

**Нижегородский научно-исследовательский радиофизический институт  
Министерства науки, высшей школы и технической политики  
Российской Федерации**

**Н. С. Беллюстин**

**О динамике структур в искусственных нейронных  
сетях с латеральной конкуренцией элементов**

**Препринт № 363**

**Нижний Новгород 1993**

---

Подписано в печать 16.04.93 г. Формат 60 x 84/16.  
Бумага писчая. Печать офсетная. Объем 1,35 усл.п.л.  
Заказ 5327. Тираж 100.

---

Отпечатано на ротационте НИРФИ

## Введение

Многие задачи распознавания образов и обработки потоков информации могут быть выполнены за приемлемое время только на системах параллельной архитектуры. Так для первичного преобразования изображений в глазу млекопитающих. Природа использует параллельную обработку на нейронной сети сетчатки из миллионов элементов. В последнее время некоторые принципы обработки информации в нервной системе живых организмов пытаются реализовать в технических устройствах с помощью теории искусственных нейронных сетей [1]. Коннекционистское направление этой теории рассматривает искусственный нейрон как простой сумматор взвешенных входных сигналов с последующим нелинейным пороговым преобразованием. Из теории следует, что несколько таких нейронных слоев могут решать самые сложные задачи. Странники такого подхода исходят из того, что при соответствующем выборе весовых коэффициентов все многообразие происходящих в мире явлений можно эффективно моделировать на сетях из простейших нейроподобных элементов. В сети, обучающейся без учителя, искусственные нейроны должны иметь конкурентные (тормозные) взаимоотношения между собой. Такое латеральное торможение используется в известных нейросетевых парадигмах - сети Кохонена [2], сети встречного распространения Хехт - Нильсена [3], адаптивной резонансной теории Гроссберга [4,5], когнитроне и неокогнитроне Фукушимы [6,7]. Последняя модель ориентирована на обработку визуальных изображений - она наиболее полно воплощает физиологические данные по системе глаз-мозг млекопитающих и использует метрическое расстояние между элементами плоского нейронного слоя для описания латеральной конкуренции.

В настоящей работе исследуется функционирование нейронной сети в режиме с обратной связью, когда сигнал с выхода рекурсивно подается на его вход. При этом рассматривается динамика структур возбуждения в режиме распознавания, когда связи между нейронными элементами остаются постоянными. Для изучения процессов в больших однородных сетях используется предложенное в [8] приближение непрерывной нейроподобной среды, описываемой интегродифференциальным уравнением; такие сети могут быть реализованы, например, на молекулярном уровне [9]. Особое внимание в работе уделено геометродинамике, когда эволюция областей возбуждения однозначно определяется их геометрической формой. В рамках такого подхода исследуются и сравниваются два различных варианта организации латеральной конкуренции - за счет отрицательных связей и за счет убывающего отклика нелинейного элемента.

# 1. Замечания о динамике точечной системы

Пусть зависимость  $u(t)$  задается уравнением

$$u(t) = \int_0^{\infty} F_0[u(t')] \exp(-\rho(t-t')) dt' + u(0) \quad (1.1)$$

Ее можно рассматривать как развивающийся во времени  $t$  динамический процесс, подчиняющийся дифференциальному уравнению

$$\frac{du(t)}{dt} = -\rho u + F_0[u] = F[u] \quad (1.2)$$

Засчет выбора временного масштаба здесь и далее удобно положить  $\rho=1$ . Поведение  $u(t)$  достаточно просто - переменная  $u$  релаксационно приближается к ближайшей из точек устойчивого равновесия  $u_0$ , в которой  $F[u_0]=0$  и  $F'[u_0]<0$ . Вычисление значений  $u$  по заданному начальному условию  $u(0)$  на счетном множестве значений аргумента можно осуществить рекурсивным алгоритмом

$$u(t+h) = F_1[u(t), h] \quad (1.3)$$

где для определения функции  $F_1[u, h]$  имеется точное выражение

$$\int_u^{F_1[u, h]} \frac{du'}{F[u']} = h \quad (1.4)$$

и приближенное, справедливое при малых  $h$

$$F_1[u] \approx u + h F[u] \quad (1.5)$$

Эйлеровская схема интегрирования с постоянным шагом по времени (1.5), привлекает своей простотой, а использование более изощренных методов интегрирования аналитических функции не снимает принципиальной проблемы невычислимости любой функции  $u(t)$  на континуальном множестве значений аргумента вследствие неравномерности счетного и несчетного бесконечных множеств. При этом вряд ли имеет смысл считать континуальные приближения, основанные на использовании понятия бесконечно-малых, более точными, чем вычислительные процедуры. Скорее их надо рассматривать как некие приближения для реальных вычислительных процессов. Введем связанные с  $F[u]$  вспомогательные функции, полезные для качественных рассуждений. Пусть

$$f(u) = \int^u F[u'] du' \quad (1.6)$$

нижний предел интегрирования здесь будем выбирать так, что  $f(u)=0$  в рассматриваемой области изменения  $u$ . Рассмотрим функцию

$$L(u) = f^2(u) + C \quad (1.7)$$

где  $C$  - произвольная константа. Дифференцируя по времени, получим

$$\frac{dL}{dt} = -2f(u)F[u] \frac{du}{dt} = -2f(u)(F[u])^2 \leq 0 \quad (1.8)$$

Таким образом, в процессе эволюции системы согласно (1.2) величина  $L(u)$  убывает или остается постоянной. Если функция  $L(u)$  еще и ограничена снизу в рассматриваемой области изменений  $L(u)$ , она гарантирует определенную устойчивость динамической системы и иногда называется функцией Ляпунова. Динамику системы удобно наглядно интерпретировать как абсолютно вязкое скатывание шарика в потенциале  $L(u)$ .

Другая полезная функция

$$M(u) = \int_0^u \frac{du'}{F[u']} \quad (1.9)$$

тесно связана с рекурсивной процедурой (1.2) - функция точечного преобразования  $F_1[u, h]$  просто выражается через  $M(u)$

$$F_1[u, h] = M^{-1}(M(u) + h) \quad (1.10)$$

Зависимости  $L(u)$  и  $M(u)$  могут быть качественно построены по графику  $F[u]$ . Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1.

$$F[u] = \begin{cases} -1|u - u_0| + b & u > u_0, u < u_0 \\ 0 & u = u_0 \end{cases} \quad (1.11)$$

где  $|x|$  есть единичная функция Хевисайда,  $b$  - произвольная постоянная. На рис. 1а показан

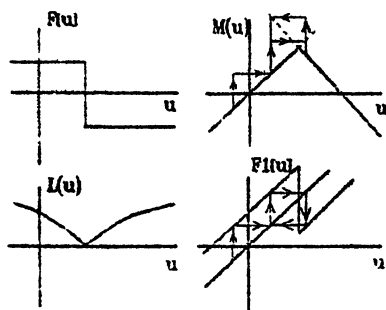


РИС. 1

график  $F[u]$  при  $b = \frac{1}{2}$ , когда точка  $u = u_0$  является точкой устойчивого равновесия уравнения (1.2). На рис. 1б показан профиль  $L(u)$  - ямка с изломом в нижней точке, по стенке которой скатывается изображающий шарик. Из рисунка 1г видно, что подводя к точке  $u = u_0$ , рекурсивный алгоритм (1.2) - (1.10) должен остановиться, поскольку в уравнении (1.8) аргумент функции  $M^{-1}$  не попадает в область ее определения. Системе с непрерывным временем соответствует присвоение значения  $F_1[u, h] = 0$  в такой ситуации, после чего результат  $u = u_0$  будет повторяться на каж-

дом рекурсивном временном шаге. Алгоритм (1.5) использует различные аналитические экстраполяции функции  $M(u)$  для определения "левых" и "правых" рекурсий в окрестности  $u = u_0$ , см. рис. 1г и 1д, поэтому при  $b = \frac{1}{2}$  получится периодическое поведение системы с периодом в две итерации - удвоение периода - которое качественно отличается от того, что может быть описано системой с непрерывным временем. При рациональных значениях  $b = \frac{m}{n}$  ( $n$  и  $m$  - целые) система будет совершать периодические движения с периодом в  $n$  шагов, а при иррациональном  $b$  реализуется аperiodическое всевозможное хаотическое движение. Уменьшение шага  $h$  только уменьшает масштаб соответствующего поведения решения, не устраняя самих режимов. Хаотическое движение принципиально отличается от случайного тем, что алгоритмическая колмогоровская сложность [10] такого движения мала, т.к. существует короткий алгоритм его генерации. Такой алгоритм невычислим по генерируемой им последовательности, его нахождение представляет собой творческий акт, успех которого всегда открывает новые возможности описания внешне сложных природных явлений простыми алгоритмами. Рассмотренный пример 1 показывает, что наличие "функции Ляпунова" в системе с дискретным временем отнюдь не обеспечивает такого же абсолютного характера устойчивости, как в системе с непрерывным временем - после того как шарик скатывается в ямку, возникают периодические или хаотические колебания. В рассмотренном случае это обусловлено разрывом функции  $F[u]$ , в результате которого профиль  $L(u)$  имеет излом в нижней точке, которая могла бы стать точкой устойчивого равновесия системы. Рассмотрим теперь другой пример с аналитической функцией  $F[u]$ .

Пример 2.

$$F[u] = -mu \quad (1.12)$$

Нетрудно построить графики сопряженных с  $F[u]$  функций для этого случая и убедиться, что функция  $L(u)$  будет иметь гладкий профиль в точке минимума  $u = u_0$ , а уравнение (1.10) разрешимо всегда. Проверка устойчивости схемы с дискретным временем должна проводиться при каждом конкретном  $h$  по виду функции  $F[u, h]$ . Из рис. 2 видно, что в зависимости от величины производной  $\frac{\partial F_1[u, h]}{\partial u}$  возможны четыре варианта:

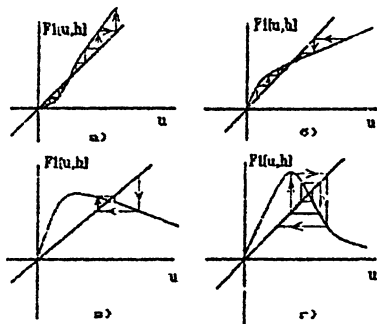


рис. 2

а)  $\frac{\partial F_1[u, h]}{\partial u} > 1$  - неустойчивый узел

б)  $0 < \frac{\partial F_1[u, h]}{\partial u} < 1$  - устойчивый узел

$$(1.13)$$

в)  $-1 < \frac{\partial F_1[u, h]}{\partial u} < 0$  - устойчивый фокус

г)  $\frac{\partial F_1[u, h]}{\partial u} < -1$  - неустойчивый фокус.

Отметим, что само по себе условие убывающего отклика нелинейного элемента в равновесной точке  $\frac{\partial F[u, h]}{\partial u} \leq 0$  (это

условие в экономике принято называть законом убывающей отдачи [11]) еще не является достаточным условием для неустойчивости этого равновесия и организации хаотического поведения. Необходимо также, чтобы абсолютная величина производной в этой точке была достаточно велика

Поскольку в рассматриваемом примере  $F_1[u, h] = (1 - mh)$  и  $u(t+h) = u(t)(1 - mh)$ , при  $mh < 1$  сохраняется устойчивость точки  $u = u_0$  типа устойчивый узел, при  $1 < mh < 2$  устойчивость этой точки сохраняется но принимает колебательный характер типа устойчивый фокус, а при  $mh > 2$  наступает неустойчивость, которая может привести к псевдослучайному динамическому поведению системы. Таким образом в случае гладкого дна у функции  $L(u)$  характер поведения на две ямы регулируется величиной шага  $h$ .

Для нейросетевых приложений важны бистабильные системы, имеющие два устойчивых состояния равновесия (которые удобно отождествлять с 0 и 1) и одно неустойчивое положение равновесия между ними. Особый интерес представляет случай, когда нелинейная функция  $F_0[u]$  может принимать только два возможных значения 0 и 1. При этом можно ввести сопряженную с  $u$  бинарную переменную  $out(t) = F_0[u]$ , эволюция которой в непрерывном времени будет описываемой интегральным уравнением.

$$out(t) = F_0 \left[ \int^t out(t') \exp(t' - t) dt' \right] \quad (1.14)$$

Такая запись представляется естественной для нейросетевой интерпретации - нейрорподобный элемент суммирует уровни своей активации в предыдущие моменты времени с некоторыми весами, определяемыми функцией забывания, в данном случае имеющей экспоненциальный вид  $\varphi(t) = -t$ , а затем выдает бинарный выходной сигнал  $out(t)$  после пороговой обработки этой суммы с помощью нелинейной функции  $F_0[u]$ . При этом возможны две качественно различные ситуации.

Пример 3:

$$F_0[u] = 1[u - T]; \quad F[u] = -u + 1[u - T] \quad (1.15)$$

Соответствующие графики сопряженных с  $F[u]$  функций  $L(u)$  и  $M(u)$  показаны на рис. 3 при  $0 < T < 1$ . Несмотря на то, что функция  $F[u]$  имеет разрыв, в данном примере это не приводит к взлому  $L(u)$  на две ямки, и при малых  $h$  устойчивость поведения решения будет обеспечена. Вид функции  $F_1[u, h] = u(1 - h) + 1[u - T]$  зависит от  $h$ , при  $h = 1$

$$F_1[u, 1] = F_0[u] = 1[u - T] \quad (1.16)$$

Она принимает только два значения 0 или 1, таким образом в этом случае переменная  $u$  в дискретном времени является бинарной. По описанным выше критериям система устойчива в этом случае при любых значениях шага  $h$ , в том числе при  $h = 1$ .

Пример 4:

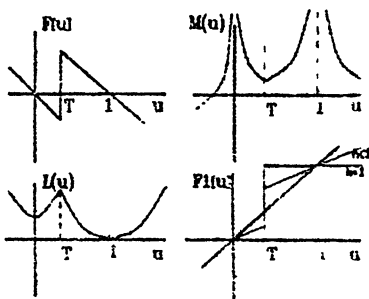


Рис. 3

$$F_0[u] = 1[u - T_0] - 1[u - T_1]; F[u] = -u + 1[u - T_0] - 1[u - T_1]; 0 < T_0 < T_1 < 1 \quad (1.17)$$

Графики  $F[u]$  и сопряженных с ней функций показаны на рис. 4. Видно, что при этих условиях в профиле функции  $L(u)$  появляется излом на дне второй ямки, который неизбежно будет приводить к хаотизации решения, попавшего в ее зону притяжения, причем такое поведение не исчезает при уменьшении  $h$ . При  $h=1$  получим простой рекурсивный алгоритм описания бинарной переменной

$$F_1[u] = 1[u - T_0] - 1[u - T_1] \quad (1.18)$$

По критерию (1.13) точка равновесия  $u = T_1$  при  $0 < T_1 < 1$  всегда неустойчива и алгоритм будет работать как ждущий генератор импульсов бинарной переменной. Таким образом при  $h=1$  примеры 3 и 4 будут генерировать дискретную бинарную переменную, однако

существенная разница между ними заключается в том, что в примере 3 она будет иметь отношение к переменной  $out(t)$  на непрерывном времени, а в примере 4 нет.

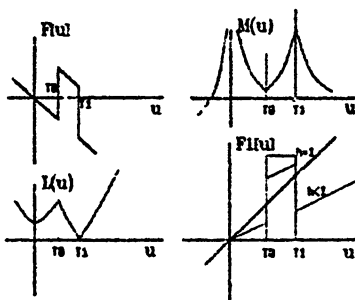


рис. 4



## 2. Общие свойства распределенной нейроподобной среды

Идея приближенного описания искусственных нейронных сетей непрерывными нейроподобными средами предложена в работе [8], такой подход тесно связан с активными средами с диффузионной связью, (см. [12-14]). В качестве базового уравнения для однослойной нейроподобной среды будем рассматривать интегродифференциальное уравнение

$$u(\vec{r}, t) = \int \int F_0[u(\vec{r}', t')] \Phi(\vec{r}, \vec{r}') \exp(t' - t) d\vec{r}' dt' \quad (2.1)$$

Здесь  $\vec{r}$  - вектор в  $n$ -мерном пространстве,  $\Phi(\vec{r}, \vec{r}') = \Phi(\vec{r} - \vec{r}')$  функция связи нейроподобных элементов, когда она зависит только от разности своих переменных это свидетельствует об однородности среды. Интеграл по пространству  $\vec{r}'$  подразумевается  $n$ -кратный. По терминологии теории искусственных нейронных сетей переменная  $u(\vec{r}, t)$  соответствует переменной "net" нейронной сети, для переменной  $out = F[u]$  тоже можно написать замкнутое уравнение

$$out(\vec{r}, t) = \int \int out(\vec{r}', t') \Phi(\vec{r} - \vec{r}') \exp(t' - t) d\vec{r}' dt' \quad (2.2)$$

Нейросетевая интерпретация (2.2) заключается в том, что каждый элементарный "нейрон", находящийся в элементарном объеме от  $\vec{r}$  до  $\vec{r} + d\vec{r}$  нейронного пространства, суммирует входные сигналы от соседних нейронов с весами  $\Phi(\vec{r} - \vec{r}')$ , зависящими от взаимного положения между ними, взвешенно суммирует также свои положения в прошлом с весовой функцией памяти  $\exp(-t)$  и осуществляет пороговое нелинейное преобразование  $F_0$ . Уравнение (2.1) соответствует обратному порядку этих операций, однако поскольку исследуются динамические режимы в нейронных сетях с обратной связью, в которых сигнал с выхода каждый раз снова подается на вход, описания (2.1) и (2.2) математически эквивалентны до тех пор, пока в рассматриваемых областях изменения величин  $u$  и  $out$  функция  $F_0^{-1}[out]$  существует и однозначна. Когда это не так рассмотрение уравнения (2.1) для переменной  $u$  оказывается более информативным. В настоящем исследовании  $\Phi(\vec{r} - \vec{r}')$  считается постоянной, т.е. процесс обучения нейронной сети не рассматривается. Поскольку функция пространственной связи симметрична

$$\Phi(\vec{r} - \vec{r}') = \Phi(\vec{r}' - \vec{r}) \quad (2.3)$$

уравнение (2.1) описывает динамический процесс распознавания в однородной сети Хопфилда. При этом сеть считается неполностью связанной - пределы пространственного интегрирования в (2.1) ограничиваются пространственным размером функции связи, который много меньше размера всей сети. В таком случае принято говорить о сети с близкими нелокальными связями [15].

Перепишем уравнение (2.1) в дифференциальной форме

$$\frac{du(\vec{r}, t)}{dt} = -u(\vec{r}, t) + \int F_0[u(\vec{r}', t')] \Phi(\vec{r} - \vec{r}') d\vec{r}' \quad (2.4)$$

и рассмотрим функционал Ляпунова [16]

$$L = \int G(u(\vec{r}, t)) d\vec{r} - \frac{1}{2} \int \int F_0[u(\vec{r}, t)] F_0[u(\vec{r}', t)] \Phi(\vec{r} - \vec{r}') d\vec{r}' d\vec{r} \quad (2.5)$$

где  $G[u] = \int u F_0'(u) u' du$ ,

$$F_0' = \frac{dF_0[u]}{du}$$

Дифференцируя (2.5) по времени, получим

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} = & \int G' [u(\vec{r}, t)] \frac{du(\vec{r}, t)}{dt} d\vec{r} - \frac{1}{2} \iint F_0' [u(\vec{r}, t)] F_0 [u(\vec{r}', t)] \frac{du(\vec{r}, t)}{dt} \Phi(\vec{r} - \vec{r}') d\vec{r} d\vec{r}' - \\ & - \frac{1}{2} \iint F_0 [u(\vec{r}, t)] F_0' [u(\vec{r}', t)] \frac{du(\vec{r}, t)}{dt} \Phi(\vec{r} - \vec{r}') d\vec{r} d\vec{r}' \end{aligned}$$

При использовании условия взаимности связей (2.3) его можно преобразовать к более компактной форме

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} = & - \int F_0 [u(\vec{r}, t)] \frac{du(\vec{r}, t)}{dt} [ - u(\vec{r}, t) + \int F_0 [u(\vec{r}, t)] \Phi(\vec{r} - \vec{r}') d\vec{r}' ] d\vec{r} = \\ = & - \int \frac{du(\vec{r}, t)}{dt} [ F_0' [u(\vec{r}, t)] ]^2 d\vec{r} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Если  $F_0 [u]$  такова, что

$$\frac{dF [u]}{du} \geq 0 \quad (2.7)$$

всюду, то в процессе эволюции изображения согласно (2.1)  $\frac{dL}{dt} \leq 0$ . Существование монотонно убывающего функционала ограничивает степень непредсказуемости поведения нейронной среды, при этом решение (2.4) при  $t \rightarrow \infty$  скатывается к одному из стационарных изображений и перестает эволюционировать. К какому именно, если их несколько, это определяется начальными условиями. Полученный результат не зависит от размерности пространства  $\vec{r}$ , но в многомерном случае стремление к стационару отнюдь не гарантирует скучного развития событий - прежде чем достичь равновесное состояние система может проходить через достаточно сложные динамические режимы вынуждения нейронной среды. Отметим, что устойчивость ляпуновского типа обеспечивается симметрией функций пространственной связи  $\Phi(\vec{r} - \vec{r}')$  и монотонностью нелинейной функции  $F_0 [u]$ , т.е. есть два пути, чтобы избежать стационарной динамики при  $t \rightarrow \infty$

- 1) нарушение условия  $\frac{dF_0 [u]}{du} \geq 0$  - убывающая отдача
- 2) нарушение условия  $\Phi(\vec{r} - \vec{r}') = \Phi(\vec{r}' - \vec{r})$  - не взаимность.

Для практических задач обработки визуальных изображений наибольший интерес представляют двумерные нейронные среды, такое значение размерности является промежуточным в том отношении, что существование функционала Ляпунова хотя и не означает монотонного релаксационного скатывания с стационарному изображению, весьма существенно ограничивает непредсказуемость поведения динамических структур. Рассмотрим подробнее два варианта пространственной латеральной конкуренции, основывающиеся на физиологических данных по обработке визуальной информации в системе глаз-мозг млекопитающих [17] - варианты нелинейной функции  $F_0 [u]$  и функции пространственной связи  $\Phi(\vec{r} - \vec{r}')$  показаны на рис. 5. Изображенная на рис. 5а колоколообразная функция связи соответствует тому, что возбужденный нейрон старается поддержать или возбудить соседей в области своего пространственного влияния, качественно это соответствует диффузионной связи между элементами. Это позволяет опираться на фундаментальные результаты, известные для диффузионных сред [13] и рассматривать их как

частный случай сред, описываемых интегродифференциальным уравнением (2.1). Функция пространственной связи  $\Phi(\vec{r} - \vec{r}')$ , качественно изображенная на рис. 5б, соответствует тому, что каждый возбужденный элемент старается поддержать или возбудить своих ближайших соседей и подавить возбуждение более далеких элементов в своей сфере влияния, т.е. реализует латеральную конкуренцию за счет отрицательных коэффициентов связей между нейронными элементами. Такой принцип является универсальным в биологических и социальных системах - каждому человеку знакомо желание поддержать близких и подавить более далеких конкурентов. На рис. 5в показана обычная однопороговая нелинейная функция

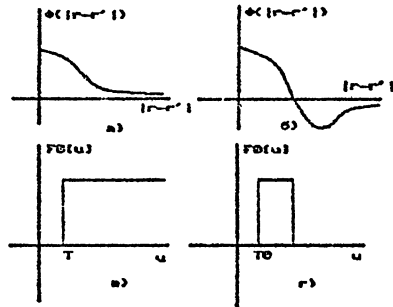


рис. 5

$$F_0[u] = 1[u - T] \quad (2.8)$$

на рис. 5г - двухпороговая функция

$$F_0[u] = 1[u - T_0] - 1[u - T_1] \quad (2.9)$$

Обе они соответствуют бинарной переменной  $out(\vec{r}, t)$  (2.2), но принципиальная разница между ними обсуждалась в разделе 1. Функция (2.9) осуществляет специфическую латеральную конкуренцию - за счет убывающей отдачи, т.е. спадания  $F[u]$  при больших значениях аргумента. Сочетания нелинейной функции (2.8) с колоколообразной функции связи  $\Phi(\vec{r} - \vec{r}')$  - рис. 5а, можно рассматривать как нулевой базовый вариант с тем, чтобы более сложные ситуации рассматривать как различные варианты его усложнения.

Существенно, что использование приближения бинарной переменной в сочетании с непрерывностью нейронного пространства позволяет формировать эффективный язык качественных геометрических рассуждений на плоскости нейронной сети, поскольку задача вычисления временной производной для функции  $u(\vec{r}, t)$  сводится к интегрированию функции пространственной связи  $\Phi(\vec{r} - \vec{r}')$  внутри тех пространственных областей, где бинарная переменная  $out(\vec{r} - \vec{r}')$  равна единице. Когда динамика структур происходит медленно, переменную  $u(\vec{r}, t)$  можно приближенно считать бинарной и совпадающей с переменной  $out(\vec{r}, t)$ . Тогда поведение возбуждения в сети сводится к самосогласованному описанию бинарных черно-белых изображений или разграничивающих их контуров переклечения, эволюция которых во времени полностью определяется их геометрической формой. Простейший вариант самосогласованной геометродинамики линий, когда скорость их определяется кривизной в данной точке, был предложен в работе [18], более ранним примером геометродинамического описания природных процессов является теория гравитации Эйнштейна [19]. В случае двумерной нейронной среды геометризация рассуждений на плоскости позволяет делать несложные аналитические оценки и качественно классифицировать возможные режимы динамики структур в различных областях пространства параметров [20]. Отметим, что в случае одномерного нейронного пространства вопрос об использовании бинарных переменных поднимался в работе [21].

В настоящей работе этот подход будет развит дальше и использован для сравнительного анализа двух типов латеральной конкуренции, упомянутых выше. Будут рассмотрены отдельно роль отрицательных связей

$$\Phi(\vec{r} - \vec{r}') = (1 - b(\vec{r} - \vec{r}')^2) \exp(-a(\vec{r} - \vec{r}')^2) \quad F[u] = 1[u - T]$$

в разделе 3 и роль убывающего отклика нейрона

$$\Phi(\vec{r} - \vec{r}') = \exp(-a(\vec{r} - \vec{r}')^2) \quad , \quad F[u] = 1[u - T_0] - 1[u - T_1]$$

в разделе 4. При этом речь идет об исследовании изменений формы объектов в процессе динамики нейронной среды и поиске режимов, осуществляющих оконтуривание изображений, скелетизацию, выделение участков с большой кривизной, изломов линий и других узловых элементов изображения. Как следует ожидать из приведенных выше общих соображений, конкуренция засчет отрицательных коэффициентов связи должна быть более предпочтительна в отношении устойчивости процесса обработки изображений, поскольку каждый представленный (начальный) образ сваливается в свою ямку в сети Хопфилда в процессе динамического распознавания. С другой стороны, конкуренция типа убывающего отклика может оказаться более предпочтительной для сохранения мелких деталей фрагментов, т.к. она не навязывает стандартной формы выделенным деталям рисунка. Аналитические оценки и разбиение пространства параметров нейронной среды на области с качественно различной эволюцией структур дополняется численными расчетами модели нейронной сети на ЭВМ. Если временной шаг интегрирования  $h$  уравнения (2.4) равен единице, то анализируются как возможные средства обработки изображений нейронные сети из наиболее простых бинарных элементов. Чтобы получаемые результаты численных расчетов имели отношение к уравнению с непрерывным временем (2.4) необходимо, чтобы на одном рекурсивном шаге не происходило качественного изменения геометрической формы объектов.

### 3. Латеральная конкуренция засчет отрицательных связей

В качестве удобного примера двумерной функции связи, обеспечивающей латеральную конкуренцию возьмем двухпараметрическое аналитическое выражение

$$\Phi(\vec{r} - \vec{r}') = (1 - b(\vec{r} - \vec{r}')^2) \exp(-a(\vec{r} - \vec{r}')^2) \quad (3.1)$$

Пространственный размер функции связи определяется в основном параметром  $a$ , величина параметра  $b$  определяет силу латеральной конкуренции. Функция  $\Phi(\vec{r} - \vec{r}')$  имеет кольцеобразный пространственный спектр, и пространственная фильтрация в этом случае характеризуется подавлением как высоких пространственных частот, так и низких. При  $b=0$  (3.1) соответствует колоколообразной функции связи элементов, рис. 5а, достаточно сильная латеральная конкуренция, показанная на рис. 5б приводит к ряду качественно новых эффектов. Нелинейная функция  $F_0[u]$  предполагается однопороговой, см. рис. 5в и формулу (1.15). В качестве независимых параметров непрерывной нейроподобной среды удобно рассматривать безразмерные величины  $\frac{b}{a}$  и  $\frac{aT}{\pi}$

Учитывая, что интеграл от функции связи  $\Phi(\vec{r} - \vec{r}')$  (3.1) по всему пространству равен  $\frac{\pi(a-b)}{a^2}$ , можно получить условие существования возбужденных областей, существенно превышающих по размерам ширину функции связи

$$1 - \frac{b}{a} > \frac{aT}{\pi} \quad (3.2)$$

При нарушении этого условия будет происходить исчезновение сплошных областей возбуждения с оконтуриванием изображений или выделением узловых элементов рисунка. Из того, что интеграл по полупространству равен  $\frac{\pi(a-b)}{2a^2}$ , можно получить условие продвижения вперед плоского фронта возбуждения

$$1 - \frac{a}{b} > \frac{aT}{\pi} \quad (3.3)$$

которое соответствует разрастанию области возбуждения нейронной среды и генерации в процессе этого изображений, как-то связанных с исходным. Неравенство, обратное к (3.3) соответствует режимам, когда область возбуждения в активной среде так или иначе уменьшается. Теперь рассмотрим вопрос об устойчивости плоской границы между возбужденной и невозбужденной областями - пусть имеется малое синусоидальное возмущение формы плоской границы с пространственной частотой  $k$  и малой амплитудой. Амплитуда будет нарастать, если производная по времени  $\frac{du(\vec{r}, t)}{dt}$  в выпуклой точке фронта будет больше этой производной в вогнутых точках фронта. Разность этих скоростей пропорциональна амплитуде гармоники пространственного спектра от одномерного среза функции пространственной связи  $\Phi(\vec{r} - \vec{r}')$

$$\Lambda(k) = \int_{-\infty}^{\infty} (1 - by^2) \exp(-ay^2) \cos(ky) dy$$

Здесь  $y$  - координата вдоль линии фронта. После несложных преобразований условие неустойчивости плоской границы  $\Lambda(k) > 0$  может быть записано в виде

$$\frac{b}{a} > \frac{2(1 - \exp(-z))}{1 - (1 - 2z)\exp(-z)} \quad (3.4)$$

$$\text{где } z = \frac{k^2}{4a}$$

Этот достаточно простой результат относится как к фронту переброса, так и к линии конечной ширины. Выражение в правой части неравенства (3.4) представляет собой монотонно возрастающую функцию  $z$ , равную  $2/3$  при  $z=0$  и стремящуюся к 2 при  $z \rightarrow \infty$ . Поэтому по отношению к очень пологим возмущениям ( $k \rightarrow 0$ ) латеральная конкуренция приводит к неустойчивости, если

$$\frac{b}{a} > \frac{2}{3} \quad (3.5)$$

а по отношению к мелкомасштабным пространственным возмущениям ( $k \rightarrow \infty$ ) она разваливает плоскую границу при

$$\frac{b}{a} > 2 \quad (3.6)$$

Отсюда, в частности, следует, что при  $b > 2a$  любые линии должны распадаться.

Приведенные соотношения позволяют сделать базовое разбиение плоскости параметров данной нейронной сети ( $\frac{b}{a}, \frac{dT}{\pi}$ ) на восемь областей с различными режимами функционирования, см. рис. 6. Разумеется, характер динамических структур качественно зависит не только от параметров среды, но и от начального возбуждения.

В качестве примера того, что из соотношений (3.2) - (3.6) можно делать практически полезные оценки и выводы для работы с нейросетью, можно рассмотреть вопрос о стабилизации фронта переключения изменением значения порога  $T$ . Из условия (6) видно, что остановить плоский фронт можно как увеличением порога  $T$ , так и усилением латерального торможения - увеличением  $b$ . То, что первый вариант соответствует созданию более устойчивого фронта проще всего увидеть из того, что при достаточно высоком пороге

$$T > \frac{\pi}{6a} \quad (3.7)$$

неподвижный плоский фронт, соответствующий равенству в (6), будет вообще устойчивым по отношению к возмущениям с любыми пространственными частотами. Можно сделать также вывод о характерной ширине линий и зазоров между протяженными областями возбуждения стационарной картины, к которой эволюционирует систе-

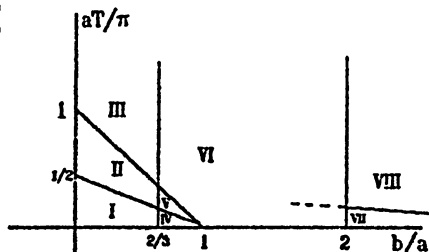


РИС. 6

ма. Используя то, что интеграл от функции связи (2.8) вдоль узкой бесконечно длинной полосы ширины  $L$  ( $L \ll \sqrt{a}$ ,  $L \ll \sqrt{b}$ ) равен  $L \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}} (1 - \frac{b}{a})$ , получим

$$L = \frac{2\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}} \frac{1 - \frac{b}{a} - \frac{aT}{\pi}}{1 - \frac{b}{2a}} \quad (3.8)$$

При  $b > 2a$  все линии исчезают, будет происходить выделение концов линий и мелких изолированных фрагментов.

В области сильной латеральной конкуренции

$$\frac{b}{a} \gg 1 \quad (3.9)$$

можно получить также аналитическое выражение для радиуса малой стационарной области и для критического значения порога  $T$ , при котором такая область исчезает. Из условия стационарности получаем

$$out(\vec{r}) = 1 [ \iint out(\vec{r}') \Phi(\vec{r} - \vec{r}') d\vec{r}' - T ] \quad (3.10)$$

В отличие от формул предыдущего раздела здесь двукратность интеграла отражает двумерность пространственного вектора  $r$ . Из (3.10) видно, что на границе рассматриваемой круглой области должно быть выполнено условие

$$I = \int_S \int \Phi(\vec{r}') d\vec{r}' = T \quad (3.11)$$

где площадь  $S$  ограничена требованием  $x^2 + (y - R)^2 \leq R^2$ . Если  $aR^2 \ll 1$  можно использовать приближенное выражение  $\Phi(\vec{r}) = 1 - br^2$ . Тогда интегрируя (3.11) находим

$$I = \pi R^2 - \frac{3}{2} b R^4 \quad (3.12)$$

Отсюда получим два значения радиуса при достаточно низком значении порога  $T$

$$R = \frac{1}{\sqrt{3b}} \pm \left[ \frac{1}{9b^2} - \frac{2T}{3\pi b} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.13)$$

Меньшее значение (3.13) соответствует неустойчивому состоянию равновесия, области размером меньше этого полностью исчезают, а большее значение  $R$  (3.13) устойчиво. При увеличении  $T$  они сливаются и исчезают при

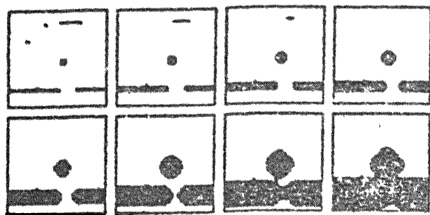
$$\frac{aT}{\pi} > \frac{1}{6} \quad (3.14)$$

Это условие отделяет область VIII на рис. 6, в области нарушения условия (3.9) продолжение этой границы показано пунктиром.

Несмотря на разбиение плоскости параметров нейронной среды, сделанное на основе полученных аналитических оценок, существенное продвижение в понимании особенностей ее функционирования оказалось возможным только с использованием численных экспериментов на ЭВМ. Они показали, что приведенное на рис. 6 разбиение плоскости параметров нейронной среды играет важную роль при обучении работе с нейросетью, хотя и не исчерпывает всех вариантов ее поведения. Это определяется прежде всего сильной зависимостью характера динамики структур от начальных условий, особенно вблизи критических значений параметров сети. В разделе I и в работе [22] отмечались некоторые проблемы, обуславливаемые дискретным временем. Кроме того, существенную роль может играть пространственная дискретность нейронной сети [23], она приводит к "rip-эффекту" - прилипанию динамических структур, которое вызывает эффекты жесткого возбуждения в гистерезиса, размывая таким образом границы областей в пространстве параметров. Например, чтобы фронт перемещался вперед, нужно превысить порог в неравенстве (3.3) на конечную величину. При этом пространственная дискретность будет оказывать стабилизирующее влияние на обработку визуальных изображений.

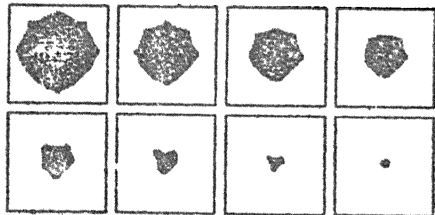
Приведем теперь качественное описание эволюции областей возбуждения нейронной среды в различных областях пространства параметров, иллюстрируя его результатами вычислительных экспериментов на программно реализованной искусственной нейронной сети. При их проведении использовалась нейронная сеть из  $64 \times 64$  элементов, что дало возможность рассмотрения достаточно содержательных рисунков при быстром просмотре различных вариантов. Размер функции связи достигал  $15 \times 15$  элементов, граничные условия были выбраны периодическими по ортогональным декартовым координатам. Поведение динамических структур в областях I-III в целом схоже с динамикой однокомпонентной диффузионной системы, хотя имеются некоторые отличия. В области низкого значения порога I плоский фронт бежит вперед и область возбуждения со временем захватывает все пространство нейронной среды, однако возможна остановка сталкивающихся фронтов возбуждения с "противостоянием" без их слияния и образования единой возбужденной области.

На рис. 7 приведен пример эволюционной последовательности областей возбуждения нейронной сети, в качестве начальной взята тестовая картинка из отдельных фрагментов разного типа. В процессе отбора на первых рекурсивных итерациях исчезают мелкомасштабные детали и выживают крупные фрагменты, которые расширяясь и долгое время сохраняя информацию о своих деталях в пределе захватывают все пространство нейронной сети. В области II - плоский фронт бежит назад, изображение сжимается и исчезает, хотя детали этого процесса могут заметно отличаться от случая диффузионных связей. Пример эволюции области возбуждения показан на рис. 8, где в качестве начального изображения взята область близкая к круговой. С уменьшением размера возбужденной области в ходе динамического процесса отличие формы области от круговой резко возрастает, контрастируя имеющиеся дефекты. Особенно примечательно проявление асимметрии относительно вертикали, практически не заметное на глаз на исходном изображении. Область III соответствует столь высокому порогу, что на первом же рекурсивном шаге с исчезает



$a=0.1; b=0.05; T=4$

Рис. 7



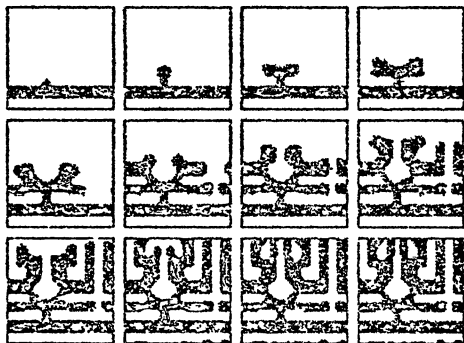
$a=0.1; b=0.08; T=6$

Рис. 8



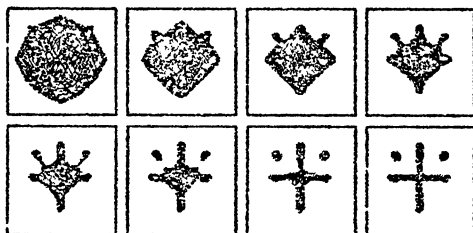
практически все изображение. Хотя такой режим может представлять определенный интерес для обработки изображений, поведение бинарной нейронной сети в этих условиях не соответствует описанию непрерывной нейродобной среды.

Область IV соответствует бегущему вперед неустойчивому плоскому фронту, развитие этой неустойчивости приводит к разрастанию причудливых деревьев. Поскольку сеть ограничена а фронты при столкновении не сливаются, стационарное изображение, которое в соответствии с показанным в разделе I утверждением сеть достигает после достаточного количества рекурсивных шагов, может получиться достаточно сложным и сильно зависящим от начального образа. Пример эволюция возбуждения в нейронной среде в этом случае приведен на рис. 9 - начальное возбуждение представляет собой толстую линию с небольшим дефектом. Вследствие развития неустойчивости происходит прорастание линий определенной толщины без их слияния при столкновении - такой режим может быть использован при автоматическом конструировании микросхем и печатных плат. Узкая область на плоскости параметров V соответствует бегущему назад неустойчивому плоскому фронту и является полезной для скелетизации сплошных изображений. На рис. 10 приведен пример такого рода с нарушением топологического заряда изображения - в процессе скелетизации происходит выделение двух деталей в изолированные фрагменты обработанного изображения. В области VI происходит оконтуривание сплошных фигур контурами различной толщины, пример показан на рис. 11, при достаточно сильной латеральной конкуренции можно осуществлять топологическое выделение дефектов на контуре - пример на рис. 12. В области VII, соответствующей очень сильной латеральной конкуренции элементов, происходит исчезновение как сплошных областей, так и линий, с выделением концов линий, мелких дефектов и точечных фрагментов рисунка, затем из них формируются стандартного размера точки с радиусом, определяемым формулой (3.15), см. рис. 13 и рис. 14. В области VIII латеральная конкуренция столь сильна, что такие стационарные точки существовать уже не могут, сеть всегда приходит в невозбужденное состояние.



$a=0.1; b=0.095; T=1; s=16$

РИС. 9



$a=0.1; b=0.09; T=4$

РИС. 10



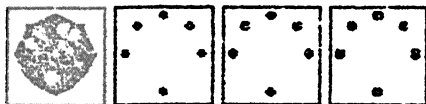
$a=0.1; b=0.11; T=0.01$

РИС. 11



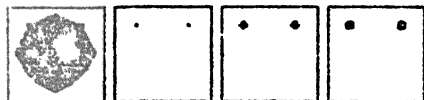
$a=0.1; b=0.12; T=0.01$

Рис. 12



$a=0.1; b=0.13; T=0.01$

Рис. 13



$a=0.1; b=0.135; T=0.01$

Рис. 14

По приведенным примерам видно, что однородные нейронные сети с латеральной конкуренцией за счет отрицательных связей между элементами могут быть эффективным универсальным средством предварительной обработки изображений и выделения контуров предметов, узловых элементов рисунка и различных признаков при соответствующей настройке параметров. При низких значениях порога происходят разрастание области возбуждения с генерацией причудливых изображений без изменения топологического заряда, которые связаны с начальным изображением, такие режимы тоже представляют интерес для приложений. Важным достоинством схемы латеральной конкуренции за счет отрицательных связей при обработке изображений является устойчивость динамического процесса в нейронной среде — начальная область возбуждения в сети скачивается к своему стационарному образу.

## 4. Нейронная среда с убывающим откликом элементов

Второй механизм ограничения влияния соседних элементов связан с немонотонной функцией для нейрона, для реализации в рамках булевых переменных возьмем

$$F[u] = -u + 1[u - T_0] - 1[u - T_1] \quad (4.1)$$

а функцию связи будем считать колоколообразной

$$\Phi(\vec{r} - \vec{r}') = \exp(-a(\vec{r} - \vec{r}')^2) \quad (4.2)$$

При этом модель непрерывной нейронной среды является двухпараметрической. Из простых интегральных оценок видно, что при

$$\frac{aT_1}{\pi} > 1 \quad (4.3)$$

поведение системы не зависит от  $T_1$  и таково, как если бы  $F_1[u] = 1[u - T_0]$  без убывающей отдачи. В этом случае при

$$\frac{aT_0}{\pi} < \frac{1}{2} \quad (4.4)$$

плоский фронт движется вперед и область возбуждения захватывает всю нейронную среду, при обратном неравенстве происходит, наоборот, полное исчезновение возбуждения.

На рис. 15 показано разбиение двумерной плоскости параметров сети  $(\frac{aT_1}{\pi}, \frac{aT_0}{\pi})$  на пять областей с различным поведением динамических структур. В областях I и II порог  $T_1$  настолько велик, что его значение не оказывает влияния на динамику структур - даже для нейрона, находящегося в сплошном поле возбужденных элементов взвешенная сумма - интеграл в (2.1) не может достигнуть значения этого порога. Поэтому поведение системы не отличается от нулевого базового варианта с колоколообразной функцией связи (4.2) и однопороговой нелинейной функцией (1.15).

В областях III-IV пространства параметров из-за нарушения условия (4.3) происходит исчезновение больших сплошных областей возбуждения, приводящее к контурированию таких изображений или их полному исчезновению. Область III соответствует высокому порогу  $T_0$  - плоский фронт возбуждения перемещается назад, что сопровождается уменьшением размеров возбужденной области до ее полного исчезновения, в областях параметров IV и V происходит "разбегание фигур". Для обработки изображений наибольший интерес представляет граница области III с областью IV, где происходит медленное движение границ возбужденной и невозбужденной обла-

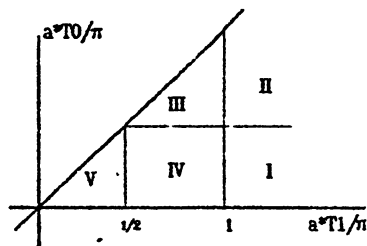
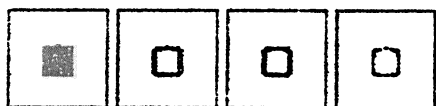
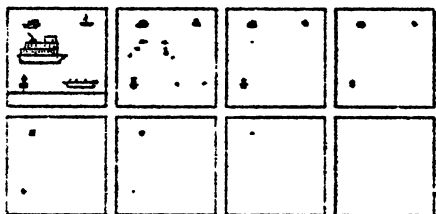


РИС. 15



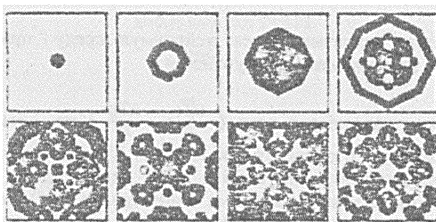
$\alpha=0.3; T_0=8.5; T_1=10$

РИС. 16



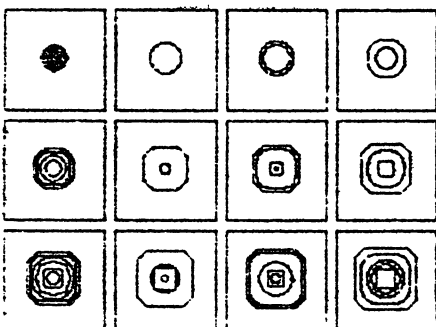
$\alpha=0.3; T_0=5; T_1=10$

РИС. 17



$T_0=0.1; T_1=10; \alpha=0.3; \text{step}=3$

РИС. 18

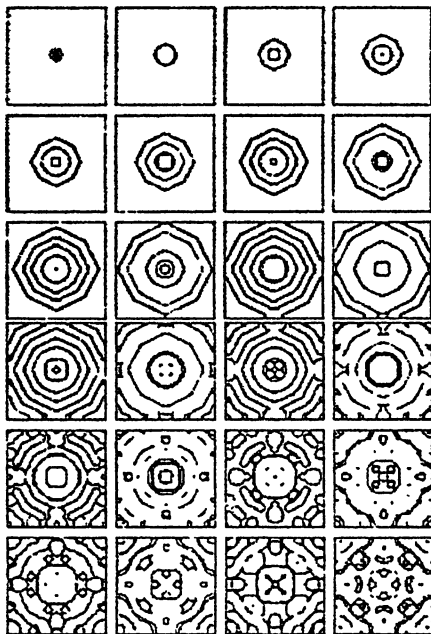


$\alpha=0.3; T_0=1; T_1=3$

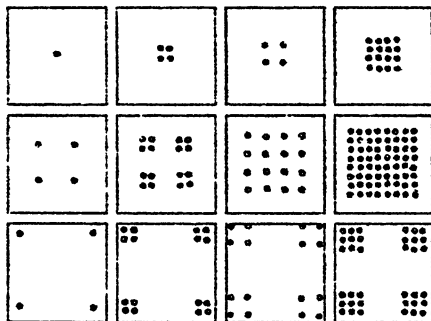
РИС. 19

стей нейронной сети, при этом результат обработки изображения может стабилизироваться за счет пространственной дискретности. Пример оконтуривания изображения и обработки контура в этих условиях показан на рис. 16. На рис. 17 показана серия образов, соответствующих последовательным рекурсивным итерациям для более содержательного начального изображения - полученную последовательность можно рассматривать как все более простые изображения, кодирующие исходное; аналогичная процедура осуществляется в биологической системе глаз-мозг. В области IV продвижение вперед внешней границы области возбуждения может сопровождаться выделением толстого контура. Фронты его теперь продвигаются вперед в обоих направлениях, когда они расходятся на достаточное расстояние происходит повторное образование "партизанских областей в тылу". Иногда такой процесс можно более наглядно интерпретировать как образование "кавитационных пузырьков" с колебательной динамикой, которая формирует своеобразные двумерные узоры, один из примеров показан на рис. 18.

Особенно интересной является область малых значений обоих порогов V, где на итерационном шаге происходит внешнее оконтуривание фигур с отрывом контура от исходной фигуры и формированием "ауры". При этом скорость фронта становится не мала по отношению к  $\alpha^{-\frac{1}{2}}$ , поэтому полученный результат расчета булевой переменной в дискретном времени не имеет отношения к непрерывной переменной и - временной шаг интегрирования  $h=1$  оказывается слишком велик. Другими словами, скорости процессов распространения возбуждения в нейронной сети столь велики, что динамика области возбуждения не описывается только их формой - она не сводится к самосогласованной геометродинамике. В ходе работы рекурсивного алгоритма могут происходить многократные прыжки линий с образованием труднопредсказуемых фигур переменной толщины и формы - двумерного хаоса, пример показан на рис. 19. При этом хаотические элементы динамики системы с дискретным обменом сочетаются с условиями симметрии, задаваемыми структурой задачи - в результате такого соединения хаоса с регу-



$a=0.3; T_0=0.1; T_1=1.0$   
рис. 20



$\lambda=0.2; T_0=0.01; T_1=0.03$   
рис. 21

лярностью возникают узоры, обладающие определенной художественной ценностью. Этого можно было ожидать, поскольку ощущение художественного восприятия возникает при оптимальном сочетании регулярных и узнаваемых элементов с хаотическими (случайными), этот принцип универсален и известен для стихов, музыки, других форм искусства [24]. При специальном подборе параметров можно добиться достаточно регулярной динамики структур, в примере приведенном на рис. 20 такая тенденция к периодичности четко просматривается до тех пор, пока не вступают в действие граничные условия нейронной сети, формируя живописные "узоры для обоев". Можно подобрать условия таким образом, что взаимодействие с границей не нарушит регулярности динамической структуры, см. рис. 21, при этом рекурсивный алгоритм приводит к исчезновению возбуждения в сети после конечного числа итераций. Напомним, что такой вариант точного попадания алгоритма в нулевое состояние, которое затем остается неизменным на всех последующих рекурсивных шагах, уже обсуждался в разделе 1.

В заключение отметим, что наблюдение за последовательностью динамических паттернов на экране компьютера в области параметров  $V$  представляет собой особенно увлекательное занятие. В какой-то степени этот факт известен уже давно, поскольку известную игру Конвея "Жизнь" [25] и некоторые другие клеточные автоматы можно рассматривать как пример такой нейронной сети двухполюсной нелинейной функцией. Распространенность таких игр обусловлена эмоциональной притягательностью для человека плохопредсказуемых процессов — они дают пищу для размышления.

## 5. Выводы

По приведенным примерам видно, что однородные нейронные сети с латеральной конкуренцией за счет отрицательных связей между элементами могут быть эффективным универсальным средством предварительной обработки изображений и выделения контуров предметов, узловых элементов рисунка и различных признаков при соответствующей перестройке параметров. При низких значениях порога происходит разрастание области возбуждения с генерацией причудливых изображений без изменения топологического заряда, которые связаны с начальным изображением, такие режимы тоже представляют интерес для приложений. Основным достоинством схемы латеральной конкуренции за счет отрицательных связей при обработке изображений является устойчивость динамического процесса в нейронной среде - начальная область возбуждения в сети скатывается к своему стационарному образу.

Латеральная конкуренция за счет убывающего отклика нейронных элементов не обеспечивает общей сходимости рекурсивного процесса к стационарному образу. Однако ее использование для обработки изображений может оказаться предпочтительнее, если необходимо сохранить информацию о мелких деталях изображения, а устойчивость обеспечивается другими факторами, например, пространственной дискретностью сети. В режиме разбегания области возбуждения конкуренция такого типа может обеспечить генерацию художественных узоров при правильном сочетании квазислучайных хаотических свойств генерируемого изображения с симметриями, задаваемыми начальными и граничными условиями и функцией связи.

# Литература

1. Wasserman Ph.P., *Neural computing, Theory and Practice*, van Nostrand Reinold, New York, 1990
2. Kohonen T. *Self-Organization and Associative Memory*, Springer- Verlag Press, Berlin, 1984
3. Hecht-Nielsen R. // *Counterpropagation Networks // Applied Optics*, 1987, 26, 4979-4985
4. Grossberg S. // *Adaptive Pattern Classification and Universal Recoding: Feedback, Oscillation, Olfaction and Illusions // Biological Cybernetics*, 1976, 23, 187-207
5. Carpenter G., Grossberg S. // *A Massively Paralell Architecture for a Selforganizing Neural Pattern Recognizing Machine // Computer Vision, Graphics, and Image Understanding*, 1987, 37, 54-115
6. Fukushima K. // *Cognitron: a self-organizing multilayered neural network model. NHK Technical Monograph No 30. NHK Tech Res Labs, Tokyo*, 1981
7. Fukushima K., Miyake S. // *Neocognitron: a new algorithm for pattern recognition tolerant of deformationa and shifts in position. Pattern Recognition*, 1982, 15, 455-469
8. Мастеров А.В., Рабинович М.И., Толков В.Н., Яхно В.Г. // *Исследование режимов взаимодействия автоволн и автоструктур в нейроподобных средах // Коллективная динамика возбуджений и структурообразование в биологических тканях, ИПФ АН СССР, Горький, 1988, с. 89-102*
9. Рамбиди Н.Г., Максимычев А.В., Никаноров В.А., Усатов // *Перспективы создания нейрокомпьютеров на молекулярных системах // Нейрокомпьютер, 1992, N 1, с. 62-70*
10. Колмогоров А.Н., Тря подхода к определению понятия "количество информации" // *Проблемы передачи информации, 1965, т.1, No 1*,
11. Pindyck R.S., Rubinfeld P.L., *Micro-economics*, Macmilan Publishing Company, New York, 1989
12. Мастеров А.В., Яхно В.Г. // *Анализ стационарных волн в однокомпонентной среде с нелокальными связями // Коллективная динамика возбуджений и структурообразование в биологических тканях, ИПФ АН СССР, Горький, 1988, с. 89-102*
13. Vasilev V.A., Romanovskii Yu.M., Chernavskii D.S., Yakhno V.G. // *Autowave Processes in Kinetic Systems*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1987.
14. *Proceedings ISSPA 92, 3rd International Symposium on Signal Processing and Its Applications, Gold Coast, Australia, August 1992, Ed. D. Gray, pp. 159-162.*
15. Belliustin N.S., Kuznetsov S.O., Nuidel I V., Yakhno V.G. // *Neural Networks with Close Nonlocal Coupling for Analyzing Composite Images, Neurocomputing*, 3, 1991, 231-246.
16. Hopfield J., Tank D. // *Neural Computation of Decisions in Optimization Problems // Biological Cybernetics*, 52, 141-152, 1985
17. Hubel D.H., // *Eye, Brain and Vision // Scientif American Library New York, 1989*
18. Бражник П.К., Давыдов В.А., Михайлов А.С., *Кинематический подход к описанию автоволновых процессов в активных средах, Теор. и мат. физика, 74, No 3, 1988, с. 440-447*

19. Misner Ch.W., Thorne S.Th., Wheeler J.A. // Gravitation // W.H.Freeman & Company, San Francisco, 1973
20. Belliustin N.S. // Homogeneous ANN Using Image Processing and Picture Generation // The RNNs/IEEE Symposium on Neuroinformatics and Neurocomputers // Rostov-on-Don, Russia, 1992, pp. 1221-1226
21. Д.Е. Пелиновский, В.Г. Яхно // Фронты многократного переключения в нейроподобных средах // Препринт ИПФ РАН, No 311, 1992
22. Belliustin N.S., Yakhno V.G. // Image Restoration in the Homogeneous ANN and the Role of Time Discreteness // Proceedings of the Third Australian Conference on Neural Networks - ACNN'92, Canberra, Australia, February 1992, p.p. 103-106
23. Belliustin N.S., Masterow A.V., Yakhno V.G. // On the Neural Nets Discreteness Role By the Treatment of Images // Proceedings of the International Conference on Artificial Neural Networks - ICANN-91. Helsinki, June, 1991
24. Голицын Г.А. // Информация-логика-поэзия // Число и мысль, вып. 7 М., Знание, 1984, с. 9-32
25. Тиффоль Т., Марголюс Н., Машинны клеточных автоматов., М., Мир, 1991