omega \sum_s \left\{ J_s'^2(x) + \right. \quad (96)$$

$$\left. + \frac{[\omega(q + \theta^2 \gamma^2) - \alpha \omega_H \gamma] J_s^2(x)}{\omega \gamma^2 \theta^2 [2\alpha \omega_H \gamma (q + \theta^2 \gamma^2)^{-1} - \omega]} \right\},$$

$$x = \frac{\theta}{\omega_H} \sqrt{\omega [2\alpha \omega_H \gamma - \omega(q + \theta^2 \gamma^2)]}, \quad (97)$$

где введен параметр  $q = 1 + (\omega_p^2/\omega^2)\gamma^2$ . При  $\theta \ll mc^2/E$  можно положить [18]:

$$J_s(\alpha x) \sim \frac{1}{2^s s!} (\alpha x)^s; \quad J_s'(\alpha x) \sim \frac{1}{2^s s!} (\alpha x)^{s-1} \quad (98)$$

Нетрудно видеть, что в этом случае преобладает излучение на первой "гармонике" ( $s=1$ ), для которой

$$W(\omega, \theta) d\omega = \frac{e^2}{c} \theta^2 \omega d\omega \left\{ 1 - \frac{q\omega}{\omega_H \gamma} + \frac{1}{2} \left[ \frac{q\omega}{\omega_H \gamma} \right]^2 \right\}. \quad (99)$$

Интервал излучаемых частот

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = 2\omega_H \gamma \sqrt{1 - (\omega_p/\omega)^2}, \quad (100)$$

$W(\omega, \theta) = 0$  вне этого диапазона.

В отсутствие плазмы надо положить в (96) и (99)  $q=1$ , и мы приходим к формулам, полученным в [17].

Для численных расчётов при маломpitch-угле релятивистского электрона удобно воспользоваться аппроксимацией функции Бесселя, предложенной в работе [14]:

$$J_0(sx) = \frac{\exp(-s/2n_0)}{(2\pi s)^{1/2}} \left[ (1-x^2)^{3/2} + \frac{0,5033}{s} \right]^{1/s}, \quad (101)$$

$$J'_0(sx) = \frac{\exp(-s/2n_0)}{(2\pi s)^{1/2} x} \left[ (1-x^2)^{3/2} + \frac{1,193}{s} \right]^{-1/s} \left[ 1 - \frac{1}{5s^{2/3}} \right],$$

где  $(1/2n_0) = \ln \left[ 1 + (1-x^2)^{3/2} \right] - \ln x - (1-x^2)^{1/2}$ .

Эта аппроксимация справедлива при  $1 \leq s < \infty$  и  $0 \leq x < 0.999$  с погрешностью, не превышающей нескольких процентов.

На рисунке 1 представлены спектры излучения, соответствующие отдельным номерам гармоник в вакууме и их сумма в случае  $\theta = \pi c^2/E = 10^{-3}$ , вычисленные по формулам (93) и (101). Видно, что частотный диапазон, соответствующий каждому номеру "гармоники", довольно широк, и, как уже отмечалось, "гармоники" сильно перекрываются, образуя непрерывный спектр.

На рисунках 2-6 представлены спектры излучения при  $\theta = 5\pi c^2/E$ ,  $\theta = 2\pi c^2/E$ ,  $\theta = \pi c^2/E$ ,  $\theta = 0,5\pi c^2/E$ ,  $\theta = 0,1\pi c^2/E$  ( $\pi c^2/E = 10^{-3}$ ) в вакууме и плазме при разных  $\omega_p$ , рассчитанные



по формулам (93) и (101).

Если питч-угол достаточно мал ( $\theta \leq 0,1mc^2/E$ , так что можно считать  $\theta \ll 1$ ), то, как уже отмечалось, излучение происходит в основном на первой "гармонике" и спектр резко обрывается на частоте:

$$\omega = \omega_{\max} = \frac{\omega_H \gamma^{-1}}{1 - \beta \cos \theta} \approx \frac{\omega_H \gamma^{-1}}{1 - [1 - 1/(2\gamma^2)](1 - \theta^2/2)} = \frac{2\omega_H \gamma}{1 + \theta^2 \gamma^2} \approx 2\omega_H \gamma \quad (102)$$

(см. рисунок 6).

На низких частотах  $\omega \ll \omega_H \gamma$   $W(\omega) \propto \omega$ .

Рассмотрим теперь влияние плазмы на спектр синхротронного излучения при малых питч-углах. Как следует из соотношения (95), по мере увеличения плазменной частоты  $\omega_p$  частотный диапазон, соответствующий номеру гармоники  $z$  существенно уменьшается (см. рис.6 для  $\omega_p = 0,9\omega_H$  и рис.4 для  $\omega_p = 0,7\omega_H$ ). При определенном значении  $\omega_p$  делается невозможным излучение на гармониках

$$z < z^* = \frac{\omega_p \gamma}{\omega_H} [2\beta \cos \theta \cdot (1 - \beta \cos \theta)]^{1/2} \approx \frac{\omega_p}{\omega_H} [1 + \theta^2 \gamma^2]^{1/2} \quad (103)$$

(когда выражение под корнем в (95) становится отрицательным). Например, при  $\theta = mc^2/E$  и  $\omega_p = 1,5\omega_H$  (см. рис.4) первая гармоника не излучается и наблюдается существенное уменьшение мощности излучения на низких частотах. При больших значениях  $\omega_p$  могут не излучаться и более высокие гармоники (см. рис. 2-6). Как уже отмечалось, в случае  $\theta \gg mc^2/E$  плазма существенно видоизменяет спектр излучения на частотах  $\omega \leq \omega^* = \omega_p^2 / (\omega_H \sin \theta)$ . При уменьшении питч-угла частота  $\omega^*$  увеличивается, стремясь при  $\theta \rightarrow 0$  к бесконечности. В то же время при малых  $\theta$  спектр ограничен сверху частотой  $2\omega_H \gamma$ , следовательно, частота  $\omega^*$  становится неадекватной характеристикой влияния плазмы на процесс излучения при малых питч-углах электрона. Необходимо выяснить, следовательно, при каком минимальном  $\theta$  можно пользоваться критерием (8).

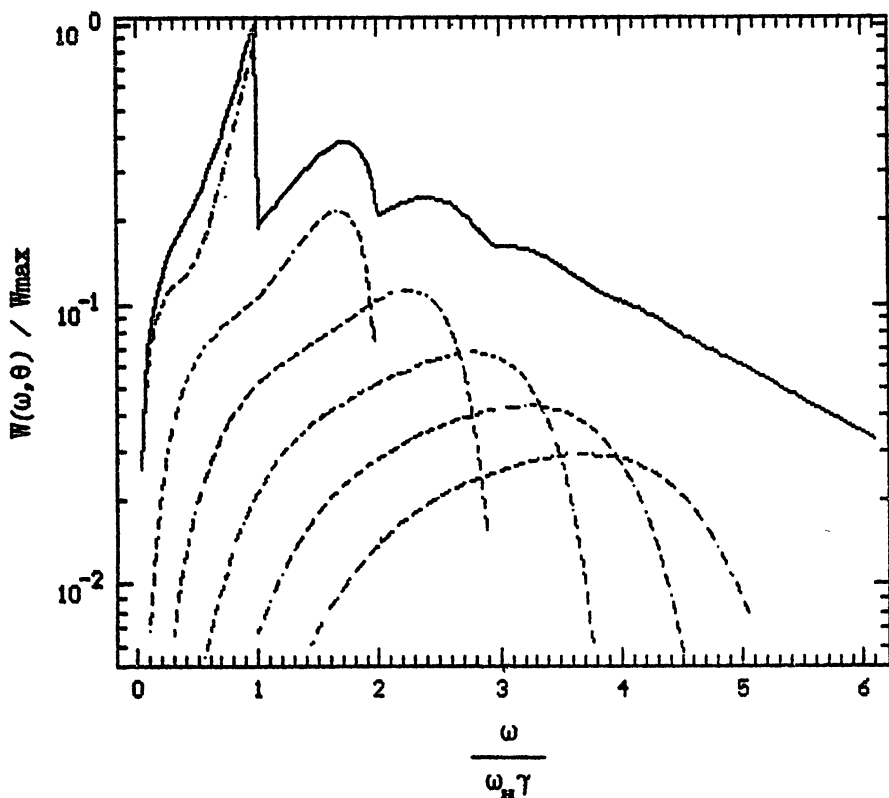


Рис.1. Спектральная плотность мощности синхротронного излучения релятивистского электрона с питч-углом  $\theta = \pi c^2 / E$  в вакууме. Штриховыми линиями показаны спектры, соответствующие номерам гармоник  $n=1, 2, \dots, 6$ .

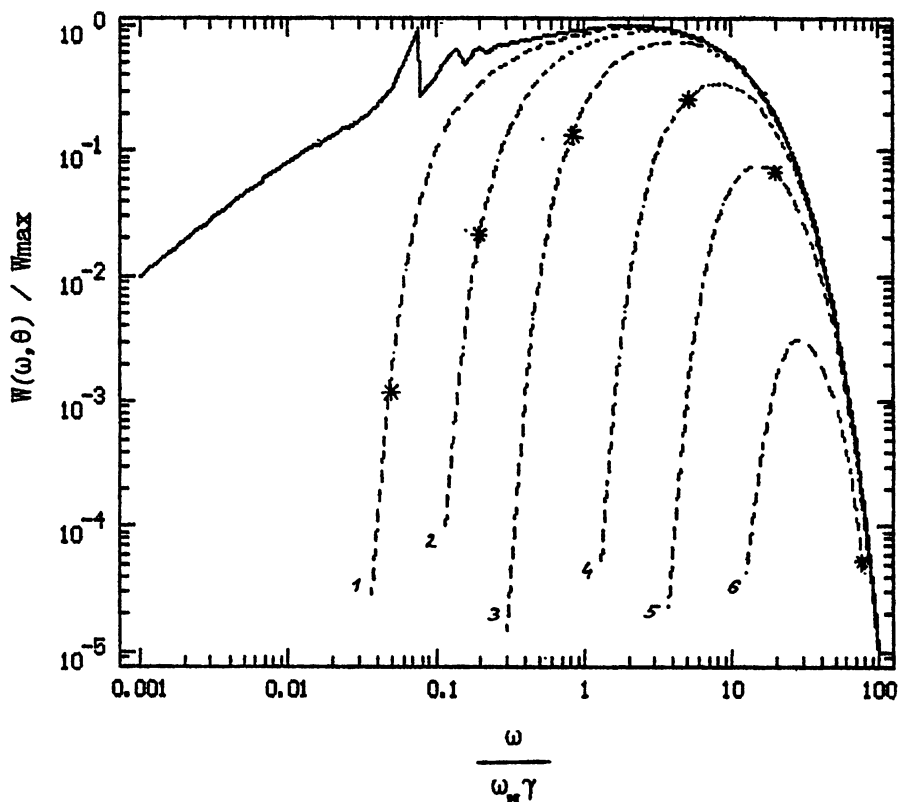


Рис.2. Спектральная плотность мощности синхротронного излучения релятивистского электрона сpitch-углом  $\theta = 5mc^2/E$  в вакууме (сплошная линия) и плазме (штриховая линия) при разных  $\omega_p$ : 1.  $\omega_p = 0.5\omega_H$ ; 2.  $\omega_p = \omega_H$ ; 3.  $\omega_p = 2\omega_H$ ; 4.  $\omega_p = 5\omega_H$ ; 5.  $\omega_p = 10\omega_H$ ; 6.  $\omega_p = 20\omega_H$ .

На этом и последующих рисунках звездочкой показана частота  $\omega^* = \omega_p^2 / (\omega_H \sin\theta)$ .

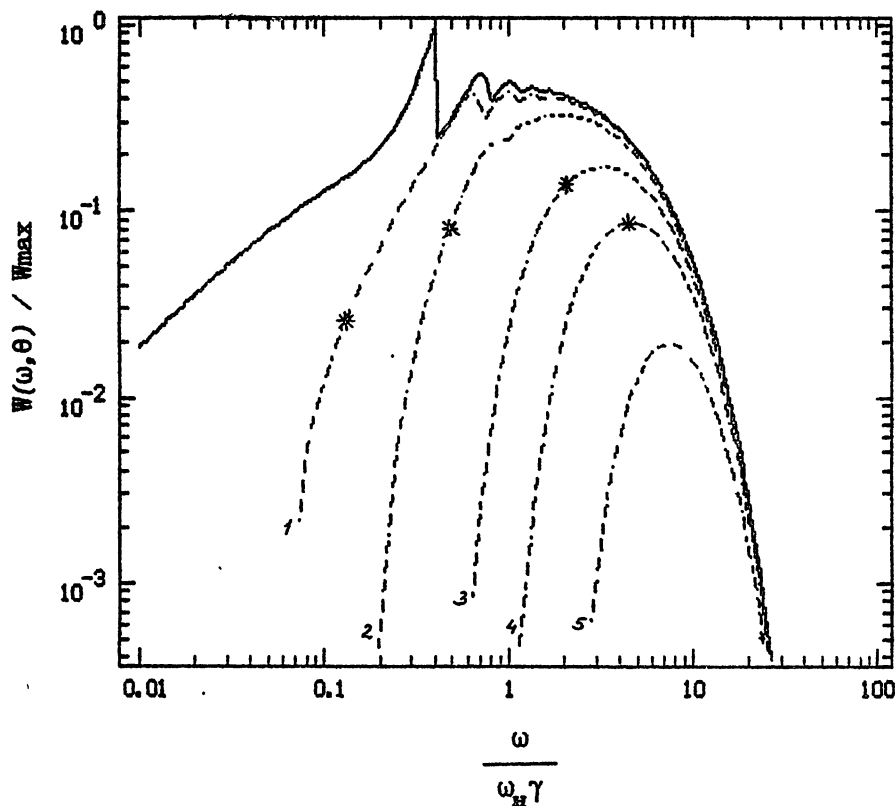


Рис.3. Спектральная плотность мощности синхротронного излучения релятивистского электрона с штич-углом  $\theta = 2\pi c^2/E$  в вакууме (сплошная линия) и плазме (штриховая линия) при разных  $\omega_p$ : 1.  $\omega_p = 0.5\omega_H$ ; 2.  $\omega_p = \omega_H$ ; 3.  $\omega_p = 2\omega_H$ ; 4.  $\omega_p = 3\omega_H$ ; 5.  $\omega_p = 5\omega_H$ .

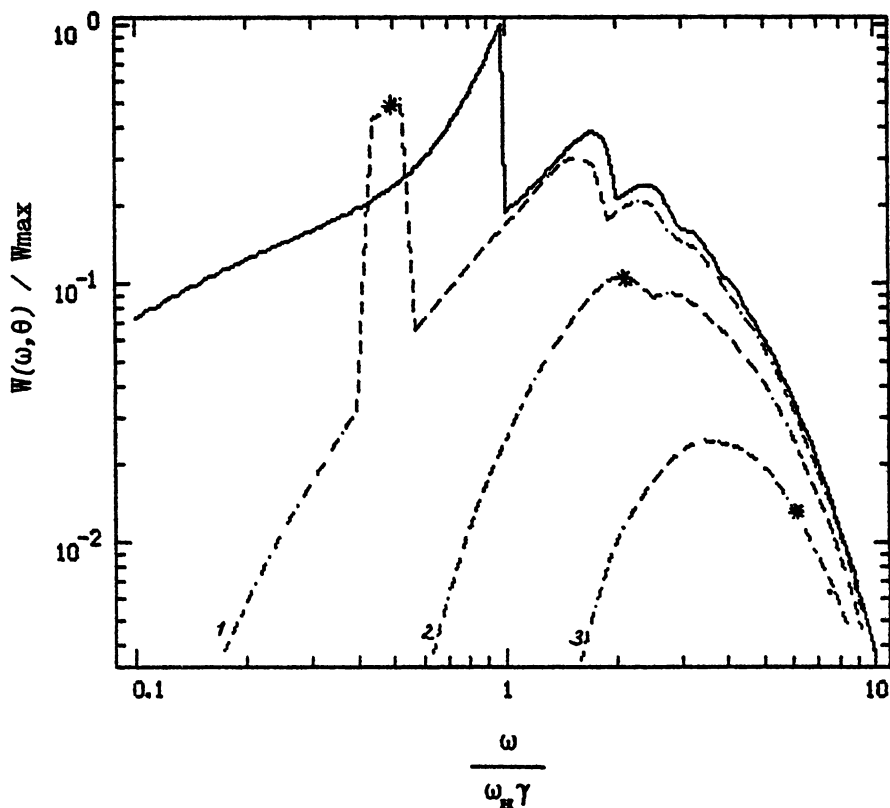


Рис.4. Спектральная плотность мощности синхротронного излучения релятивистского электрона с питч-углом  $\theta = \pi c^2/E$  в вакууме (сплошная линия) и плазме (штриховая линия) при разных  $\omega_p$ : 1.  $\omega_p = 0.7\omega_H$ ; 2.  $\omega_p = 1.5\omega_H$ ; 3.  $\omega_p = 2.5\omega_H$ .

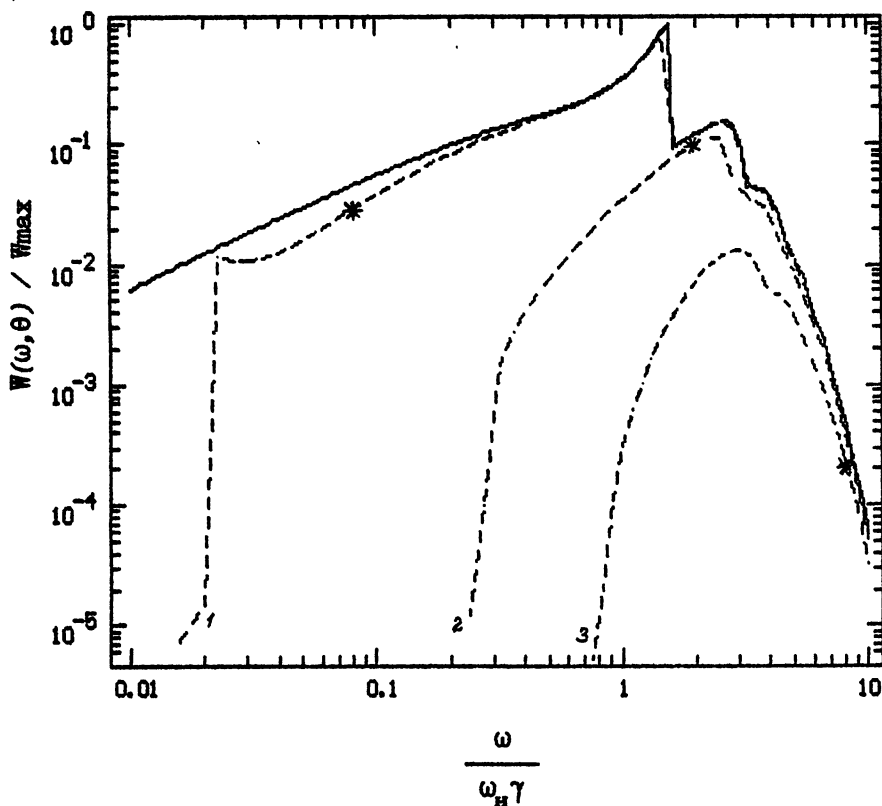


Рис.5. Спектральная плотность мощности синхротронного излучения релятивистского электрона с питч-углом  $\theta = 0.5mc^2/E$  в вакууме (сплошная линия) и плазме (штриховая линия) при разных  $\omega_p$ : 1.  $\omega_p = 0.2\omega_H$ ; 2.  $\omega_p = \omega_H$ ; 3.  $\omega_p = 2\omega_H$ .

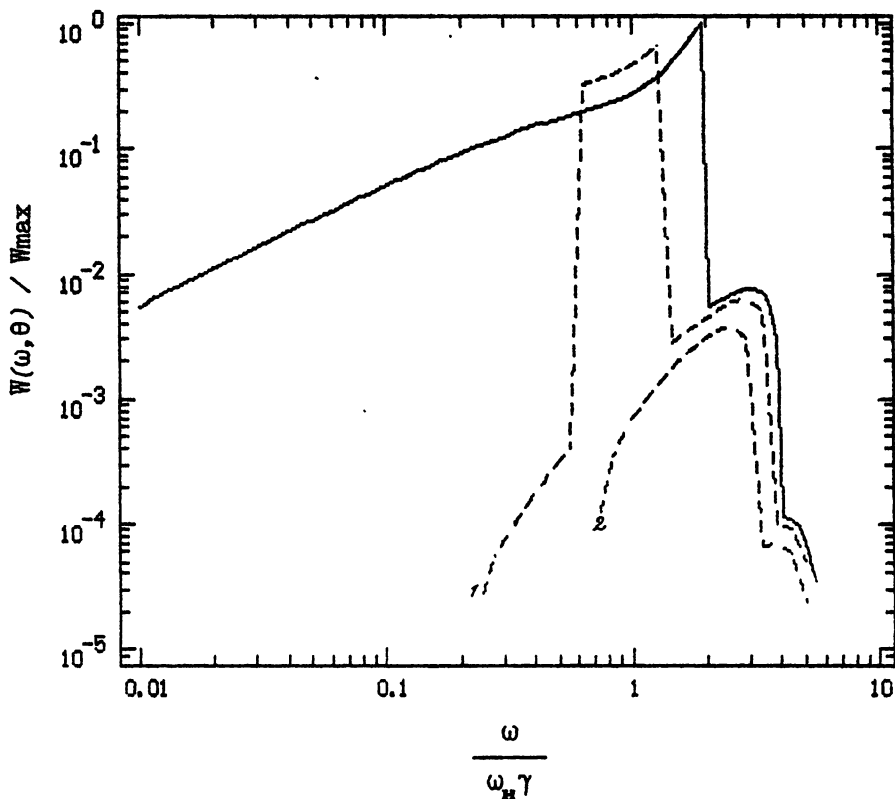


Рис.6. Спектральная плотность мощности синхротронного излучения релятивистского электрона с питч-углом  $\theta = 0.1mc^2/E$  в вакууме (сплошная линия) и плазме (штриховая линия) при разных  $\omega_p$ : 1.  $\omega_p = 0.9\omega_H$  ( $\omega^* = 8.1\omega_H\gamma$ ); 2.  $\omega_p = 1.5\omega_H$  ( $\omega^* = 22.5\omega_H\gamma$ ).

Как видно из рисунка 6, в случае  $\theta < mc^2/E$  критерий (8) является слишком сильным, т.к. он завышает частоту  $\omega^*$ , ниже которой надо учитывать влияние плазмы. Действительно, при  $\theta=0, mc^2/E$  и  $\omega_p=0,9\omega_H$  частота  $\omega^*=8,1\omega_H\gamma$ , в то время как спектр в этом случае ограничен частотой  $\omega_{max}=2\omega_H\gamma$ . В случае же  $\theta \gg mc^2/E$  критерий (8) остаётся справедливым (см. рис.2-4). Например, при  $\theta=mc^2/E$  и  $\omega_p=1,5\omega_H$  на частоте  $\omega^*=2,25\omega_H\gamma$  (отмечена звёздочкой на рисунках) мощность излучения в плазме уменьшается в 2,5 раза по сравнению с вакуумом. На частотах  $\omega < \omega^*$  наблюдается квазиэкспоненциальный "завал" спектра:  $W_\omega \propto \exp[-(\omega^*/\omega)^2]$ ; на частотах  $\omega > \omega^*$  плазма практически не изменяет спектр синхротронного излучения.

Таким образом, критерий (8) справедлив при  $\theta \geq mc^2/E$ . Неадекватность критерия (8) при  $\theta < mc^2/E$  связана с тем, что при его выводе использовалось выражение для частоты максимума излучения (5) при  $\theta \gg mc^2/E$ :

$$\omega_{max} \sim \omega_H \gamma^2 \sin\theta \quad (\omega_{max} \text{ пропорциональна квадрату } \gamma).$$

При  $\theta < mc^2/E$  частота, на которой излучение излучение максимально, даётся выражением (103):

$$\omega_{max} \sim 2\omega_H \gamma \quad (\omega_{max} \text{ пропорциональна } \gamma).$$

Подставляя  $\gamma \sim \omega_{max}/\omega_H$  в (4), получаем, что влияние плазмы при  $\theta < mc^2/E$  существенно, если

$$\omega_p \geq \omega_H, \quad (104)$$

что очевидно также из выражения (100), определяющего интервал излучаемых частот. (Это условие упомянуто в [9])

В случае  $\theta \sim mc^2/E$  критерии (8) и (104), как нетрудно видеть, эквивалентны. Действительно, записывая (104) в виде  $\omega_p^2/\omega_H > \omega_H$  или  $\omega_p^2/(\omega_H \sin\theta) > \omega_H/\sin\theta$ , а также учитывая, что в случае малыхpitch-углов  $\theta \sim mc^2/E$  для релятивистских электронов  $\sin\theta \sim \theta \sim \gamma^{-1} = mc^2/E$ , имеем:

$$\omega_p^2/(\omega_H \sin\theta) = \omega^* > \omega_H \gamma, \quad (105)$$



т.е. критерий (8), так как при  $\theta \sim mc^2/E$  наблюдаемые частоты  $\omega \sim \omega_H \gamma$  (см. (102)).

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ.

Строгое решение задачи о синхротронном излучении релятивистского электрона, движущегося по винтовой линии в разреженной плазме с показателем преломления  $n^2 = 1 - \omega_p^2/\omega^2$ , показывает, что при питч-углах  $\theta \geq mc^2/E$  влияние плазмы необходимо учитывать на частотах  $\omega \leq \omega^* = \omega_p^2/(\omega_H \sin\theta)$ .

При питч-углах  $\theta < mc^2/E$  наблюдаемые частоты  $\leq 2\omega_H \gamma$ ; поскольку  $\omega^* = \gamma\omega_p$  влияние плазмы велико, если  $\omega_p \geq \omega_H$ .

В таблице 1 приведены частоты  $\nu^* = \omega^*/2\pi$  при  $\theta = \pi/2$  для различных космических источников [20-24]. В случае  $\theta \sim mc^2/E$  частоты  $\omega^*$  возрастают в  $\gamma$  раз, что делает необходимым учёт влияния плазмы практически всегда.

Таблица 1.

Объект	Концентрация электронов, (см <sup>-3</sup> )	Напряжённость магнитного поля, (Гс)	$\nu^*$ , (Гц)
Солнечные вспышки	$10^9$	$10^2$	$3 \cdot 10^8$
Остатки сверхновых (волокна)	$10^3$	$10^{-5}$	$3 \cdot 10^9$
Молекулярные облака	$10^2$	$10^{-5}$	$3 \cdot 10^8$
Межзвёздная среда (НИИ области)	1	$3 \cdot 10^{-6}$	$10^7$
Газовые туманности	$10^3$	$10^{-5}$	$3 \cdot 10^9$
Квазары	$10^6 - 10^8$	$10^{-3} - 10^{-2}$	$3 \cdot 10^{10} - 3 \cdot 10^{11}$
Активные ядра галактик	$10^{12}$	$5 \cdot 10^2$	$6 \cdot 10^{10}$

Отметим ещё, что для оценок  $\nu^*$  может быть полезна следующая формула

$$\nu^* [\text{Гц}] \approx 1,5 \cdot 10^7 N^{\sigma} [\text{см}^{-3}] \quad (106)$$

Она получается из (7), если воспользоваться соотношением [25]:

$$N [\text{Гс}] = 2 \cdot 10^{\sigma} N [\text{см}^{-3}], \quad (107)$$

справедливым для космических объектов с линейными размерами ( $10^8$ - $10$ ) пк (в предположении, что газ полностью ионизирован).

#### ЛИТЕРАТУРА.

1. В.А. Разин, Диссертация, Горьковский университет, г. Горький, 1957 г..
2. В.А. Разин, Изв. вузов, Радиофизика, 1960, 3, 584.
3. В.А. Разин, Изв. вузов, Радиофизика, 1960, 3, 922.
4. Л.А. Арцимович, И.Я. Померанчук, ЖЭТФ, 1946, 16, 379.
5. В.Я. Эйдман, ЖЭТФ, 1958, 34, 131; 1959, 36, 1335.
6. В.Д. Шафранов, Сб. Вопросы теории плазмы, т. 3, М., Госатомиздат, 1963.
7. D.V. Melrose, Astrophys. Spase Sci., 1968, 2, 171.
8. R. Ramaty, Astrophys. J., 1969, 158, 753.
9. D.V. Melrose, Plasma Astrophysics, v. 1 and 2, Gordon and Breach Science Publishers, 1980.
10. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, Теория поля, М., Наука, 1973.
11. В.П. Силин, А.В. Рухадзе, Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред. М., Госатомиздат, 1961.
12. А.Ф. Александров, Л.С. Богданкевич, А.А. Рухадзе, Основы электродинамики плазмы, М., Высшая школа, 1978.
13. А.А. Соколов, И.М. Тернов, Релятивистский электрон, М., Наука, 1983.
14. J.P. Wild, E.R. Hill, Austral. J. Phys., 1971, 24, 43.
15. В.В. Владимирский, ЖЭТФ, 1948, 18, 393.

16. В.А. Разин, Докторская диссертация, Горьковский университет, г.Горький, 1971 г..
17. R.I. Epstein, *Astrophys. J.*, 1973, **183**, 593.
18. Справочник по специальным функциям. Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган, М., Наука, 1979.
19. В.А. Фок, Таблицы функций Эйри, 1946.
20. Crusius, *Laser and particle beam*, 1986, **6**, 421.
21. K.-L. Klein, *Astron. Astrophys.*, 1987, **183**, 341.
22. M.de Kool, M.C. Begelman, *Astrophys. J.*, 1989, **345**, 135.
23. Галактическая и внегалактическая радиоастрономия, под ред. Г.Л. Верскера и К.И. Киллермана. Пер. с англ. под ред. Ю.Н. Парийского и И.В. Госачинского, М., Мир, 1976.
24. Ю.Н. Гнедин, О.А. Циопа, Письма в АЖ, 1989, **15**, 1102.
25. J.P. Vallee, *Astron. Astrophys*, 1990, **239**, 57.