Министерство науки, высшей школы и технической политики России
Нижегородский научно-исследовательский радиофизический институт

Препринт № 349

ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ, ОПИСЫВАЮЩЕЕ СЛАБОНЕЛИНЕЙНУЮ ВОЛНУ РЭЛЕЯ

А.В.Соколов

Н. Новгород
1993

С о к о л о в А.В.

ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ, ОПИСЫВАЮЩЕЕ СЛАБОНЕЛИНЕЙНУЮ ВОЛНУ РЭЛЕЯ. //Препринт № 349. – Нижний Новгород: НИРФИ, – 1993. – 16с.

УДК 534.222.2

Рассматривается поверхностная волна Рэлея произвольного профиля, распространяющаяся вдоль плоской границы однородного изотропного, нелинейно-упругого полупространства. В приближении слабой нелинейности получено интегродифференциальное уравнение, описывающее поверхностную волну.

Подписано к печати 10.07.93 г. МЦ 00319. Формат 60x84/16.
Бумага множительная. Печать офсетная. Объем 0,98 усл.п.л.
Заказ 5334. Тираж 50. Бесплатно.

Нелинейные взаимодействия поверхностных упругих волн, распространяющихся вдоль границы твердого тела, изучены в меньшей степени, чем взаимодействия объемных волн в однородных средах. Это обусловлено сложной векторной структурой упругой поверхностной волны [1], образованной суперпозицией продольных и поперечных возмущений, экспоненциально–затухающих на всех частотах в направлении от границы. Кроме того, поверхностные волны описываются не только уравнениями движения, но и граничными условиями, например, отсутствия напряжений на поверхности среды, что связывает продольные и поперечные возмущения уже в линейном приближении. Для поверхностных волн конечной амплитуды, нелинейными становятся как система уравнений движения, так и система граничных условий, записанная в перемещениях. Более того, в отличие от линейного случая, профиль границы заранее не известен, поскольку определяется самой волной.

Нелинейные искажения, сопровождающие распространение поверхностной волны Рэлея, изучались в ряде работ. В [2–4] получены уравнения для медленно-меняющихся Фурье-компонент, описывающие волну, начальные или граничные условия для которой заданы в виде периодических функций. В [5–9] получены уравнения для поверхностной волны, имеющей сплошной (непрерывный) спектр. Однако, применяемый в этом случае переход к медленно-меняющимся амплитудам, возможен лишь для таких сигналов, в спектре которых не представлены низкие частоты и малые волновые числа [10].

В отличие от [5–9], в настоящей работе (см. также [11]), получено уравнение, описывающее слабонелинейную поверхностную волну Рэлея, при выводе которого не требуется ограничений на ширину непрерывного спектра. При этом физические переменные задачи на поверхности и во внутренних точках среды выражаются проще, чем в [5–9], через решения полученного уравнения.

Рассмотрим распространение интенсивной рэлеевской волны вдоль плоской (в отсутствие возмущений) поверхности изотропного, упругого, квадратично-нелинейного полупространства , граничащего с вакуумом. Систему начальных лагранжевых координат выберем таким образом, чтобы среда занимала область $a_2 \geq 0$. Ограничимся изучением двумерных волновых процессов с вектором перемещений $\vec{u}(a_1, a_2, t) = \{u_1, u_2, 0\}$. Тогда уравнения движения для горизонтальной $u(x, y, t)$ и вертикальной

$v(x,y,t)$ компонент вектора перемещений частиц тела в новых независимых переменных ($a_1 \to$ x, $a_2 \to$ y, t$\to$ t), в которых скорость поперечной волны равна единице, принимают вид [3]

$$u_{tt} - r u_{xx} - u_{yy} - (r-1) v_{xy} = F_{1x} + F_{2y} \ , \tag{1}$$

$$v_{tt} - v_{xx} - r v_{yy} - (r-1) u_{xy} = G_{1x} + G_{2y} \ . \tag{2}$$

Здесь $r = c_P^2/c_S^2$, $c_P^2 = (\lambda + 2\mu)/\rho_0$, $c_S^2 = \mu/\rho_0$, ρ_0 – начальная плотность среды; λ, μ – упругие модули второго порядка; нижние индексы x, y, t – обозначают дифференцирование.

Нелинейные квадратичные слагаемые уравнений движения могут быть записаны через градиенты деформаций

$$F_1 = c_1^2 u_x^2 + c_2^2 v_y (2u_x + v_y) + c_3^2 u_y v_x + c_4^2 (u_y^2 + v_x^2),$$

$$F_2 = (c_3^2 v_x + 2c_4^2 u_y)(u_x + v_y),$$

$$G_1 = (c_3^2 u_y + 2c_4^2 v_x)(u_x + v_y),$$

$$G_2 = c_1^2 v_y^2 + c_2^2 u_x (2v_y + u_x) + c_3^2 u_y v_x + c_4^2 (u_y^2 + v_x^2),$$

$$c_1^2 = (1,5\lambda + 3\mu + l + 2m)/\mu, \ c_2^2 = (\lambda/2 + l)/\mu,$$

$$c_3^2 = (\mu + m)/\mu, \ c_4^2 = (\lambda/2 + \mu + m/2)/\mu,$$

где l, m – упругие модули третьего порядка.

Нелинейные условия отсутствия напряжений на свободной поверхности полупространства $y = 0$ имеют вид

$$u_y + v_x + F_2^0 = 0, \tag{3}$$

$$(r-2) u_x + r v_y + G_2^0 = 0, \tag{4}$$

где $F_2^0 = F_2(x, y=0, t)$, $G_2^0 = G_2(x, y=0, t)$.

Другие два граничных (краевых) условия по координате y для поверхностных возмущений – это условия исчезновения продольных и поперечных компонент поля на бесконечности.

Перейдем в уравнениях (1), (2) к Фурье-представлению по переменным x, t. Полученную систему уравнений запишем в матричном виде

$$I \frac{d\vec{q}}{dy} + A(k,\omega)\vec{q} = \vec{\Phi}(\vec{q}). \tag{5}$$

Здесь I – единичная матрица; ненулевые элементы (4×4)-матрицы A имеют вид

$$a_{12} = a_{34} = -1, \quad a_{21} = \omega^2 - rk^2, \quad a_{24} = ik(r-1),$$
$$a_{42} = ik(1 - r^{-1}), \quad a_{43} = (\omega^2 - k^2)/r;$$

вектор-столбцы $\vec{q}(k,\omega)$ и $\vec{\Phi}$ определены здесь следующим образом:

$$\vec{q} = (\hat{u},\ \hat{u}_y,\ \hat{v},\ \hat{v}_y)^T, \quad \vec{\Phi} = (0,\ \hat{\Phi}_2,\ 0,\ \hat{\Phi}_4)^T,$$
$$\hat{\Phi}_2 = -(ik\hat{F}_1 + \hat{F}_{2y}), \quad \hat{\Phi}_4 = -(ik\hat{G}_1 + \hat{G}_{2y})/r,$$

верхний индекс T обозначает транспонирование.

Используемые в работе правила знаков для преобразований Фурье и обозначения соответствующих изображений для нелинейных слагаемых уравнений движения и компонент вектора $\vec{q}$, задаются соотношениями

$$f(x,y,t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k,y,t)\exp(ikx)dk =$$
$$= \frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \hat{F}(k,y,\omega)\exp(ikx - i\omega t)dk\, d\omega.$$

Спектральные амплитуды нелинейных слагаемых уравнений движения и граничных условий могут быть записаны в виде двумерных сверток градиентов деформаций

$$\hat{F}_1 = \frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\{-c_1^2k_1k_2\hat{u}_1\hat{u}_2 + c_2^2\hat{v}_{1y}(2ik_2\hat{u}_2 + \hat{v}_{2y}) + ik_2c_3^2\hat{u}_{1y}\hat{v}_2 +$$
$$+ c_4^2(\hat{u}_{1y}\hat{u}_{2y} - k_1k_2\hat{v}_1\hat{v}_2)\}dU,$$
$$\hat{F}_2 = \frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\{(ic_3^2k\hat{v}_1 + 2c_4^2\hat{u}_{1y})(ik_2\hat{u}_2 + \hat{v}_{2y})\}dU,$$
$$\hat{G}_1 = \frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(c_3^2\hat{u}_{1y} + 2ic_4^2k_1\hat{v}_1)(ik_2\hat{u}_2 + \hat{v}_{2y})dU,$$
$$\hat{G}_2 = \frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\{c_1^2\hat{v}_{1y}\hat{v}_{2y} + ic_2^2k_1\hat{u}_1(2\hat{v}_{2y} + ik_2\hat{u}_2) +$$
$$+ ic_3^2k_2\hat{u}_{1y}\hat{v}_2 + c_4^2(\hat{u}_{1y}\hat{u}_{2y} - k_1k_2\hat{v}_1\hat{v}_2)\}dU,$$
$$dU = \delta(k - k_1 - k_2)\delta(\omega - \omega_1 - \omega_2)dk_1\, dk_2\, d\omega_1\, d\omega_2,$$
$$\hat{u}_n = \hat{u}(k_n, y, \omega_n),\ \hat{v}_n = \hat{v}(k_n, y, \omega_n),\ \hat{u}_{ny} = \frac{\partial\hat{u}_n}{\partial y},\ \hat{v}_{ny} = \frac{\partial\hat{v}_n}{\partial y}.$$

Представим вектор переменных $\vec{q}$ в виде разложения по линейно-независимым собственным векторам $\vec{\varphi}_n(k,\omega)$ матрицы A

$$\vec{q}(k,y,\omega) = T(k,\omega)\vec{M}(k,y,\omega). \tag{6}$$

Здесь $\vec{M} = \{M_i\}$ –вектор-столбец коэффициентов разложения; столбцы матрицы T образованы векторами $\vec{\varphi}_n$

$$T = (\{\vec{\varphi}_1\}, ..., \{\vec{\varphi}_4\});$$

$$A\vec{\varphi}_n = \gamma_n \vec{\varphi}_n \; ; \qquad Det \mid A - \gamma_n I \mid = 0 \; ;$$

$$\vec{\varphi}_p(k,\omega) = \frac{i}{\omega}\Big(1, \ -\gamma_p, \ \frac{i\gamma_p}{k}, \ -\frac{i\gamma_p^2}{k}\Big)^T \; ; \qquad p = 1;3;$$

$$\vec{\varphi}_s(k,\omega) = -\frac{i\delta}{\omega}\Big(1, \ -\gamma_s, \ \frac{ik}{\gamma_s}, \ -ik\Big)^T \; ; \qquad s = 2;4;$$

$\delta = \sqrt{p_1 p_2}$; $p_1 = \sqrt{1 - c^2/r}$; $p_2 = \sqrt{1 - c^2}$; c – линейная скорость поверхностной волны, определяемая только линейными модулями упругости и плотностью полупространства.

Квадраты собственных чисел матрицы A определяются соотношениями $\gamma_{1,3}^2 = k^2 - \omega^2/r$; $\gamma_{2,4}^2 = k^2 - \omega^2$, которые с точностью до знаков совпадают с квадратами вертикальных волновых чисел для частоты ω. Из вида выражений для собственных значений γ_n следует, что векторы $\vec{\varphi}_{1,3}$ – описывают продольные (P) волны, $\vec{\varphi}_{2,4}$ – поперечные (S).

Выберем области однозначности двузначных функций извлечения квадратного корня таким образом, чтобы $Re\ (\gamma_{1,2}) \geq 0$, $Re\ (\gamma_{3,4}) \leq 0$. Тогда векторы $\vec{\varphi}_1$ и $\vec{\varphi}_2$ соответствуют уходящим или экспоненциально–затухающим от границы волнам. При $\omega_k = \pm ck$ собственные векторы $\vec{\varphi}_1$ и $\vec{\varphi}_2$ пропорциональны P и S составляющим в поверхностной волне.

Подставляя разложение (6) в матричную систему (5), получаем уравнения для коэффициентов разложения M_n $(n = 1, \ ..., \ 4)$

$$\frac{dM_n}{dy} + \gamma_n M_n = -\Big[\psi_{n2}(ik\hat{F}_1 + \hat{F}_{2y}) + \psi_{n4}(ik\hat{G}_1 + \hat{G}_{2y})/r\Big] \equiv B_n(\vec{q}). \tag{7}$$

Здесь $\vec{\psi}_{nm}(k,\omega)$ – элемент матрицы T^{-1}, обратной T. Строки обратной матрицы с номерами p и s имеют вид

$$\vec{\psi}_p(k,\omega) = \frac{i}{2\omega}\Big[-rk^2, \ \frac{k^2}{\gamma_p}, \ -\frac{ik\gamma_2^2}{\gamma_p}, \ ikr\Big] \; ; \qquad p = 1;3,$$

$$\vec{\psi}_s(k,\omega) = -\frac{i}{2\delta\omega}\Big[r\gamma_1^2, \ -\gamma_s, \ ik\gamma_s, \ -ikr\Big] \; ; \qquad s = 2,4.$$

Уравнения (7) могут быть формально проинтегрированы; в результате имеем

$$M_n(k,y,\omega)=\exp(-\gamma_n y)\left[C_n(k,\omega)+\int\limits_0^y \exp(\gamma_n y')B_n(\vec{q})dy'\right];\ \ n=1,\ ...,\ 4. \tag{8}$$

Входящие в это интегральное соотношение четыре константы $C_n(k,\omega)$ подлежат определению из граничных условий по y на свободной поверхности и на бесконечности. Из условий на бесконечности получаем формальное выражение для констант $C_{3,4}$

$$C_n(k,\omega)=-\int\limits_0^\infty \exp(\gamma_n y)B_n(\vec{q})dy,\qquad n=3;4.$$

Функции $C_{1,2}$ описывают поверхностные волны. Систему уравнений для них получим из граничных условий (3),(4) отсутствия напряжений на свободной поверхности $y=0$

$$2\gamma_1\gamma_2C_1-\delta(\gamma_2^2+k^2)C_2=2\gamma_1\gamma_2C_3-\delta(\gamma_2^2+k^2)C_4-i\omega\gamma_2\hat{F}_2^0\equiv D_1(\vec{q}),$$
$$(\gamma_2^2+k^2)C_1-2\delta k^2C_2=-(\gamma_2^2+k^2)C_3+2\delta k^2C_4-\omega k\hat{G}_2^0\equiv D_2(\vec{q}),$$

Решение этой системы представим в виде

$$C_1(k,\omega)=\left[2k^2D_1-(\gamma_2^2+k^2)D_2\right]/\Delta(k,\omega)\equiv Q_1(\vec{q})/\Delta,$$

$$C_2(k,\omega)=\delta^{-1}\left[(\gamma_2^2+k^2)D_1-2\gamma_1\gamma_2D_2\right]/\Delta(k,\omega)\equiv Q_2(\vec{q})/\Delta,$$

где

$$Q_m=\int\limits_0^\infty\left[L_{m1}(ik\hat{F}_1+\hat{F}_{2y})+L_{m2}(ik\hat{G}_1+\hat{G}_{2y})\right]dy+L_{m3}\hat{F}_2^0+L_{m4}\hat{G}_2^0;$$
$$\Delta(k,\omega)=-(\gamma_2^2+k^2)^2+4k^2\gamma_1\gamma_2\equiv-\omega^4R(k/\omega),$$

$R(\xi)$ – функция Рэлея; выражения для $L_{mn}(k,y,\omega)$ – приведены в Приложении.

Представление для вектора $\vec{q}(k,y,\omega)$, эквивалентное исходным уравнениям и краевым условиям, принимает теперь следующий вид:

$$\vec{q}(k,y,\omega)\ =\ \sum_{m=1}^{2}\left\{\vec{\varphi}_m(k,\omega)\exp(-\gamma_m y)\left[\frac{Q_m(\vec{q})}{\Delta(k,\omega)}+\int\limits_0^y\exp(\gamma_m y')B_m(\vec{q})dy'\right]-\right.$$
$$\left.-\ \vec{\varphi}_{m+2}(k,\omega)\int\limits_y^\infty\exp(\gamma_{m+2}(y'-y))B_{m+2}(\vec{q})dy'\right\}. \tag{9}$$

Для того чтобы из вектора поверхностных возмущений $\vec{q}$ выделить слабонелинейные волны, разложим операторные выражения резонансных слагаемых $\vec{P}_{mn} = \vec{\varphi}_m \exp(-\gamma_m y) L_{mn}/\Delta$ $(m = 1;2;\;\; n = 1,...,4)$ по корням детерминанта граничных условий $\Delta(k, \omega_k^{(\pm)}) = 0$ $(\omega_k^{(\pm)} = \pm ck)$ [12,13], которые определяют дисперсионные соотношения для поверхностных волн. В рассматриваемом случае разложение имеет вид

$$\vec{P}_{mn}(k,y,\omega) = \left\{ \frac{\vec{\varphi}_m^{(+)} L_{mn}^{(+)}}{[\omega - \omega_k^{(+)}]\Delta_\omega^{(+)}} + \frac{\vec{\varphi}_m^{(-)} L_{mn}^{(-)}}{[\omega - \omega_k^{(-)}]\Delta_\omega^{(-)}} \right\} \exp(-p_m|k|y) + \vec{R}_{mn},$$

где

$$\vec{R}_{mn} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{\vec{P}_{mn}(k,y,\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' \;;$$

$$\vec{\varphi}_m^{(\pm)} = \vec{\varphi}_m(k, \omega_k^{(\pm)}) \;; \quad L_{mn}^{(\pm)} = L_{mn}(k, \omega_k^{(\pm)}) \;;$$

$$\Delta_\omega^{(\pm)} = \frac{\partial \Delta}{\partial \omega}\Big|_{\omega=\omega_k^{(\pm)}} \equiv \sigma \omega_k^{(\pm)} k^2 \;; \quad \sigma = 4\Big(2\delta - \frac{p_2}{rp_1} - \frac{p_1}{p_2}\Big).$$

Замкнутый контур Г, определяющий в разложении интегральное слагаемое, целиком лежит на "физическом" листе $\mathrm{Re}\,(k^2 - \omega'^2)^{1/2} \geq 0$, $\mathrm{Re}\,(k^2 - \omega'^2/r)^{1/2} \geq 0$ комплексной плоскости ω' и не пересекает разрезов, проведенных из точек ветвления $\omega' = \pm k$, $\omega' = \pm\sqrt{r}\,k$. При этом полюсы $\omega' = \omega_k^{(\pm)}$ и $\omega' = \omega$ должны находиться внутри контура интегрирования. Очевидно, что неинтегральные слагаемые в разложении оператора, описывают поверхностные волны. Поскольку $\vec{R}_{mn}$ как функция ω' не имеет на "физическом" листе полюсов в конечной части комплексной плоскости, поэтому интегральное слагаемое дает только дополнительный вклад в нерезонансное взаимодействие поверхностных волн.

Введем новые переменные $a_k^{(\pm)}(t)$, пропорциональные в первом приближении медленно-меняющейся (при слабой нелинейности) спектральной плотности колебательной скорости в поверхностной волне непосредственно на границе $y = 0$

$$\frac{da_k^{(\pm)}}{dt} = -\frac{i}{\Delta_\omega^{(\pm)}} Q_1^{(\pm)}(\vec{q}) \exp(i\omega_k^{(\pm)} t) \equiv -\frac{i}{\Delta_\omega^{(\pm)}} \exp(i\omega_k^{(\pm)} t) \times$$

$$\times \Big\{ \int\limits_0^\infty \Big[L_{11}^{(\pm)}(ik\tilde{F}_1 + \tilde{F}_{2y}) + L_{12}^{(\pm)}(ik\tilde{G}_1 + \tilde{G}_{2y}) \Big] dy + L_{13}^{(\pm)} \tilde{F}_2^0 + L_{14}^{(\pm)} \tilde{G}_2^0 \Big\}. \quad (10)$$

Принимая во внимание равенство $Q_1^{(\pm)}(\vec{q}) = Q_2^{(\pm)}(\vec{q})$, запишем представление (9) в следующем виде:

$$\vec{q}(k,y,t) = \vec{S}_k^{(+)}(y)a_k^{(+)}(t)\exp(-i\omega_k^{(+)}t) + \vec{S}_k^{(-)}(y)a_k^{(-)}(t)\exp(-i\omega_k^{(-)}t) +$$

$$+ \hat{F}^{-1}\Big\{\sum_{m=1}^{2}\Big\{\vec{\varphi}_m(k,\omega)\int_0^y \exp[\gamma_m(y'-y)]B_m(\vec{q})dy' -$$

$$- \vec{\varphi}_{m+2}(k,\omega)\int_y^\infty \exp[\gamma_{m+2}(y'-y)]B_{m+2}(\vec{q})dy' +$$

$$+ \int_0^\infty \Big[\vec{R}_{m1}(ik\tilde{F}_1 + \tilde{F}_{2y}) + \vec{R}_{m2}(ik\tilde{G}_1 + \tilde{G}_{2y})\Big]dy + \vec{R}_{m3}\tilde{F}_2^0 + \vec{R}_{m4}\tilde{G}_2^0\Big\}\Big\}, \quad (11)$$

где

$$\vec{S}_k^{(\pm)}(y) = \vec{\varphi}_1^{(\pm)}\exp(-p_1|k|y) + \vec{\varphi}_2^{(\pm)}\exp(-p_2|k|y);$$

$$\omega_{-k}^{(\pm)} = -\omega_k^{(\pm)}; \quad a_{-k}^{(\pm)} = (a_k^{(\pm)})^*; \quad \vec{\varphi}_m^{(+)} = (\vec{\varphi}_m^{(-)})^*; \quad L_{mn}^{(+)} = (L_{mn}^{(-)})^*;$$

$\hat{F}^{-1}$ – оператор обратного преобразования Фурье по частоте ω; верхний символ $*$ обозначает операцию комплексного сопряжения.

Из представления (11) в частности следует, что структура поверхностной волны в первом приближении такая же, как и в линейной теории. Это означает, что скорость локального возмущения (в том же приближении) не зависит от поперечной координаты y, вдоль которой амплитуда колебательной скорости в поверхностной волне изменяется асимптотически до нулевых значений.

Замена переменных (10) и представление (11) образуют замкнутую систему нелинейных уравнений для поверхностной волны. По известному решению для переменных $a_k^{(\pm)}(t)$ последовательными итерациями может быть получено разложение (с любой степенью точности) в интегростепенной ряд для вектора $\vec{q}(k,y,t)$, который полностью определяет движение в поверхностной волне для произвольного значения поперечной координаты y.

Получим из системы (10), (11) уравнение для переменной $a_k^{(+)}(t) \equiv a_k(t)$, описывающей в одноволновом приближении начальную задачу для поверхностной волны. При этом в выражении для компонент волны удерживаем только линейные по переменной $a_k(t)$ члены, т. е. вектор $\vec{q}(k,t)$ представляем в виде $\vec{q}(k,y,t) = \vec{S}_k^{(+)}(y)a_k(t)\exp(-i\omega_k t)$,

$(\omega_k \equiv \omega_k^{(+)})$. Тогда, для спектральных компонент нелинейных объемных сил и нелинейных напряжений на поверхности полупространства $y = 0$, получаем следующие соотношения:

$$ik\tilde{F}_1 + \tilde{F}_{2y} = \frac{i}{2\pi c^2}\exp(-i\omega_k t)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Big\{F_{11}\exp[-p_1(|k'|+|k''|)y]+$$

$$+F_{12}\exp[-(p_1|k'|+p_2|k''|)y]+$$

$$+F_{21}\exp[-p_2|k''|+p_1|k'|)y]+F_{22}\exp[-p_2(|k'|+|k''|)y]\Big\}a_{k'}a_{k''}dk', \quad (12)$$

$$ik\tilde{G}_1 + \tilde{G}_{2y} = \frac{1}{2\pi c^2}\exp(-i\omega_k t)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Big\{G_{11}\exp[-p_1(|k'|+|k''|)y]+$$

$$+G_{12}\exp[-(p_1|k'|+p_2|k''|)y]+$$

$$+G_{21}\exp[-p_2|k''|+p_1|k'|)y]+G_{22}\exp[-p_2(|k'|+|k''|)y]\Big\}a_{k'}a_{k''}dk', \quad (13)$$

$$\tilde{F}_2^0 = \frac{i}{2\pi c^2}\exp(-i\omega_k t)\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{k,k',k-k'}\, a_{k'}a_{k''}dk',$$

$$\tilde{G}_2^0 = \frac{1}{2\pi c^2}\exp(-i\omega_k t)\int\limits_{-\infty}^{\infty} g_{k,k',k-k'}\, a_{k'}a_{k''}dk',$$

где $k'' = k-k'$; выражения для коэффициентов $F_{11}, \ldots G_{22}, f_{k,k',k-k'}, g_{k,k',k-k'}$ - приведены в Приложении.

Представления (12), (13) для нелинейных объемных сил позволяют выполнить интегрирование в нелинейном слагаемом уравнения (10) по неволновой координате y. С физической точки зрения – тем самым суммируются вклады по глубине всех виртуальных источников . В результате нелинейные слагаемые уравнений движения (объемная нелинейность), так же как и нелинейные функции граничных условий, могут быть записаны только через значения поля непосредственно на самой поверхности полупространства

$$\frac{i}{\Delta_\omega^{(\pm)}}\exp(i\omega_k t)\int\limits_0^{\infty}\Big[L_{11}^{(+)}(ik\tilde{F}_1+\tilde{F}_{2y})+L_{12}^{(+)}(ik\tilde{G}_1+\tilde{G}_{2y})\Big]dy =$$

$$= \frac{2i\delta k}{\sigma\pi c^4}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(\delta U_{k,k',k-k'}+V_{k,k',k-k'})a_{k'}a_{k-k'}dk',$$

выражения для коэффициентов $U_{k,k',k-k'}, V_{k,k',k-k'}$ даны в Приложении.

Введем обозначение для суммарного коэффициента нелинейного взаимодействия, определяемого нелинейностями уравнений движения и граничных условий

$$\Gamma_{k,k',k-k'} = -\frac{ik}{\sigma\pi c^4}\left[2\delta(\delta U_{k,k',k-k'} + V_{k,k',k-k'}) + c^2(sp_2 f_{k,k',k-k'} + \delta g_{k,k',k-k'})\right].$$

Будем считать, для определенности, что горизонтальное волновое число k больше нуля, и представим нелинейное слагаемое в виде суммы

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \Gamma_{k,k',k-k'} a_{k'} a_{k-k'} dk' = \int\limits_{0}^{\frac{k}{2}} \Gamma^{(+)}_{k,k',k-k'} a_{k'} a_{k-k'} dk' + \int\limits_{k}^{\infty} \Gamma^{(-)}_{k,k',k-k'} a_{k'} a_{k-k'} dk',$$

где

$$\Gamma^{(\pm)}_{k,k',k-k'} = -\frac{2ik}{\sigma\pi c^4}\left[\delta(\delta U^{(\pm)}_{k,k',k-k'} + V^{(\pm)}_{k,k',k-k'}) + c^2(p_2 f^{(\pm)}_{k,k',k-k'} + \delta g^{(\pm)}_{k,k',k-k'})\right]$$

– коэффициенты нелинейного взаимодействия, определяющие соответственно процессы слияния и распада (выражения для $U^{(\pm)}_{k,k',k-k'}$, $V^{(\pm)}_{k,k',k-k'}$, $f^{(\pm)}_{k,k',k-k'}$, $g^{(\pm)}_{k,k',k-k'}$ – приведены в Приложении).

Искомое уравнение для спектральных амплитуд $a_k(t)$ теперь может быть записано в следующем виде:

$$\frac{da_k}{dt} = \int\limits_{0}^{\frac{k}{2}} \Gamma^{(+)}_{k,k',k-k'} a_{k'} a_{k-k'} dk' + \int\limits_{k}^{\infty} \Gamma^{(-)}_{k,k',k-k'} a_{k'} a_{k-k'} dk'. \qquad (14)$$

При этом спектральная плотность горизонтальной колебательной скорости рэлеевской волны на поверхности полупространства в первом приближении равна $(1-\delta)\, a_k$.

В уравнении (14) можно перейти к переменным b_k, которые с точностью до множителя совпадают со спектральной плотностью смещений в поверхностной волне на границе полупространства. Для перехода к b_k коэффициенты нелинейного взаимодействия должны быть умножены на $ik'k''/k$. В этом случае интеграл по глубине от плотности волновой энергии на частоте k будет пропорционален $\omega_k |b_k|^2$.

Уравнение простой волны описывает, в частном случае, распространение объемных плоских возмущений. В спектральном представлении, аналогичном (14), это уравнение с параметром квадратичной нелинейности ε, имеет коэффициенты нелинейного взаимодействия вида

$$W^{(+)}_{k,k',k-k'} = W^{(-)}_{k,k',k-k'} = -\varepsilon\frac{ik}{2\pi},$$

которые по своей структуре существенно проще, чем коэффициенты взаимодействия для плоской поверхностной волны. Это обусловлено двумя причинами. Во–первых, рэлеевская волна имеет две декартовые компоненты, которые связаны преобразованием Гильберта. Вторая причина – частотно–зависимое экспоненциальное затухание продольной и поперечной компоненты поверхностной волны при удалении от границы. Эти различия в коэффициентах нелинейного взаимодействия приводят к тому, что решения уравнения (14), пропорциональные спектральной плотности горизонтальной колебательной скорости, отличаются от соответствующих решений уравнения простой волны. При этом нелинейные искажения профиля вертикальной компоненты колебательной скорости имеют качественные отличия от решений уравнения простой волны (см., например, [11]), поскольку спектральные составляющие вертикальной компоненты колебательной скорости имеют на всех частотах фазовый сдвиг $\frac{\pi}{2}sgn(k)$ относительно спектральных составляющих горизонтальной компоненты.

Если решение уравнения (14) известно, движение любой материальной точки полупространства можно определить через комплексную функцию $Z(x,t) = \int_0^\infty a_k(t)\exp(ikx)dk$. Так, например, для колебательных скоростей из разложения (6), без каких-либо дополнительных преобразований (ср. [5]), имеем следующие соотношения первого приближения:

$$u_t(x,y,t) = Z(x+ip_1y,t) - \delta Z(x+ip_2y,t) + k.c.$$

$$v_t(x,y,t) = i\left[\,p_1Z(x+ip_1y,t) - \delta p_2^{-1}Z(x+ip_2y,t)\,\right] + k.c.$$

Это формальное представление для компонент поля. С физической точки зрения очевидно, что нелинейные искажения, например, исходной гармонической поверхностной волны, должны наиболее сильно проявляться непосредственно на поверхности полупространства, поскольку для отличных от нуля значений поперечной координаты спектральные амплитуды экспоненциально затухают с увеличением частоты (величина коэффициента затухания пропорциональна расстоянию от поверхности полупространства). В результате при удалении от поверхности полупространства вклад высокочастотных спектральных компонент, образовавшихся в результате нелинейного взаимодействия, уменьшается.

Для нахождения количественных характеристик нелинейных искажений волны Рэлея возможен, по-видимому, единственный подход, основанный на применении численных методов (см., например. [11]).

$$L_{11} = -\frac{i}{2\omega}\{\,\frac{\alpha k^2}{\gamma_1}\exp(-\gamma_1 y) - 4\gamma_2 k^2(\gamma_2^2 + k^2)\exp(-\gamma_2 y)\}\ ;$$

$$L_{12} = -\frac{k}{2\omega}\{\,\alpha\exp(-\gamma_1 y) - 4k^2(\gamma_2^2 + k^2)\exp(-\gamma_2 y)\}\ ;$$

$$L_{13} = -2i\omega k^2\gamma_2\ ; \quad L_{14} = \omega k(\gamma_2^2 + k^2)\ ;$$

$$L_{21} = \frac{i\gamma_2}{2\delta\omega}\{\,-4k^2(\gamma_2^2 + k^2)\exp(-\gamma_1 y) + \alpha\exp(-\gamma_2 y)\}\ ;$$

$$L_{22} = \frac{k}{2\delta\omega}\{\,-4\gamma_1\gamma_2(\gamma_2^2 + k^2)\exp(-\gamma_1 y) + \alpha\exp(-\gamma_2 y)\}\ ;$$

$$L_{23} = -i\delta^{-1}\omega\gamma_2(\gamma_2^2 + k^2)\ ; \quad L_{24} = 2\delta^{-1}\omega k\gamma_1\gamma_2\ ;$$

$$L_{11}^{(+)} = -is\frac{4p_2k^4}{c}\{\exp(-p_1|k|y) - \delta\exp(-p_2|k|y)\}\ ;$$

$$L_{12}^{(+)} = -\frac{4k^4\delta}{c}\{\,\delta\exp(-p_1|k|y) - \exp(-p_2|k|y)\}\ ;$$

$$L_{13}^{(+)} = -2isck^5p_2\ ; \qquad L_{14}^{(+)} = 2\delta ck^4\ ;$$

$$\alpha = (\gamma_2^2 + k^2)^2 + 4k^2\gamma_1\gamma_2\ ;$$

$$F_{11} = k[c_1^2 + c_2^2p_1^2(p_1^2 - 2) - s's''p_1^2h] - s''c^2p_1^2h(|k'| + |k''|)/r\ ;$$

$$F_{12} = k[\delta(c_2^2p_1^2 - c_1^2) + s's''p_1^2(c_3^2\delta^{-1} + 2c_4^2)] +$$
$$+ c^2s''(p_1|k'| + p_2|k''|)(c_3^2p_1\delta^{-1} + 2c_4^2p_2\delta)/r\ ;$$

$$F_{21} = k[\delta(c_2^2(2 - p_1^2) - c_1^2) + s's''(c_3^2\delta^3 + 2c_4^2p_1^2)]\ ;$$

$$F_{22} = k[\delta^2h - s's''(c_3^2\delta^2 + c_4^2(p_1^2\delta^{-2} + p_2^2\delta^2))]\ ;$$

$$G_{11} = -s''c^2kp_1h/r - p_1(|k'| + |k''|)[c_1^2p_1^4 + c_2^2(1 - 2p_1^2) - s's''p_1^2h]\ ;$$

$$G_{12} = s''kc^2(p_2\delta c_3^2 + 2c_4^2p_1\delta^{-1})/r - (p_1|k'| + p_2|k''|)*$$
$$*\,[\delta(c_2^2(2p_1^2 - 1) - c_1^2p_1^2) + s's''p_1^2(c_3^2\delta^{-1} + 2c_4^2)]\ ;$$

$$G_{21} = -(p_1|k''| + p_2|k'|)[\delta(c_2^2 - c_1^2p_1^2) + s's''(c_3^2\delta^3 + 2c_4^2p_1^2)]\ ;$$

$$G_{22} = -p_2(|k'| + |k''|)[\delta^2h - s's''(c_3^2\delta^2 + c_4^2(p_2^2\delta^2 + p_1^2\delta^{-2})]\ ;$$

$$f_{k,k',k-k'} = s'f_{k,k',k-k'}^{(+)} \equiv s'c^2[p_1h - c_3^2p_1\delta^{-1} - 2c_4^2p_2\delta]/r\ ;\ f_{k,k',k-k'}^{(-)} = 0\ ;$$

$$g_{k,k',k-k'} = g_1 + s's''g_2\ ;\ g_1 = c_1^2(p_1^2 - \delta)^2 + c_2^2(\delta - 1)(2p_1^2 - 1 - \delta)\ ;$$

$$g_2 = c_3^2(\delta^{-1} - 1)(p_1^2 - \delta^3) - c_4^2p_1^2[\,(1 - p_2^2\delta^{-1})^2 + (1 - \delta^{-1})^2]\ ;$$

$$g^{(+)}_{k,k',k-k'} = g_1 + g_2 \; ; \qquad g^{(-)}_{k,k',k-k'} = 2(g_1 - g_2) \; ;$$
$$F_1^{(+)} = 2k\,[\,c_1^2 + c_2^2 p_1^2(p_1^2 - 2) - p_1^2 h(1 + c^2/r)] \; ;$$
$$F_1^{(-)} = 2k\,[\,c_1^2 + c_2^2 p_1^2(p_1^2 - 2) + p_1^2 h] \; ;$$
$$F_2^{(+)} = 2kh(p_1^2 - \delta) + c^2[p_1 k' + p_2(k - k')][\,p_1 c_3^2 \delta^{-1} + 2c_4^2 p_2 \delta]/r \; ;$$
$$F_2^{(-)} = -2k\,[\,\delta c_1^2 + p_1^2 h] - c^2[p_1 k' + p_2(k' - k)][p_1 c_3^2 \delta^{-1} + 2c_4^2 p_2 \delta]/r \; ;$$
$$F_3^{(+)} = 2kh(p_1^2 - \delta) + c^2[p_1(k - k') + p_2 k')][p_1 c_3^2 \delta^{-1} + 2c_4^2 p_2 \delta]/r \; ;$$
$$F_3^{(-)} = -2k[\delta c_1^2 + p_1^2 h] + c^2\,[p_1(k' - k) + p_2 k')][p_1 c_3^2 \delta^{-1} + 2c_4^2 p_2 \delta]/r \; ;$$
$$F_4^{(+)} = 2kc_4^2[\delta^2(1 + c^2/r) - p_1^2 \delta^{-2}] \; ;$$
$$F_4^{(-)} = 2k[\delta^2(h + c_3^2) + c_4^2(p_1^2 \delta^{-2} + p_2^2 \delta^2)] \; ;$$
$$G_1^{(+)} = -2p_1 k[c_1^2 p_1^4 + c_2^2(1 - 2p_1^2) - h(p_1^2 - c^2/r)] \; ;$$
$$G_1^{(-)} = 2p_1(k - 2k')[c_1^2 p_1^4 + c_2^2(1 - 2p_1^2) + p_1^2 h] \; ;$$
$$G_2^{(+)} = 2p_1^2 h(\delta - 1)[p_1 k' + p_2(k - k')] + kc^2(c_3^2 p_2 \delta + 2c_4^2 p_1 \delta^{-1})/r \; ;$$
$$G_2^{(-)} = 2p_1^2 h(1 + \delta)[p_1 k' + p_2(k' - k)] - kc^2(c_3^2 p_2 \delta + 2c_4^2 p_1 \delta^{-1})/r \; ;$$
$$G_3^{(+)} = 2p_1^2 h(\delta - 1)[p_1(k - k') + p_2 k'] + kc^2(c_3^2 p_2 \delta + 2c_4^2 p_1 \delta^{-1})/r \; ;$$
$$G_3^{(-)} = 2p_1^2 h(1 + \delta)[p_1(k' - k) + p_2 k')] + kc^2(c_3^2 p_2 \delta + 2c_4^2 p_1 \delta^{-1})/r \; ;$$
$$G_4^{(+)} = -2p_2 c_4^2 k[\delta^2(2 - p_2^2) - p_1^2 \delta^{-2}] \; ;$$
$$G_4^{(-)} = 2p_2(k - 2k')[\delta^2(h + c_3^2) + c_4^2(p_2^2 \delta^2 + p_1^2 \delta^{-2})] \; ;$$
$$h = c_3^2 + 2c_4^2 \equiv c_1^2 - c_2^2 \; ; \quad s = sgn(k) \; ; \quad s' = sgn(k') \; ; \quad s'' = sgn(k'') \; ;$$
$$U_{k,k-k',k'} = \frac{sp_1^{-1}F_{11} - G_{11}}{p_1(|k| + |k'| + |k''|)} + \frac{sp_1^{-1}F_{12} - G_{12}}{p_1(|k| + |k'|) + p_2|k''|} +$$
$$+ \frac{sp_1^{-1}F_{21} - G_{21}}{p_1(|k| + |k''|) + p_2|k'|} + \frac{sp_1^{-1}F_{22} - G_{22}}{p_1|k| + p_2(|k'| + |k''|)} \; ;$$
$$V_{k,k-k',k'} = -\{\, \frac{sp_2 F_{11} - G_{11}}{p_2|k| + p_1(|k'| + |k''|)} + \frac{sp_2 F_{12} - G_{12}}{p_2(|k| + |k''|) + p_1|k'|} +$$
$$+ \frac{sp_2 F_{21} - G_{21}}{p_2(|k| + |k'|) + p_1|k''|} + \frac{sp_2 F_{22} - G_{22}}{p_2(|k| + |k'| + |k''|)} \} \; ;$$
$$U^{(+)}_{k,k-k',k'} = \frac{p_1^{-1}F_1^{(+)} - G_1^{(+)}}{2p_1 k} + \frac{p_1^{-1}F_2^{(+)} - G_2^{(+)}}{p_1(k + k') + p_2(k - k')} +$$

$$+\frac{p_1^{-1}F_3^{(+)}-G_3^{(+)}}{p_1(2k-k')+p_2k'}+\frac{p_1^{-1}F_4^{(+)}-G_4^{(+)}}{(p_1+p_2)k}\,;$$

$$V^{(+)}_{k,k-k',k'}=-\{\,\frac{p_2F_1^{(+)}-G_1^{(+)}}{(p_1+p_2)k}+\frac{p_2F_2^{(+)}-G_2^{(+)}}{p_2(2k-k')+p_1k'}+$$

$$+\frac{p_2F_3^{(+)}-G_3^{(+)}}{p_2(k+k')+p_1(k-k')}+\frac{p_2F_4^{(+)}-G_4^{(+)}}{2p_2k}\}\,;$$

$$U^{(-)}_{k,k-k',k'}=\frac{p_1^{-1}F_1^{(-)}-G_1^{(-)}}{2p_1k'}+\frac{p_1^{-1}F_2^{(-)}-G_2^{(-)}}{p_1(k+k')+p_2(k'-k)}+$$

$$+\frac{p_1^{-1}F_3^{(-)}-G_3^{(-)}}{(p_1+p_2)k'}+\frac{p_1^{-1}F_4^{(-)}-G_4^{(-)}}{p_1k+p_2(2k'-k)}\,;$$

$$V^{(-)}_{k,k-k',k'}=-\{\,\frac{p_2F_1^{(-)}-G_1^{(-)}}{p_2k+p_1(2k'-k)}+\frac{p_2F_2^{(-)}-G_2^{(-)}}{(p_1+p_2)k'}+$$

$$+\frac{p_2F_3^{(-)}-G_3^{(-)}}{p_1(k'-k)+p_2(k'+k)}+\frac{p_2F_4^{(-)}-G_4^{(-)}}{2p_2k'}\}\,.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Викторов И.А. Звуковые поверхностные волны в твердых телах. –М. : Наука, 1981, 287 с.
2. Реутов В.П. Применение усредненного вариационного принципа для описания многоволновых взаимодействий упругих поверхностных волн. //Изв. вузов. Радиофизика. – 1973, – Т. 16, № 11. – С. 1690 – 1702.
3. Kalyanasundaram N. Nonliner surface waves on an isotropic solid. – Int.J.Engin.Sci., 1981, V.19, p. 279 – 286.
4. Kalyanasundaram N. Ravindram R.,Prasad P. Coupled amplitude thory of nonliner surface waves. – J.Acoust.Soc.Amer.1982, V.72, p. 488 – 493.
5. Lardner R.W. Nonliner surface waves on elactic solid. –Int.J.Engin.Sci. 1983, V.21, p. 1331 – 1342.
6. Lardner R.W. Nonliner Rayleigh waves: Harmonic generation, parametric amplification and thermoviscous damping.– J.Appl. Phys. 1984, V.55, p. 3251 – 3260.
7. David E.A. A uniform asymptotic solution for nonliner surface acouctic waves.– Int.J.Engin.Sci. 1985, V. 23, p. 699–708.
8. Parker D.F., Talbot F.M. Analysis and computation for nonliner elastic surface waves of permanent form.– J.Elast. 1985, V.15, p. 389–426.
9. Parker D.F. Waveform evolution for nonliner surface acoustic waves.– Int.J.Engin.Sci., 1988, V. 26, p. 59 – 75.
10. Рабинович М.И., Штильман Л.Е. О самовоздействии и взаимодействии волн с непрерывным спектром в слабонелинейных средах.– Изв. вузов. Радиофизика. – 1973. – Т. 16, № 11. – С. 1680 – 1689.
11. Соколов А.В. Эволюционное уравнение для волны Рэлея на границе однородного полупространства .– Препринт № 225, – Горький : НИРФИ, 1987. – 19 с.
12. Петров В.В. Взаимодействие объемных и поверхностных волн в нелинейных средах: Автореф. дис. на соискание уч. ст. канд. физ.-мат. наук. Горький : ГГУ, 1979, 20 с.
13. Новиков А.А., Сазонтов А.Г. Нелинейная теория взаимодействия гравитационнх волн с горизонтальной гидродинамической турбулентностью // Тр. МГИ АН УССР, Севастополь, 1981. С. 103 – 114.

Дата поступления статьи
28 июня 1993 года