

Нижегородский научно-исследовательский радиофизический институт
Министерства науки, высшей школы и технической политики
Российской Федерации

П р е п р и н т № 36I

ДИФРАКЦИЯ И ВОЗБУЖДЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН
ВНУТРИ ПЛОСКОГО ВОЛНОВОДА
С ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ НЕОДНОРОДНОСТЬЮ

В.П.Докучаев
В.А.Яшнов

Нижегород. 1993

Д о к у ч а е в В. П., Я ш н о в В. А.

ДИФРАКЦИЯ И ВОЗБУЖДЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН ВНУТРИ ПЛОСКОГО ВОЛНОВОДА С ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ НЕОДНОРОДНОСТЬЮ//Препринт № 361. - Нижний Новгород: НИРФИ, 1993. - 32 с.

УДК 621.372.821:537.874.6

В работе получены точные решения задач о возбуждении и дифракции электромагнитных полей, создаваемых сторонними электрическими и магнитными диполями в плоском волноводе с идеальными стенками при наличии в нем цилиндрической неоднородности с постоянными значениями ϵ и μ . Решения представлены в виде двойных рядов. Исследованы вопросы взаимодействия и трансформации двух типов нормальных волн - ТЕ и ТМ - на границе цилиндрической неоднородности. Особое внимание уделено анализу влияния указанной неоднородности на энергетические характеристики излучения. Получены формулы для сопротивления излучения вертикального электрического диполя и проводимости излучения для вертикального магнитного диполя.

Д о к у ч а е в В. П., Я ш н о в В. А.

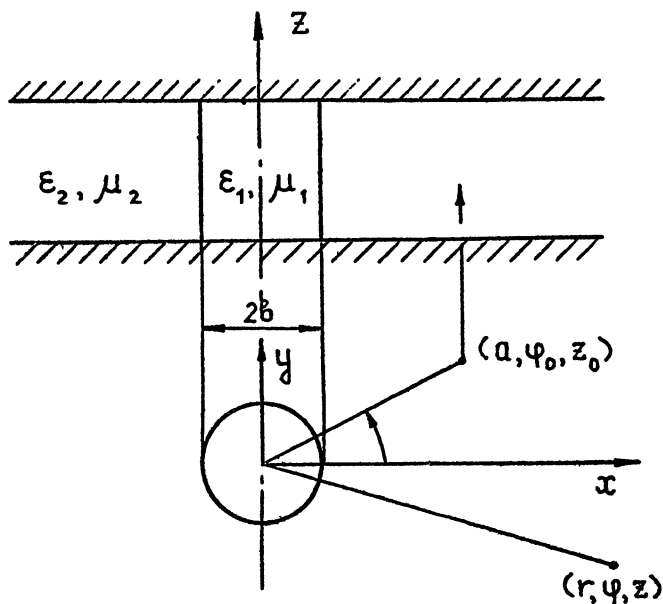
EXCITATION AND DIFFRACTION OF THE ELECTROMAGNETIC WAVES INSIDE A PLANE WAVEGUIDE WITH A CYLINDRICAL INHOMOGENEITY//Preprint N361.- Nizhny Novgorod: NIRFI, 1993.- 33p.

An extensive theoretical treatment is presented of the problems of excitation and diffraction of electromagnetic fields from electric and magnetic dipoles having been placed inside a plane waveguide with a solitary cylindrical inhomogeneity. The solution is presented in the form of double series. An analysis is given of the interaction and the transformation of TE and TM waves at the cylindrical inhomogeneity boundary. A special attention is paid to the consideration of the inhomogeneity influence on the radiation energetic characteristics. Formulae have been obtained for the radiation resistance of a vertical electric dipole and the radiation admittance of a vertical magnetic dipole.

І. В В Е Д Е Н И Е

Модели плоских волноводов широко используются в гидроакустике, сейсмологии и, особенно, в теории распространения радиоволн СВ-диапазона вблизи земной поверхности /1-5/. В последнее время растет интерес к волноводам с неоднородным заполнением, в частности, к волноводам, содержащим регулярные неоднородности среды и ли геометрических и электрических свойств стенок волновода. Эти неоднородности, как естественного, так и искусственного происхождения, могут существенно влиять на характер распределения волновых полей внутри волноводов /6-9/.

Здесь рассмотрена задача о возбуждении ТЕ- и ТМ-волн элементарными электрическими и магнитными диполями, расположенными в плоском волноводе с идеально проводящими стенками при наличии в нем неоднородности в форме круглого цилиндра, ось которого перпендикулярна стенкам волновода.



Р и с. I

На рис. I показана геометрия задачи: вид сбоку на плоский волновод высотой h с диэлектрическим цилиндром радиуса b , а также

вид сверху в сечении плоскостью $Z = Z_0$, проходящей через середину диполя, возбуждающего волновод. Используется цилиндрическая система координат r, φ, z с осью z , ориентированной вдоль o с и цилиндра. Источник (элементарный электрический или магнитный диполь) расположен в точке с координатами $r = a, \varphi = \varphi_0$ и $z = Z_0$. Свойства изотропной среды, заполняющей цилиндр, характеризуются значениями относительной диэлектрической и магнитной проницаемости ϵ_1 и μ_1 , а свойства остальной среды волновода — константами ϵ_2 и μ_2 .

В такой постановке задача имеет точное решение в форме двойных рядов, удобных для численных расчетов. Родственные частные задачи для прямоугольных волноводов с неоднородным заполнением, а также для плоского волновода с металлическим штырем рассматривались в работах [7, 9, 10].

В плоских волноводах с идеально проводящими стенками легко выделяются два класса нормальных волн, отличающихся поляризацией и структурой поля стоячих волн в поперечном по отношению к стенкам волновода направлении. К первому классу относят электрические волны или ТМ-моды, в которых полностью отсутствует компонента магнитного поля H_z , перпендикулярная к стенкам волновода. Ко второму — магнитные волны или ТЕ-моды, в которых вертикальная компонента напряженности электрического поля E_z равна нулю. Известно, что в идеальном однородном плоском волноводе вертикальные электрические (горизонтальные магнитные) токи возбуждают только ТМ-моды, а вертикальные магнитные (горизонтальные электрические) токи генерируют исключительно ТЕ-моды [11]. Далее будет показано, что на поверхности диэлектрического цилиндра, расположенного внутри плоского волновода с идеально проводящими стенками, происходит взаимная трансформация ТМ- и ТЕ-мод. Вследствие этого, вертикальный электрический диполь, например, в данном случае возбуждает как электрические, так и магнитные волны.

2. ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ, СТОРОННИЕ ТОКИ И ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Для решения задач о возбуждении электромагнитных волн в плоском волноводе при наличии в нем цилиндрической неоднородности мы воспользуемся известными уравнениями для электрического и магнит-

ного векторных потенциалов \vec{A} и \vec{F} с калибровкой Лоренца:

$$\Delta \vec{A} + \kappa^2 \vec{A} = -\vec{j}_e, \quad (2.1)$$

$$\Delta \vec{F} + \kappa^2 \vec{F} = -\vec{j}_m. \quad (2.2)$$

Здесь \vec{j}_e и \vec{j}_m - плотности сторонних электрических и магнитных токов, $\kappa = \kappa_0 \sqrt{\epsilon \mu}$ - волновое число в среде с относительной диэлектрической и магнитной проницаемостями ϵ и μ , $\kappa_0 = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ - волновое число в вакууме, ω - циклическая частота, ϵ_0 и μ_0 - электрическая и магнитная постоянные системы СИ. Зависимость от времени токов и полей выбрана в виде $\exp(-i\omega t)$. Напряженности электрического и магнитного полей при лоренцовой калибровке потенциалов определяются соотношениями /II/

$$\vec{E} = i\omega \mu \mu_0 \vec{A} - \frac{1}{i\omega \epsilon \epsilon_0} \text{grad div } \vec{A} - \text{rot } \vec{F}, \quad (2.3)$$

$$\vec{H} = i\omega \epsilon \epsilon_0 \vec{F} - \frac{1}{i\omega \mu \mu_0} \text{grad div } \vec{F} + \text{rot } \vec{A}, \quad (2.4)$$

электрическая и магнитная индукции связаны с напряженностями полей соотношениями

$$\vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}. \quad (2.5)$$

Средняя за период мощность излучения гармонических во времени волн сторонними токами может быть вычислена с помощью метода наводимых э.д.с., в соответствии с которым

$$W = \text{Re} \left\{ \frac{1}{2} \int (\vec{j}_e \vec{E}^*) d\vec{R} + \frac{1}{2} \int (\vec{j}_m \vec{H}^*) d\vec{R} \right\}, \quad (2.6)$$

где Re - означает реальную часть выражения, * - символ комплексно-сопряженной величины. Иными словами, формула (2.6) определяет мощность излучения через работу сил реакции излучения над порожда-

кими волны сторонними токами /II-12/.

В качестве сторонних токов в (2.1), (2.2) мы будем рассматривать элементарные вертикальные электрические и магнитные диполя в цилиндрической системе координат:

$$\vec{j}_{e,m}(\vec{R}) = \frac{I_{e,m} \ell}{\sqrt{r a}} \vec{e}_z \delta(r-a) \delta(\varphi - \varphi_0) \delta(z - z_0), \quad (2.7)$$

где \vec{e}_z - единичный вектор по оси z , $I_{e,m}$ - амплитуда тока в частоте ω , ℓ - размер излучателя, $\delta(x)$ - символ дельта-функции Дирака. В этом случае векторные потенциалы \vec{A} и \vec{F} имеют лишь вертикальные z -компоненты, для которых уравнения (2.1), (2.2) принимают вид

$$\Delta A + k^2 A = - \frac{I_e \ell}{\sqrt{r a}} \delta(r-a) \delta(\varphi - \varphi_0) \delta(z - z_0), \quad (2.8)$$

$$\Delta F + k^2 F = - \frac{I_m \ell}{\sqrt{r a}} \delta(r-a) \delta(\varphi - \varphi_0) \delta(z - z_0). \quad (2.9)$$

Для компоненты напряженности электрического поля при этом из (2.3) получаются следующие выражения:

$$E_r = \frac{i}{\omega \epsilon \epsilon_0} \frac{\partial^2 A}{\partial r \partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \varphi}, \quad (2.10)$$

$$E_\varphi = \frac{i}{\omega \epsilon \epsilon_0} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 A}{\partial \varphi \partial z} + \frac{\partial F}{\partial r}, \quad (2.11)$$

$$E_z = \frac{i}{\omega \epsilon \epsilon_0} \left(\frac{\partial^2 A}{\partial z^2} + k^2 A \right). \quad (2.12)$$

Аналогично из (2.4) находятся компоненты напряженности магнитного

поля:

$$H_r = \frac{i}{\omega\mu\mu_0} \frac{\partial^2 F}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial \varphi}, \quad (2.13)$$

$$H_\varphi = \frac{i}{\omega\mu\mu_0} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi \partial z} - \frac{\partial A}{\partial r}, \quad (2.14)$$

$$H_z = \frac{i}{\omega\mu\mu_0} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + k^2 F \right). \quad (2.15)$$

Сформулируем граничные условия на стенках волновода и на поверхности цилиндра, пользуясь для этой цели соотношениями (2.10) - (2.15). На стенках волновода при $z = 0$ и $z = h$ имеем

$$\frac{\partial A}{\partial z} = 0, \quad F = 0. \quad (2.16)$$

На поверхности круглого изотропного диэлектрического цилиндра при $r = b$ должны выполняться следующие условия:

$$\frac{i}{\omega\varepsilon_1\varepsilon_0 b} \frac{\partial^2 A_1}{\partial \varphi \partial z} + \frac{\partial F_1}{\partial r} = \frac{i}{\omega\varepsilon_2\varepsilon_0 b} \frac{\partial^2 A_2}{\partial \varphi \partial z} + \frac{\partial F_2}{\partial r}, \quad (2.17)$$

$$\frac{1}{\varepsilon_1} \left(\frac{\partial^2 A_1}{\partial z^2} + k_1^2 A_1 \right) = \frac{1}{\varepsilon_2} \left(\frac{\partial^2 A_2}{\partial z^2} + k_2^2 A_2 \right), \quad (2.18)$$

$$\frac{i}{\omega\mu_1\mu_0} \frac{\partial^2 F_1}{\partial \varphi \partial z} - \frac{\partial A_1}{\partial r} = \frac{i}{\omega\mu_2\mu_0 b} \frac{\partial^2 F_2}{\partial \varphi \partial z} - \frac{\partial A_2}{\partial r}, \quad (2.19)$$

$$\frac{1}{\mu_1} \left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial z^2} + K_1^2 F_1 \right) = \frac{1}{\mu_2} \left(\frac{\partial^2 F_2}{\partial z^2} + K_2^2 F_2 \right). \quad (2.20)$$

Здесь A_1 и F_1 - значения вертикальных компонент электрического и магнитного векторных потенциалов внутри цилиндра, а A_2 и F_2 - вне его. Волновые числа внутри и вне цилиндра равны соответственно K_1 и K_2 .

Удобно выделить и рассмотреть отдельно два класса задач о возбуждении плоского волновода с цилиндрической неоднородностью. Первый класс - это случай, когда диполи расположены вне цилиндра, то есть $a \geq b$. При этом мы имеем дело, по существу, с дифракцией нормальных мод на цилиндре. Второй класс задач - это случай, когда излучатели расположены внутри цилиндра - $a \leq b$. Здесь следует говорить не о дифракции, а о возбуждении самой цилиндрической неоднородности внутри волновода указанными источниками электромагнитных полей. В соответствии с этим приступим к анализу указанных задач.

3. ДИФРАКЦИЯ ВОЛН НА ЦИЛИНДРЕ, РАСПОЛОЖЕННОМ ВНУТРИ ПЛОСКОГО ИДЕАЛЬНОГО ВОЛНОВОДА

Здесь рассматриваются задачи дифракции ТМ- и ТЕ-волн, генерируемых соответственно вертикальными электрическим и магнитным дipoлями, находящимися на некотором расстоянии $a - b \geq 0$ от поверхности цилиндра и вне его. Будет показано, что в результате трансформации нормальных мод на границе цилиндра дифракционное поле в общем случае содержит все типы ТМ- и ТЕ-мод.

3.1. Дифракция на цилиндре волн, возбуждаемых вертикальным электрическим диполем в волноводе

Рассмотрим относительно подробно задачу о возбуждении плоского волновода с цилиндрической неоднородностью элементарным вертикальным электрическим диполем, расположенным вне цилиндра, и дифракции нормальных волн на неоднородности. В этом случае исходные уравнения для вертикальных компонент векторных потенциалов A и F

принимает следующий вид:

внутри цилиндра (область I)

$$\Delta A_1 + \kappa_1^2 A_1 = 0, \quad (3.1)$$

$$\Delta F_1 + \kappa_1^2 F_1 = 0; \quad (3.2)$$

вне цилиндра (область 2)

$$\Delta A_2 + \kappa_2^2 A_2 = -\frac{I_e l}{\sqrt{r a}} \delta(r-a) \delta(\varphi-\varphi_0) \delta(z-z_0), \quad (3.3)$$

$$\Delta F_2 + \kappa_2^2 F_2 = 0. \quad (3.4)$$

Здесь κ_1 и κ_2 - волновые числа внутри цилиндра и вне его

$$\kappa_1 = \kappa_0 \sqrt{\epsilon_1 \mu_1}, \quad \kappa_2 = \kappa_0 \sqrt{\epsilon_2 \mu_2}. \quad (3.5)$$

Заметим, что необходимость введения магнитного потенциала, удовлетворяющего уравнениям (3.2), (3.4), обусловлена тем, что только совместное использование электрического и магнитного потенциалов позволяет удовлетворить всей совокупности граничных условий (2.17) - (2.20) на поверхности диэлектрического стержня.

Для решения поставленной задачи воспользуемся, во-первых, разложением источников и искомых полей по нормальным волнам плоского волновода /1-2/. Во-вторых, применим метод разделения переменных при решении задачи о дифракции нормальных волн на диэлектрическом цилиндре /13-16/. Собственные функции волноводной задачи, удовлетворяющие граничным условиям (2.16), хорошо известны:

$$f_n(z) = \cos\left(n\pi \frac{z}{h}\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.6)$$

$$g_n(z) = \sin\left(n\pi \frac{z}{h}\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.7)$$

Запишем известные представления для δ -функций, входящих в выражение (3.3), /17/:

$$\delta(z - z_0) = \frac{1}{h} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \cos\left(n\pi \frac{z_0}{h}\right) \cos\left(n\pi \frac{z}{h}\right), \quad (3.8)$$

$$\delta(\varphi - \varphi_0) = \frac{1}{2\pi} \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \cos(s\varphi_0) \cos(s\varphi). \quad (3.9)$$

Принимая во внимание разложения (3.8)–(3.9), будем искать решение задачи (3.1)–(3.4) в виде двойных рядов:

$$A_1 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{s=-\infty}^{+\infty} A_{1ns}(r) \cos\left(n\pi \frac{z_0}{h}\right) \cos\left(n\pi \frac{z}{h}\right) \cos s(\varphi - \varphi_0), \quad (3.10)$$

$$F_1 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{s=-\infty}^{+\infty} F_{1ns}(r) \cos\left(n\pi \frac{z_0}{h}\right) \sin\left(n\pi \frac{z}{h}\right) \sin s(\varphi - \varphi_0), \quad (3.11)$$

$$A_2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{s=-\infty}^{+\infty} A_{2ns}(r) \cos\left(n\pi \frac{z_0}{h}\right) \cos\left(n\pi \frac{z}{h}\right) \cos s(\varphi - \varphi_0), \quad (3.12)$$

$$F_2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{s=-\infty}^{+\infty} F_{2ns}(r) \cos\left(n\pi \frac{z_0}{h}\right) \sin\left(n\pi \frac{z}{h}\right) \sin s(\varphi - \varphi_0). \quad (3.13)$$

Рассмотрим способ нахождения неизвестных функций, входящих в выражения (3.10)–(3.13), на примере функции $A_{2ns}(r)$. Для этого подставим в уравнение (3.3) выражения (3.8), (3.9) и (3.13). В результате подстановки приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2 A_{2ns}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dA_{2ns}}{dr} + \left(k^2 - \frac{n^2 \pi^2}{h^2} - \frac{s^2}{r^2} \right) A_{2ns} = - \frac{I_e \ell}{2\pi h} \frac{\delta(r-a)}{\sqrt{r-a}}. \quad (3.14)$$

Общее решение уравнения (3.14) представим в виде

$$A_{2ns} = \frac{i I_e \ell}{4h} \left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} J_s(\alpha_{2n} a) H_s^{(1)}(\alpha_{2n} r), \quad r \geq a \\ J_s(\alpha_{2s} r) H_s^{(1)}(\alpha_{2n} a), \quad r \leq a \end{array} \right] + \\ + R_{ns}^{(ee)} H_s^{(1)}(\alpha_{2n} r) + D_{ns}^{(ee)} H_s^{(2)}(\alpha_{2n} r) \end{array} \right\}. \quad (3.15)$$

В квадратных скобках записано частное решение уравнения (3.14), отвечающее точечному источнику. Следующие слагаемые в (3.15) да в т решение однородного уравнения (3.14). Здесь $J_s(x)$, $H_s^{(1)}(x)$ и $H_s^{(2)}(x)$ соответственно функции Бесселя первого рода порядка s , функции Ханкеля первого и второго рода того же порядка /18/. В (3.15) введено следующее обозначение для радиального волнового числа в плоском волноводе:

$$\alpha_{2n} = + \sqrt{k^2 - \frac{n^2 \pi^2}{h^2}} = + i \sqrt{\frac{n^2 \pi^2}{h^2} - k^2}, \quad (3.16)$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

В силу условия излучения (принципа причинности) коэффициент $D_{ns}^{(ee)}$ в (3.15) обращается в нуль. Смысл другого коэффициента $R_{ns}^{(ee)}$ вполне понятен. Это некоторый коэффициент отражения электрических волн с индексами n и s от цилиндра. Выражение для коэффициента $R_{ns}^{(ee)}$ может быть получено из граничных условий на поверхности цилиндра.

Аналогично находятся частные решения однородных уравнений (3.1), (3.2) и (3.4). В результате выражения (3.10), (3.11) и (3.13) принимают вид

$$A_1 = \frac{iI_e l}{4h} \sum_{n,s=-\infty}^{+\infty} T_{ns}^{(ee)} J_s(\alpha_{1n} r) \cos\left(n\pi \frac{z_0}{h}\right) \cos\left(n\pi \frac{z}{h}\right) \cos s(\varphi - \varphi_0), \quad (3.17)$$

$$F_1 = \frac{iI_e l}{4h} \zeta_0 \sum_{n,s=-\infty}^{+\infty} T_{ns}^{(em)} J_s(\alpha_{1n} r) \cos\left(n\pi \frac{z_0}{h}\right) \sin\left(n\pi \frac{z}{h}\right) \sin s(\varphi - \varphi_0), \quad (3.18)$$

$$F_2 = \frac{iI_e l}{4h} \zeta_0 \sum_{n,s=-\infty}^{+\infty} R_{ns}^{(em)} H_s^{(1)}(\alpha_{2n} r) \cos\left(n\pi \frac{z_0}{h}\right) \sin\left(n\pi \frac{z}{h}\right) \sin s(\varphi - \varphi_0), \quad (3.19)$$

$$\zeta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120\pi, \text{ Ом.}$$

Здесь введено радиальное волновое число α_{1n} для цилиндра

$$\alpha_{1n} = + \sqrt{k_1^2 - \frac{n^2 \pi^2}{h^2}} = + i \sqrt{\frac{n^2 \pi^2}{h^2} - k_1^2}. \quad (3.20)$$

В формулах (3.17), (3.18) выбраны радиальные решения уравнения и (3.1), (3.2), не имеющие особенностей на оси цилиндра, т.е. остающиеся конечными при $r = 0$. При записи решения (3.19) уравнения и (3.4) вновь использовано условие излучения - функция Ханкеля $H_s^{(1)}(\alpha_{2n} r)$ при больших r описывает волну, уходящую от цилиндра.

Поясним смысл коэффициентов $T_{ns}^{(ee)}$, $T_{ns}^{(em)}$ и $R_{ns}^{(em)}$, входящих в (3.17)-(3.19). Коэффициент $T_{ns}^{(ee)}$ описывает амплитуду электрических волн, прошедших внутрь цилиндра, $T_{ns}^{(em)}$ - амплитуду магнитных волн внутри цилиндра, возникающих в результате трансформации падающих электрических волн на поверхности цилиндра. Наконец, $R_{ns}^{(em)}$ - коэффициент трансформации электрических волн в магнитные при отражении от цилиндра. Выражения для коэффициентов $T_{ns}^{(ee)}$, $T_{ns}^{(em)}$, $R_{ns}^{(ee)}$ и $R_{ns}^{(em)}$ находим из граничных условий на поверхности цилиндра

(2.17)-(2.20). Соответствующая система уравнений имеет вид

$$\frac{i\pi ns}{\omega \varepsilon_1 \varepsilon_0 b h} J_s(\beta_{1n}) T_{ns}^{(ee)} + \zeta_0 \alpha_{1n} j_s(\beta_{1n}) T_{ns}^{(em)} = \quad (3.21)$$

$$= \frac{i\pi ns}{\omega \varepsilon_2 \varepsilon_0 b h} \left[J_s(\beta_{2n}) H_s^{(1)}(\alpha_{2n}) + H_s^{(1)}(\beta_{2n}) R_{ns}^{(ee)} \right] + \\ + \zeta_0 \alpha_{2n} H_s^{(1)}(\beta_{2n}) R_{ns}^{(em)} ;$$

$$\frac{\alpha_{1n}^2}{\varepsilon_1} J_s(\beta_{1n}) T_{ns}^{(ee)} = \\ = \frac{\alpha_{2n}^2}{\varepsilon_2} \left[J_s(\beta_{2n}) H_s^{(1)}(\alpha_{2n}) + H_s^{(1)}(\beta_{2n}) R_{ns}^{(ee)} \right] ; \quad (3.22)$$

$$\frac{i\pi ns}{\omega \mu_1 \mu_0 b h} \zeta_0 J_s(\beta_{1n}) T_{ns}^{(em)} - \alpha_{1n} j_s(\beta_{1n}) T_{ns}^{(ee)} =$$

$$= \frac{i\pi ns}{\omega \mu_2 \mu_0 b h} \zeta_0 H_s^{(1)}(\beta_{2n}) R_{ns}^{(em)} - \alpha_{2n} \left[j_s(\beta_{2n}) H_s^{(1)}(\alpha_{2n}) + H_s^{(1)}(\beta_{2n}) R_{ns}^{(ee)} \right] ; \quad (3.23)$$

$$\frac{\alpha_{1n}^2}{\mu_1} J_s(\beta_{1n}) T_{ns}^{(em)} = \frac{\alpha_{2n}^2}{\mu_2} H_s^{(1)}(\beta_{2n}) R_{ns}^{(em)} . \quad (3.24)$$

Решая систему уравнений (3.21)-(3.24), получаем

$$R_{ns}^{(ee)} = - \frac{\{D_{\mu} M_{\epsilon} - S^2 C_n^2\}}{\{D_{\mu} D_{\epsilon} - S^2 C_n^2\}} \frac{J_S(\beta_{2n})}{H_S^{(1)}(\beta_{2n})} H_S^{(1)}(\alpha_{2n}), \quad (3.25)$$

$$R_{ns}^{(em)} = - \frac{2\mu_2}{\pi\beta_{2n}^2} \frac{SC_n}{\{D_{\mu} D_{\epsilon} - S^2 C_n^2\}} \frac{H_S^{(1)}(\alpha_{2n})}{[H_S^{(1)}(\beta_{2n})]^2}, \quad (3.26)$$

$$T_{ns}^{(ee)} = i \frac{2\epsilon_1}{\pi\beta_{1n}^2} \frac{D_{\mu}}{\{D_{\mu} D_{\epsilon} - S^2 C_n^2\}} \frac{H_S^{(1)}(\beta_{2n})}{J_S(\beta_{1n}) H_S^{(1)}(\beta_{2n})}, \quad (3.27)$$

$$T_{ns}^{(em)} = - \frac{2\mu_1}{\pi\beta_{1n}^2} \frac{SC_n}{\{D_{\mu} D_{\epsilon} - S^2 C_n^2\}} \frac{H_S^{(1)}(\alpha_{2n})}{J_S(\beta_{1n}) H_S^{(1)}(\beta_{2n})}. \quad (3.28)$$

В формулах (3.25)–(3.28) использованы следующие обозначения:

$$D_{\mu} = \frac{\mu_1}{\beta_{1n}} \frac{\dot{J}_S(\beta_{1n})}{J_S(\beta_{1n})} - \frac{\mu_2}{\beta_{2n}} \frac{\dot{H}_S^{(1)}(\beta_{2n})}{H_S^{(1)}(\beta_{2n})}, \quad (3.29)$$

$$D_{\epsilon} = \frac{\epsilon_1}{\beta_{1n}} \frac{\dot{J}_S(\beta_{1n})}{J_S(\beta_{1n})} - \frac{\epsilon_2}{\beta_{2n}} \frac{\dot{H}_S^{(1)}(\beta_{2n})}{H_S^{(1)}(\beta_{2n})}, \quad (3.30)$$

$$M_{\varepsilon} = \frac{\varepsilon_1}{\beta_{1n}} \frac{\dot{J}_s(\beta_{1n})}{J_s(\beta_{1n})} - \frac{\varepsilon_2}{\beta_{2n}} \frac{\dot{J}_s(\beta_{2n})}{J_s(\beta_{2n})}, \quad (3.31)$$

$$C_n = \frac{n\pi}{k_0 h} \frac{\beta_{2n}^2 - \beta_{1n}^2}{\beta_{1n}^2 \beta_{2n}^2}. \quad (3.32)$$

Здесь подлагается также

$$\alpha_{1,2n} = \alpha_{1,2n} a, \quad \beta_{1,2n} = \alpha_{1,2n} b.$$

Электромагнитные поля вне цилиндрической неоднородности (дифракционные поля) полностью определяются потенциалами A_2 и F_2 , т.е. коэффициентами $R_{ns}^{(ee)}$ и $R_{ns}^{(em)}$. Для вычисления полей внутри цилиндра необходимо воспользоваться выражениями (3.27), (3.28) для коэффициентов $T_{ns}^{(ee)}$ и $T_{ns}^{(em)}$.

Поясним смысл некоторых обозначений. Из теории дифракции плоских волн на бесконечно протяженном круглом диэлектрическом цилиндре известно, что условия

$$D_{\varepsilon} = 0 \quad \text{и} \quad D_{\mu} = 0 \quad (3.33)$$

при $\Gamma = 0$ определяют дисперсионные соотношения соответственно для электрических и магнитных волн /II/. В рассматриваемом случае в плоском идеальном волноводе с диэлектрическим стержнем распространяются гибридные волны, дисперсионное уравнение для которых имеет вид /20/

$$D_{\varepsilon} D_{\mu} = S^2 C_n^2. \quad (3.34)$$

Для измерений наибольший интерес представляет вертикальная компонента электрического поля E_z . Используя соотношения (2.12) и (3.15), для области вне цилиндра получаем

$$E_{2z} = -\frac{I_e \ell}{4K_2 h} \zeta_2 \sum_{n,s=-\infty}^{+\infty} \alpha_{2n} \left\{ \begin{array}{l} J_s(\alpha_{2n}) H_s^{(1)}(\alpha_{2n} r), r \geq a \\ J_s(\alpha_{2n} r) H_s^{(1)}(\alpha_{2n}), r \leq a \end{array} \right\} + \\ + R_{ns}^{(ee)} H_s^{(1)}(\alpha_{2n} r) \left. \right\} \cos\left(n\pi \frac{z_0}{h}\right) \cos\left(n\pi \frac{z}{h}\right) \cos s(\varphi - \varphi_0), \quad (3.35)$$

где $R_{ns}^{(ee)}$ определяется выражением (3.25).

Интересно отметить, что в плоском волноводе электрические и волны содержат в качестве основной волны "телеграфную" моду, т. е. TEM-волну /II/, в которой $n = 0$. При этом из соотношений (3.25), (3.32) следует

$$R_{0s}^{(ee)} = -\frac{M_\varepsilon}{D_\varepsilon} \frac{J_s(\beta_{2n})}{H_s^{(1)}(\beta_{2n})} H_s^{(1)}(\alpha_{2n}). \quad (3.36)$$

К сожалению, и в этом достаточно простом случае полное суммирование ряда по s в (3.35) выполнить не удастся.

Полученное выражение для вертикальной компоненты электрического поля (3.35) позволяет вычислить методом наводимых э.д.с. мощность, излучаемую вертикальным электрическим диполем в идеальном плоском волноводе. С учетом (2.6) и (2.7) получаем

$$W_e = \frac{(I_e \ell)^2}{8h} \operatorname{Re} \frac{\zeta_2}{K_2} \sum_{n,s=-\infty}^{+\infty} \alpha_{2n}^2 \left[J_s(\alpha_{2n}) + R_{ns}^{(ee)} \right] H_s^{(1)}(\alpha_{2n}) \cos^2\left(n\pi \frac{z_0}{h}\right). \quad (3.37)$$

Здесь $\zeta_2 = \sqrt{\mu_2 \mu_0 / \varepsilon_2 \varepsilon_1}$ - характеристический импеданс среды, заполняющей волновод.

Если интересоваться только волновыми полями в области дифракции, то в формулах (3.35), (3.37) следует обрывать суммирование по

n на некотором числе N , которое в соответствии с (3.16) равно целой части $(\kappa_2 h / \pi)$. Ряды по s и n в (3.35) и (3.37) для численных расчетов волновых полей и излучаемой мощности удобно представить в виде

$$E_{2z} = -\frac{I_e \ell}{4\kappa_2 h} \zeta_2 \sum_{s=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^N \gamma_s \gamma_n \alpha_{2n}^2 \left\{ \begin{array}{l} J_s(\alpha_{2n}) H_s^{(1)}(\alpha_{2n} r), \quad r \geq a \\ J_s(\alpha_{2n} r) H_s^{(1)}(\alpha_{2n}), \quad r \leq a \end{array} \right\} +$$

$$+ R_{ns}^{(ee)} H_s^{(1)}(\alpha_{2n} r) \left. \right\} \cos\left(n\pi \frac{z_0}{h}\right) \cos\left(n\pi \frac{z}{h}\right) \cos s(\psi - \psi_0), \quad (3.39)$$

$$W_e = \frac{(I_e \ell)^2}{8h} \operatorname{Re} \frac{\zeta_2}{\kappa_2} \sum_{s=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^N \gamma_s \gamma_n \alpha_{2n}^2 \left[J_s(\alpha_{2n}) + \right.$$

$$\left. + R_{ns}^{(ee)} \right] H_s^{(1)}(\alpha_{2n}) \cos^2\left(n\pi \frac{z_0}{h}\right). \quad (3.40)$$

Здесь использовано стандартное в теории рядов обозначение для символов Неймана:

$$\gamma_n = \begin{cases} 1, & n = 0; \\ 2, & n = 1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad (3.41)$$

Нетрудно записать выражение для вертикальной компоненты электрического поля внутри цилиндрической неоднородности. Используя (2.12) и (3.17), получаем

$$E_{1z} = -\frac{I_e \ell}{4\kappa_1 h} \zeta_1 \sum_{s=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^N \gamma_s \gamma_n \alpha_{1n}^2 T_{ns}^{(ee)} J_s(\alpha_{1n} r). \quad (3.42)$$

$$\times \cos\left(n\pi \frac{z_0}{h}\right) \cos\left(n\pi \frac{z}{h}\right) \cos s(\varphi - \varphi_0),$$

где коэффициент $T_{ns}^{(ee)}$ определяется формулой (3.27).

Представляет интерес предельный переход к случаю идеального проводящего цилиндра. Для этого в формулах (3.35), (3.25), (3.29)–(3.32) следует устремить $|\epsilon_1|$ в бесконечности. Как легко убедиться, при этом $D_\epsilon \approx M_\epsilon$ и, кроме того, $|D_\epsilon| \gg 1$ и $|M_\epsilon| \gg 1$. Тогда из (3.25) получаем

$$R_{ns}^{(ee)} = - \frac{J_s(\beta_{2n})}{H_s^{(1)}(\beta_{2n})} H_s^{(1)}(\alpha_{2n}), \quad (3.43)$$

что совпадает с соответствующим выражением, приведенным в работе /21/. Если, кроме того, положить $n = 0$, то выражения (3.35), (3.43) дают поле элементарного электрического вибратора, расположенного вблизи бесконечно протяженного идеально проводящего круглого цилиндра /15/.

3.2. Дифракция на цилиндре волн, возбуждаемых вертикальным магнитным диполем

Совершенно аналогично решается задача о дифракции на диэлектрическом цилиндре семейства магнитных волн (ТЕ-мод), генерируемых элементарным вертикальным магнитным диполем. В этом случае исходная система уравнений для потенциалов внутри и вне цилиндра имеет вид

$$\Delta A_1 + k_1^2 A_1 = 0, \quad (3.44)$$

$$\Delta F_1 + k_1^2 F_1 = 0, \quad (3.45)$$

$$\Delta A_2 + k_2^2 A_2 = 0, \quad (3.46)$$

$$\Delta F_2 + \kappa_2^2 F_2 = -\frac{I_m \ell}{\sqrt{ra}} \delta(r-a) \delta(\varphi - \varphi_0) \delta(z - z_0). \quad (3.47)$$

При нахождении решения уравнения (3.47) удобно воспользоваться известным представлением δ -функции [17]:

$$\delta(z - z_0) = \frac{1}{h} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sin\left(n\pi \frac{z_0}{h}\right) \sin\left(n\pi \frac{z}{h}\right). \quad (3.48)$$

Тогда по аналогии с (3.10)-(3.13) запишем решение системы (3.44)-(3.47) в виде

$$A_1 = \frac{iI_m \ell}{4h} \sum_{n,s=-\infty}^{+\infty} T_{ns}^{(me)} J_s(\alpha_{1n} r) \sin\left(n\pi \frac{z_0}{h}\right) \cos\left(n\pi \frac{z}{h}\right) \sin s(\varphi - \varphi_0), \quad (3.49)$$

$$F_1 = \frac{iI_m \ell}{4h} \zeta_0 \sum_{n,s=-\infty}^{+\infty} T_{ns}^{(mm)} J_s(\alpha_{1n} r) \sin\left(n\pi \frac{z_0}{h}\right) \sin\left(n\pi \frac{z}{h}\right) \cos s(\varphi - \varphi_0), \quad (3.50)$$

$$A_2 = \frac{iI_m \ell}{4h} \sum_{n,s=-\infty}^{+\infty} R_{ns}^{(me)} H_s^{(1)}(\alpha_{2n} r) \sin\left(n\pi \frac{z_0}{h}\right) \cos\left(n\pi \frac{z}{h}\right) \sin s(\varphi - \varphi_0), \quad (3.51)$$

$$F_2 = \frac{iI_m \ell}{4h} \zeta_0 \sum_{n,s=-\infty}^{+\infty} \left\{ \begin{array}{ll} \left[J_s(\alpha_{2n}) H_s^{(1)}(\alpha_{2n} r) & r \geq a \right] \\ \left[J_s(\alpha_{2n} r) H_s^{(1)}(\alpha_{2n}) & r \leq a \right] \end{array} \right\} + \\ + R_{ns}^{(mm)} H_s^{(1)}(\alpha_{2n} r) \left. \right\} \sin\left(n\pi \frac{z_0}{h}\right) \sin\left(n\pi \frac{z}{h}\right) \cos s(\varphi - \varphi_0). \quad (3.52)$$

Здесь $T_{ns}^{(me)}$ - коэффициент трансформации магнитной волны в электрическую при прохождении внутрь цилиндра, $T_{ns}^{(mm)}$ - коэффициент прохождения магнитной волны из области 2 в область I. Величина $R_{ns}^{(me)}$ характеризует трансформацию магнитной волны в электрическую при отражении от неоднородности, а $R_{ns}^{(mm)}$ - обычный коэффициент отражения магнитной волны. Используя граничные условия (2.17)-(2.20), нетрудно получить следующие выражения для этих коэффициентов:

$$R_{ns}^{(mm)} = - \frac{\{D_E M_\mu - S^2 C_n^2\}}{\{D_E D_\mu - S^2 C_n^2\}} \frac{J_s(\beta_{2n})}{H_s^{(1)}(\beta_{2n})} H_s^{(1)}(\alpha_{2n}), \quad (3.53)$$

$$R_{ns}^{(me)} = - \frac{2\varepsilon_2}{\pi \beta_{2n}^2} \frac{S C_n}{\{D_E D_\mu - S^2 C_n^2\}} \frac{H_s^{(1)}(\alpha_{2n})}{[H_s^{(1)}(\beta_{2n})]^2}, \quad (3.54)$$

$$T_{ns}^{(mm)} = i \frac{2\mu_1}{\pi \beta_{1n}^2} \frac{D_E}{\{D_E D_\mu - S^2 C_n^2\}} \frac{H_s^{(1)}(\alpha_{2n})}{J_s(\beta_{1n}) H_s^{(1)}(\beta_{2n})}, \quad (3.55)$$

$$T_{ns}^{(me)} = - \frac{2\varepsilon_1}{\pi \beta_{1n}^2} \frac{S C_n}{\{D_E D_\mu - S^2 C_n^2\}} \frac{H_s^{(1)}(\alpha_{2n})}{J_s(\beta_{1n}) H_s^{(1)}(\beta_{2n})}. \quad (3.56)$$

Множитель M_μ в выражении (3.53) имеет вид

$$M_\mu = \frac{\mu_1}{\beta_{1n}} \frac{J_s(\beta_{1n})}{J_s(\beta_{1n})} - \frac{\mu_2}{\beta_{2n}} \frac{J_s(\beta_{2n})}{J_s(\beta_{2n})}. \quad (3.57)$$

Вертикальную компоненту напряженности магнитного поля H_z в волноводе находим с помощью соотношений (2.15) и (3.52):

$$H_{2z} = -\frac{I_m l}{4k_2 h} \frac{\zeta_0}{\zeta_2} \sum_{s,n=0}^{\infty} \gamma_s \gamma_n \alpha_{2n}^2 \sin\left(n\pi \frac{z_0}{h}\right) \sin\left(n\pi \frac{z}{h}\right) \cos s(\varphi - \varphi_0) \quad (3.58)$$

$$\times \left\{ \begin{array}{l} \left[J_s(\alpha_{2n}) H_s^{(1)}(\alpha_{2n} r), \quad r \geq a \right. \\ \left. J_s(\alpha_{2n} r) H_s^{(1)}(\alpha_{2n}), \quad r \leq a \right] + R_{ns}^{(mm)} H_s^{(1)}(\alpha_{2n} r) \end{array} \right\}.$$

Мощность излучения магнитного диполя в соответствии с (2.6) и (3.58) определяется выражением

$$W_m = \frac{(I_m l)^2}{4h} \operatorname{Re} \frac{\zeta_0}{k_2 \zeta_2} \sum_{s=0}^{+\infty} \sum_{n=1}^N \gamma_s \alpha_{2n}^2 \sin^2\left(n\pi \frac{z_0}{h}\right) \times \quad (3.59)$$

$$\times \left[J_s^2(\alpha_{2n}) + R_{ns}^{(mm)} H_s^{(1)}(\alpha_{2n}) \right].$$

Приведенные в данном разделе соотношения позволяют провести расчеты электромагнитных полей, возбуждаемых элементарными электрическими и магнитными диполями, как в волноводе, так и внутри цилиндрической неоднородности.

4. ВОЗБУЖДЕНИЕ ДИПОЛЯМИ КРУГЛОГО ЦИЛИНДРА, ПОМЕЩЕННОГО ВНУТРИ ПЛОСКОГО ИДЕАЛЬНОГО ВОЛНОВОДА

Перейдем к анализу второго класса задач о возбуждении цилиндрических неоднородностей в идеальном волноводе электрическими и магнитными токами, расположенными внутри неоднородностей. Здесь также имеет место сложный характер взаимодействия и трансформации ТЕ- и ТМ-волн на границе цилиндра. В результате, как правило, в волноводе возбуждаются все типы волн как вертикальным электрическим, так и магнитным диполями.

4.1. Возбуждение цилиндра вертикальным электрическим диполем

Приведенные в предыдущем разделе результаты исследования дифракции электрических и магнитных волн на диэлектрическом стержне следует несколько модифицировать на тот случай, когда излучатель расположен внутри цилиндра. Эта задача представляет интерес при поиске оптимальных условий возбуждения плоских волноводов [7].

Прежде всего, рассмотрим возбуждение волновода вертикальным электрическим диполем. В этом случае система уравнений для Z-компонент векторных потенциалов принимает следующий вид:

в области 1

$$\Delta A_1 + \kappa_1^2 A_1 = -\frac{I_e \ell}{\sqrt{r a}} \delta(r-a) \delta(\varphi - \varphi_0) \delta(z - z_0), \quad (4.1)$$

$$\Delta F_1 + \kappa_1^2 F_1 = 0; \quad (4.2)$$

в области 2

$$\Delta A_2 + \kappa_2^2 A_2 = 0, \quad (4.3)$$

$$\Delta F_2 + \kappa_2^2 F_2 = 0. \quad (4.4)$$

Решение этих уравнений с граничными условиями (2.16)–(2.20) можно представить в виде

$$A_1 = \frac{i I_e \ell}{4h} \sum_{n,s=-\infty}^{+\infty} \cos\left(n\pi \frac{z_0}{h}\right) \cos\left(n\pi \frac{z}{h}\right) \cos s(\varphi - \varphi_0) \times \quad (4.5)$$

$$\times \left\{ \begin{array}{l} \left[J_s(\alpha_{1n}) H_s^{(1)}(\alpha_{1n} r), \quad r \geq a \right] \\ \left[J_s(\alpha_{1n} r) H_s^{(1)}(\alpha_{1n}), \quad r \leq a \right] \end{array} \right. + \tilde{R}_{ns}^{(ee)} J_s(\alpha_{1n} r) \left. \right\};$$

$$F_1 = \frac{i I_e \ell}{4h} \zeta_0 \sum_{n,s=-\infty}^{+\infty} \tilde{R}_{ns}^{(em)} J_s(\alpha_{1n} r) \times$$

$$\times \cos\left(n\pi \frac{z_0}{h}\right) \sin\left(n\pi \frac{z}{h}\right) \sin s(\varphi - \varphi_0), \quad (4.6)$$

$$A_2 = \frac{i I_e \ell}{4h} \sum_{n,s=-\infty}^{+\infty} \tilde{T}_{ns}^{(ee)} H_s^{(1)}(\alpha_{2n} r) \times$$

$$\times \cos\left(n\pi \frac{z_0}{h}\right) \cos\left(n\pi \frac{z}{h}\right) \cos s(\varphi - \varphi_0), \quad (4.7)$$

$$F_2 = \frac{i I_e \ell}{4h} \sum_{n,s=-\infty}^{+\infty} \tilde{T}_{ns}^{(em)} H_s^{(1)}(\alpha_{2n} r) \times$$

$$\times \cos\left(n\pi \frac{z_0}{h}\right) \sin\left(n\pi \frac{z}{h}\right) \sin s(\varphi - \varphi_0). \quad (4.8)$$

Здесь $\tilde{R}_{ns}^{(ee)}$ - коэффициент отражения волны электрического типа, возбуждаемой источником внутри диэлектрического стержня, от его поверхности. Коэффициент $\tilde{R}_{ns}^{(em)}$ характеризует трансформацию электрической волны в магнитную при отражении, а $\tilde{T}_{ns}^{(em)}$ - при прохождении через границу, разделяющую области I и 2. Коэффициент $\tilde{T}_{ns}^{(ee)}$ определяет прохождение электрической волны через границу. Используя граничные условия на поверхности цилиндра (2.17)-(2.20), запишем выражения для перечисленных коэффициентов:

$$\tilde{R}_{ns}^{(ee)} = - \frac{\{D_\mu L_\epsilon - s^2 C_n^2\}}{\{D_\mu D_\epsilon - s^2 C_n^2\}} \frac{H_s^{(1)}(\beta_{1n})}{J_s(\beta_{1n})} J_s(\alpha_{1n}), \quad (4.9)$$

$$\tilde{R}_{ns}^{(em)} = -\frac{2\mu_1}{\pi\beta_{1n}^2} \frac{sC_n}{\{D_\mu D_\epsilon - s^2 C_n^2\}} \frac{J_s(\alpha_{1n})}{[J_s(\beta_{1n})]^2}, \quad (4.10)$$

$$\tilde{T}_{ns}^{(ee)} = -i \frac{2\epsilon_2}{\pi\beta_{2n}^2} \frac{D_\mu}{\{D_\mu D_\epsilon - s^2 C_n^2\}} \frac{J_s(\alpha_{1n})}{J_s(\beta_{1n}) H_s^{(1)}(\beta_{2n})}, \quad (4.11)$$

$$\tilde{T}_{ns}^{(em)} = -\frac{2\mu_2}{\pi\beta_{2n}^2} \frac{sC_n}{\{D_\mu D_\epsilon - s^2 C_n^2\}} \frac{J_s(\alpha_{1n})}{J_s(\beta_{1n}) H_s^{(1)}(\beta_{2n})}. \quad (4.12)$$

Здесь в дополнение к (3.29)–(3.32) введено следующее обозначение:

$$L_\epsilon = \frac{\epsilon_1}{\beta_{1n}} \frac{H_s^{(1)}(\beta_{1n})}{H_s^{(1)}(\beta_{1n})} - \frac{\epsilon_2}{\beta_{2n}} \frac{H_s^{(1)}(\beta_{2n})}{H_s^{(1)}(\beta_{2n})}. \quad (4.13)$$

Полученные формулы позволяют записать выражения для вертикальной компоненты напряженности электрического поля в волноводе:

$$E_{2z} = -\frac{I_e \ell}{4\kappa_2 h} \zeta_2 \sum_{n,s \neq 0}^{\pm\infty} \gamma_s \gamma_n \alpha_{2n}^2 \tilde{T}_{ns}^{(ee)} \quad (4.14)$$

$$\cdot H_s^{(1)}(\alpha_{2n} r) \cos\left(n\pi \frac{z_0}{h}\right) \cos\left(n\pi \frac{z}{h}\right) \cos s(\varphi - \varphi_0)$$

и внутри цилиндрической неоднородности:

$$E_{1z} = -\frac{I_e \ell}{4 K_1 h} \zeta_1 \sum_{n,s=0}^{+\infty} \gamma_n \gamma_s \alpha_{1n}^2 \cos\left(n\pi \frac{z_0}{h}\right) \cos\left(n\pi \frac{z}{h}\right) \times \quad (4.15)$$

$$\times \cos S(\varphi - \varphi_0) \left\{ \begin{array}{l} \left[J_s(\alpha_{1n}) H_s^{(1)}(\alpha_{1n} r), r \geq a \right. \\ \left. J_s(\alpha_{1n} r) H_s^{(1)}(\alpha_{1n}), r \leq a \right] + \tilde{R}_{ns}^{(ee)} J_s(\alpha_{1n} r) \end{array} \right\}$$

Если воспользоваться формулами (2.6) и (4.15), то легко получить выражение для мощности излучения электрического диполя, расположенного внутри неоднородности,

$$W_e = \frac{(I_e \ell)^2}{8h} \operatorname{Re} \frac{\zeta_1}{K_1} \sum_{s=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^N \gamma_s \gamma_n \alpha_{1n}^2 \cos^2\left(n\pi \frac{z_0}{h}\right) \times \quad (4.16)$$

$$\times \left[J_s^2(\alpha_{1n}) + \tilde{R}_{ns}^{(ee)} J_s(\alpha_{1n}) \right].$$

В отличие от задач дифракции, рассмотренных в предыдущем разделе, здесь имеется один частный случай, когда все формулы становятся значительно проще. Это случай, когда источник расположен точно на оси цилиндра, т.е. $a = 0$. При этом в формулах (4.5)–(4.8), (4.14)–(4.16) от ряда по S остается только нулевое слагаемое, а трансформация электрических волн в магнитные полностью отсутствует, т.е. $F_1 = F_2 = 0$. Таким образом из (4.14)–(4.16) в этом случае находим, что

$$E_{2z} = -\frac{I_e \ell}{4 K_2 h} \zeta_2 \sum_{n=0}^N \gamma_n \alpha_{2n}^2 \tilde{T}_{n0}^{(ee)} H_0^{(1)}(\alpha_{2n} r) \times \quad (4.17)$$

$$\cos\left(n\pi \frac{z_0}{h}\right) \cos\left(n\pi \frac{z}{h}\right).$$

$$E_{1z} = -\frac{I_e l}{4\kappa_1 h} \zeta_1 \sum_{n=0}^N \gamma_n \alpha_{1n}^2 \left[H_0^{(1)}(\alpha_{1n} r) + \tilde{R}_{no}^{(ee)} J_0(\alpha_{1n} r) \right] \cos\left(n\pi \frac{z_0}{h}\right) \cos\left(n\pi \frac{z}{h}\right), \quad (4.18)$$

где

$$\tilde{T}_{no}^{(ee)} = -i \frac{2\epsilon_2}{\pi \beta_{2n}^2} \frac{1}{D_\epsilon J_0(\beta_{1n}) H_0^{(1)}(\beta_{2n})}, \quad (4.19)$$

$$\tilde{R}_{no}^{(ee)} = -\frac{L_\epsilon}{D_\epsilon} \frac{H_0^{(1)}(\beta_{1n})}{J_0(\beta_{1n})}.$$

Излучаемая мощность в этом частном случае определяется выражением

$$W_e = \frac{(I_e l)^2}{8h} \operatorname{Re} \frac{\zeta_1}{\kappa_1} \sum_{n=0}^{+\infty} \gamma_n \left[1 + \tilde{R}_{no}^{(ee)} \right] \times \quad (4.20)$$

$$\times \alpha_{1n}^2 \cos^2\left(n\pi \frac{z_0}{h}\right).$$

4.2. Возбуждение цилиндра вертикальным магнитным диполем

Если внутри цилиндрической неоднородности размещен вертикальный магнитный диполь, то система уравнений для \vec{E} -компонент век-

торных потенциалов принимает вид

в области I

$$\Delta A_1 + \kappa_1^2 A_1 = 0, \quad (4.21)$$

$$\Delta F_1 + \kappa_1^2 F_1 = -\frac{I_m \ell}{\sqrt{r a}} \delta(r-a) \delta(\varphi - \varphi_0) \delta(z - z_0), \quad (4.22)$$

в области 2

$$\Delta A_2 + \kappa_2^2 A_2 = 0, \quad (4.23)$$

$$\Delta F_2 + \kappa_2^2 F_2 = 0. \quad (4.24)$$

В этом случае вместо (4.5)-(4.8) имеем

$$A_1 = \frac{i I_m \ell}{4h} \sum_{n,s=-\infty}^{+\infty} \tilde{R}_{ns}^{(me)} J_s(\alpha_{1n} r) \sin\left(n\pi \frac{z_0}{h}\right) \times \quad (4.25)$$

$$\cos\left(n\pi \frac{z}{h}\right) \sin s(\varphi - \varphi_0),$$

$$F_1 = \frac{i I_m \ell}{4h} \sum_{n,s=-\infty}^{+\infty} \left\{ \begin{array}{l} \left[J_s(\alpha_{1n} r) H_s^{(1)}(\alpha_{1n} r), r \geq a \right] \\ \left[J_s(\alpha_{1n} r) H_s^{(1)}(\alpha_{1n}), r \leq a \right] \end{array} \right\} + \quad (4.26)$$

$$+ \tilde{R}_{ns}^{(mm)} J_s(\alpha_{1n} r) \left. \right\} \sin\left(n\pi \frac{z_0}{h}\right) \sin\left(n\pi \frac{z}{h}\right) \cos s(\varphi - \varphi_0),$$

$$A_2 = \frac{i I_m \ell}{4h} \sum_{n,s=-\infty}^{+\infty} \tilde{T}_{ns}^{(me)} H_s^{(1)}(\alpha_{2n} r) \sin\left(n\pi \frac{z_0}{h}\right) \cos\left(n\pi \frac{z}{h}\right) \sin s(\varphi - \varphi_0), \quad (4.27)$$

$$F_2 = \frac{i I_m \ell}{4h} \zeta_0 \sum_{n,s=-\infty}^{+\infty} \tilde{T}_{ns}^{(mm)} H_s^{(1)}(\alpha_{2n} r) \sin\left(n\pi \frac{z_0}{h}\right) \times \sin\left(n\pi \frac{z}{h}\right) \cos s(\varphi - \varphi_0). \quad (4.28)$$

Коэффициенты $\tilde{R}_{ns}^{(me)}$, $\tilde{R}_{ns}^{(mm)}$, $\tilde{T}_{ns}^{(me)}$ и $\tilde{T}_{ns}^{(mm)}$ находятся из граничных условий на поверхности цилиндра при $r = b$. Выражения для них можно представить в виде

$$\tilde{R}_{ns}^{(mm)} = - \frac{\{D_\epsilon L_\mu - s^2 C_n^2\}}{\{D_\epsilon D_\mu - s^2 C_n^2\}} \frac{H_s^{(1)}(\beta_{1n})}{J_s(\beta_{1n})} J_s(\alpha_{1n}), \quad (4.29)$$

$$\tilde{R}_{ns}^{(me)} = - \frac{2\epsilon_1}{\pi \beta_{1n}^2} \frac{s C_n}{\{D_\epsilon D_\mu - s^2 C_n^2\}} \frac{J_s(\alpha_{1n})}{[J_s(\beta_{1n})]^2}, \quad (4.30)$$

$$\tilde{T}_{ns}^{(mm)} = - i \frac{2\mu_2}{\pi \beta_{2n}^2} \frac{D_\epsilon}{\{D_\epsilon D_\mu - s^2 C_n^2\}} \frac{J_s(\alpha_{1n})}{J_s(\beta_{1n}) H_s^{(1)}(\beta_{2n})}, \quad (4.31)$$

$$\tilde{T}_{ns}^{(me)} = - \frac{2\epsilon_2}{\pi \beta_{2n}^2} \frac{s C_n}{\{D_\epsilon D_\mu - s^2 C_n^2\}} \frac{J_s(\alpha_{1n})}{J_s(\beta_{1n}) H_s^{(1)}(\beta_{2n})}. \quad (4.32)$$

Здесь использованы обозначения (3.29)–(3.32) и введена величина L_μ , определяемая формулой

$$L_\mu = \frac{\mu_1}{\beta_{1n}} \frac{H_s^{(1)}(\beta_{1n})}{H_s^{(1)}(\beta_{1n})} - \frac{\mu_2}{\mu_{2n}} \frac{H_s^{(1)}(\beta_{2n})}{H_s^{(1)}(\beta_{2n})}. \quad (4.33)$$

Выражение для Z -компоненты вектора напряженности магнитного поля в волноводе имеет вид

$$H_{2z} = -\frac{I_m \ell}{4\kappa_2 h} \left(\frac{\zeta_0}{\zeta_2} \right) \sum_{n,s=-\infty}^{+\infty} \alpha_{2n}^2 \tilde{T}_{ns}^{(mm)} H_s^{(1)}(\alpha_{2n} r) \times \quad (4.34)$$

$$\times \sin\left(n\pi \frac{z_0}{h}\right) \sin\left(n\pi \frac{z}{h}\right) \cos s(\varphi - \varphi_0),$$

внутри неоднородности может быть представлено следующим образом:

$$H_{1z} = -\frac{I_m \ell}{4\kappa_1 h} \left(\frac{\zeta_0}{\zeta_1} \right) \sum_{n,s=-\infty}^{+\infty} \left\{ \begin{array}{l} \left[J_s(\alpha_{1n}) H_s^{(1)}(\alpha_{1n} r), r \geq a \right] \\ \left[J_s(\alpha_{1n} r) H_s^{(1)}(\alpha_{1n}), r \leq a \right] \end{array} \right\} + \quad (4.35)$$

$$+ \tilde{R}_{ns}^{(mm)} J_s(\alpha_{1n} r) \left\} \sin\left(n\pi \frac{z_0}{h}\right) \sin\left(n\pi \frac{z}{h}\right) \cos s(\varphi - \varphi_0).$$

Запишем мощность, излучаемую элементарным вертикальным магнитным диполем, расположенным внутри неоднородности

$$W_m = \frac{(I_m \ell)^2}{8h} \operatorname{Re} \frac{\zeta_0}{\kappa_1 \zeta_1} \sum_{n,s=-\infty}^{+\infty} \left[J_s(\alpha_{1n}) H_s^{(1)}(\alpha_{1n}) + \tilde{R}_{ns}^{(mm)} J_s(\alpha_{1n}) \right] \times \quad (4.36)$$

$$\times \alpha_{1n}^2 \sin^2\left(n\pi \frac{z_0}{h}\right).$$

Здесь вновь большой интерес представляет случай симметричного расположения магнитного диполя на оси цилиндра. При этом

$$H_{2z} = -\frac{I_m \ell}{2\kappa_2 h} \left(\frac{\zeta_0}{\zeta_2} \right) \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_{2n}^2 \tilde{T}_{n0}^{(mm)} \times \quad (4.37)$$

$$\times H_0^{(1)}(\alpha_{2n} r) \sin\left(n\pi \frac{z_0}{h}\right) \sin\left(n\pi \frac{z}{h}\right),$$

$$H_{1z} = -\frac{I_m \ell}{2\kappa_1 h} \left(\frac{\zeta_0}{\zeta_1}\right) \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_{1n}^2 \left[H_0^{(1)}(\alpha_{1n} r) + \tilde{R}_{n0}^{(mm)} J_0(\alpha_{1n} r) \right] \times \\ \times \sin\left(n\pi \frac{z_0}{h}\right) \sin\left(n\pi \frac{z}{h}\right), \quad (4.38)$$

а излучаемая мощность рассчитывается по формуле

$$W_m = \frac{(I_m \ell)^2}{2h} \operatorname{Re} \frac{\zeta_0}{\kappa_1 \zeta_1} \sum_{n=1}^{+\infty} \left[1 + \tilde{R}_{n0}^{(mm)} \right] \alpha_{1n}^2 \sin^2\left(n\pi \frac{z_0}{h}\right). \quad (4.39)$$

Выражения для W_e и W_m просто связаны с сопротивлением излучения R_Σ и проводимостью излучения G_Σ :

$$R_\Sigma = \frac{W_e}{I_e^2}, \quad G_\Sigma = \frac{W_m}{I_m^2}. \quad (4.40)$$

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Используя метод зеркальных отображений для стенок идеального плоского волновода в комбинации с методом разделения переменных, получены точные решения ряда задач о дифракции и возбуждении стоящими волнами неоднородности в форме круглого цилиндра с постоянными значениями ϵ и μ , помещенной в указанный волновод. Эти решения имеют вид двойных сумм по собственным функциям плоского идеального волновода и по азимутальным собственным функциям цилиндра. Получены также выражения для излучаемой мощности, сопротивления и проводимости излучения вертикального электрического диполя и проводимости излучения вертикального магнитного диполя. На основе приведенных здесь

Формул можно анализировать различные частные случаи конкретных задач дифракции и возбуждения в плоском волноводе, а также исследовать решения в приближениях - борновском, рэлеевском и коротковолновом. Однако анализ этих конкретных задач далеко выходит за рамки нашей работы.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах. - М.: Наука, 1973. - 342 с.
2. Wait J.R. Electromagnetic waves in stratified media.-Oxford: Pergamon Press, 1962.- 372 p.
3. Макаров Г.И., Новиков В.В. Распространение электромагнитных волн в импедансных плоском и сферическом волноводах. Ч. I. Построение решения. - В сб.: Проблемы дифракции и распространения волн. Вып.7. - Л.: ЛГУ, 1968. - С.19-33.
4. Альперт Я.Л., Гусева Э.Г., Флигель Д.С. Распространение электромагнитных низкочастотных волн в волноводе Земля - ионосфера. - М.: Наука, 1967. - 124 с.
5. Бедлястин Н.С., Докучаев В.П., Поляков С.В., Тамойкин В. В. Возбуждение волновода Земля - ионосфера ионосферными источниками низкочастотного диапазона//Изв.вузов. - Радиопизика. - 1975. - Т.18, № 9. - С.1323-1332.
6. Швингер Ю. Неоднородности в волноводе//Зарубежная электроника. - М.: Сов.радио, 1970. - № 3. - 110 с.
7. Лезин Л. Теория волноводов. - М.: Радио и связь, 1981.- 311с.
8. Басс Ф.Г., Фукс И.М. Рассеяние волн на статистически неровной поверхности. - М.: Наука, 1972. - 424 с.
9. Wait J.R. EM scattering from vertical column of ionisation in the Earth-ionosphere waveguide.// IEEE Trans.on Antennas and Propagation.- 1991.- V.39, N.7.- P. 1051-1054.
10. Докучаев В.П. Дифракция на цилиндре электромагнитных нормальных волн в плоском волноводе. Труды III семинара "Распространение и дифракция волн в неоднородных средах". - М.: Изд-во НТОРЭС им.А.С.Попова, 1992. - С.55.
11. Вайнштейн Л.Б. Электромагнитные волны. - М.: Радио и связь, 1988. - 440 с.

12. Гинзбург В.Л. Теоретическая физика и астрофизика. - М.: Наука, 1975. - 415 с.
13. Хенл Х., Мауэ А., Вестфаль К. Теория дифракции. - М.: Мир, 1964. - 428 с.
14. Ваганов Р.Б., Каценеленбаум Б.З. Основы теории дифракции. - М.: Наука, 1982. - 272 с.
15. Марков Г.Т., Чаплин А.Ф. Возбуждение электромагнитных волн. - М.: Радио и связь, 1983. - 295 с.
16. Уэйт Д. Электромагнитное излучение из цилиндрических систем. - М.: Сов.радио, 1963. - 239 с.
17. Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике. - М.: Наука, 1976. - 280 с.
18. Справочник по специальным функциям/Под ред.Абрамовица М. и И.Стигана. - М.: Наука, 1979. - 832 с.
19. Франк Ф., Мизес Р. Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. - Л.-М.: Изд-во общетехн. литературы, 1937. - 697 с.
20. Никольский В.В., Никольская Т.И. Электродинамика и распространение радиоволн. - М.: Наука, 1989. - 543 с.
21. Дочучаев В.П., Можухин С.Б. Возбуждение и дифракция на металлическом цилиндре электромагнитных волн внутри плоского волновода//Изв.вузов. - Радиофизика (в печати).

Дата поступления статьи
5 апреля 1993 г.